俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Lobačevskiĭ Geometry Preliminary

罗巴切夫斯基几何学初步

[俄罗斯]诺尔金 著　　姜立夫 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

罗巴切夫斯基几何学初步

Lobačevskiĭ Geometry Preliminary

[俄罗斯]诺尔金 著

姜立夫 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

大家書系

内容简介

本书主要介绍了罗巴切夫斯基几何学，其中包括它产生的历史、基本定理和它的相容性，还介绍了罗氏几何学与欧几里得几何学和黎曼几何学的区别和联系.

全书共有12章，分别为：平面几何学的公理、绝对几何学的补充定理、罗巴切夫斯基几何学的基本定理、多边形的角欠和面积、罗巴切夫斯基平面上的基本曲线、绝对空间几何学、罗巴切夫斯基的空间几何学、极限球面上的几何学、指数函数和双曲函数、双曲三角形、罗氏几何学的相容性、罗巴切夫斯基几何学与现代数学.

本书适合大、中学师生以及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

罗巴切夫斯基几何学初步/(俄罗斯)诺尔金著；姜立夫译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.6

(俄罗斯数学精品译丛)

ISBN 978-7-5603-5356-2

Ⅰ.①罗… Ⅱ.①诺… ②姜… Ⅲ.①罗巴切夫斯基几何 Ⅳ.①O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第090546号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 关虹玲
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张11.5 字数243千字
版 次 2015年6月第1版 2015年6月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5356-2
定 价 28.00元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

⊙ 序

罗巴切夫斯基几何学通常被归入几何学基础课程中，这课程是为数学物理系高年级学生开设的. 这个情况就不能让更多的人——教师们，其他专业的大学生，中等学校高年级的学生们——有机会认识我们的伟大几何学家的卓越思想.

也有专门叙述非欧几何学的各种书籍①，但这些书有的久已绝版，有的要求过高的数学水平，有的要求读者具有解析几何和微分几何的知识. 不但如此，所有这些书中，都有若干部分必须在读者掌握了高等数学的基本内容之后才能了解.

因此，著者的目的是在本书内给罗巴切夫斯基几何学的基础提出一个初等的，同时又是有系统的和相当严密的叙述. 在叙述中并附有历史性的和方法论的说明，而在许多方面和传统的叙述形式不同.

绪论中包括罗巴切夫斯基几何学产生的简史. 第 1 章略述绝对几何学的公理系统和它的一些重要定理.

第 2 章讨论和平行公理的选择尚未发生关系的一些平行线性质.

① Я・乌斯本斯基(Успенский)，罗巴切夫斯基一波里埃的非欧几何学引论，1922 年；С・И・卢克扬钦可(Лукьянченко)，罗巴切夫斯基一波里埃的非欧几何学初步，1933 年；Б・Я・布克列也夫(Букреев)，罗巴切夫斯基平面几何学的分析，1951 年；Б・В・库图左夫(Кутузов)，罗巴切夫斯基几何学和几何学基础初步，1950 年；П・А・希罗科夫(Широков)，В・Ф・卡冈(Каган)，非欧几何学的结构，1950 年.

第 3 章才开始罗巴切夫斯基几何学的叙述，并讨论了罗巴切夫斯基平面上直线的相互位置.

第 4 章叙述角欠和面积的理论. 第 5 章讨论具有常数曲率的曲线.

在第 6 章叙述绝对空间几何学的大概后，第 7 章接着举出罗巴切夫斯基空间几何学的基本事实.

第 8 章讨论极限球面上的几何学.

第 9 章叙述指数函数和双曲函数的初等理论. 已经熟悉高等数学中这部分知识的读者们可以不读这一章.

第 10 章的内容是导出双曲三角学的基本公式.

第 11 章利用投影几何学的解释，证明罗巴切夫斯基几何学的相容性. 但这个理论是用初等的方法来叙述的，未曾学习投影几何学的读者们也都可以了解.

第 12 章为总结性的叙述，指出罗巴切夫斯基的思想对于数学的发展，特别是对于最近八十年中的几何学所产生的巨大影响. 其中虽不得不牵涉到一系列相当繁复的问题，但仍然是为了本书广大的读者们而写的.

最后让我谢谢 C·A·雅诺夫斯基(Яновский)，书中关于数学史和方法论方面的问题，承他惠加指点. 还要谢谢 B·A·索洛可夫，B·Б·奥尔洛夫，和 A·З·吕福金几位，他们给予本书以特别细心的校阅，又曾提出许多宝贵的意见.

A·П·诺尔金

喀山，1953 年 9 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

◉目录

绪论

§1　几何学和它的起源

几何知识的起源在远古时代就失传了. 五千年以前埃及人便已筑造规模宏大的建筑物，例如库佛王（基奥普斯）的金字塔，高达 138 m. 无疑地，假如没有精密的测量和几何性质的计算，这样的工程是不可能进行的.

古希腊的历史学家和数学家都把埃及人的几何知识的发生归功于土地测量的需要，因为在尼罗河每年泛滥之后，他们不得不把冲掉的地界再重新丈量一次. 这便是“几何学”这个名词的来源，它在希腊文中正是“土地测量”的意思.

关于埃及人所达到的几何知识的水平，我们有两部草纸书作为直接的证据，这是属于公元前两千年的著作（其中一部草纸书保存在莫斯科）. 这两部书含有各种计算面积和体积的准确公式或近似公式①.

但是所有从那遥远的年代（包括埃及、中国、巴比伦、印度和其他文明古国）流传下来的几何知识一致证明，那些知识基本上只是一堆零星琐碎的个别性质的法则.

大约在公元前七百年，埃及人的几何知识传入希腊. 那时的希腊，经济和文化的繁荣正显示出古代社会的向前发展，在这种情况下，几何也跟着发展起来成为科学.

① 参看 М·Я·维郭特斯基（Выгодский），古代算术和代数，国立技术理论书籍出版社，1941 年，§14，15.

重要的是，在那时代，希腊人不仅继续积累新的事实，并且开始采用特别的方法去创造理论，这便是我们现在所谓的演绎法或公理法，直到今天，它还是叙述几何的基本方法.

创建这个方法是数学思想上最伟大的成就之一. 它不是一下子产生出来的，而是需要积累好几辈学者的工作，这些学者是米列都斯城的泰勒斯(公元前7世纪)，毕达哥拉(公元前6世纪)，希奥斯岛的赫拉克利特和德谟克利特(公元前5世纪)，塔伦多城的亚基塔，欧多克斯和梯爱底塔(约公元前4世纪)等等. 可惜他们的著作或者完全遗失，或者仅以残缺断片的形式因被后代作家所援引而传到我们手里.

欧几里得于公元前4世纪和3世纪交替的时候生活在亚历山大城，他把在他以前的几何发展做了总结. 他的主要著作《几何原本》在完善和充实上不但大大地超过了在它以前所有几何学的工作，并且在它以后两千余年间依然没有一部著述可以和它比美.

直到现在，由于罗巴切夫斯基的发现，使几何学受到了彻底的革命以后，中等学校里几何教科书的叙述方法仍然和我们在几何原本里所见到的，在实质上没有多大的差别.

如欲证明这一点，读者尽可亲自披阅欧几里得的《几何原本》. 这部书的原文保存至今，流传给我们的有拉丁译文和阿拉伯译文的各种手抄本. 最近的俄文译本是不久前才出版的[①]，由 Д·Д·莫尔都海－波尔托夫斯基(Д. Д. Мордухай-Болтовский)所编.

§2 演绎法的基本特色

演绎体系讲述法的特点在于结构的简单，可用很少的文字把它表达出来.

演绎体系的叙述归结为：

1) 基本概念的列举；

2) 定义的叙述；

3) 公理的叙述；

4) 定理的叙述；

5) 定理的证明.

定义说明所使用的概念的意义.

---

① “欧几里得原本”，国立技术理论书籍出版社，卷 Ⅰ ～ Ⅵ，1948年；卷 Ⅶ ～ Ⅹ，1949年；卷 Ⅺ ～ ⅩⅤ，1950年. 今后我们将引用这个版本.

几何学中的定义可举下面一条为例：由同一点出发的两条半线所构成的图形称为角.

但在建立定义的时候，我们常用一个概念去定义另一个概念. 在上例中，我们用了点的概念，和自该点出发的半线的概念，去定义角的概念. 自然发生这样的问题，我们是否也能给点和半线下个定义呢？在这种情形下，我们在几何学中确实找到了这样的定义：自已知点出发的半线，是指这种点的集合，它们都在通过已知点的直线上，并且位于该已知点的一侧.

在这个定义中，我们又遇到新的概念“通过点的直线”和“位于一侧”，对于这些，我们又将需要别的定义.

但是，显然地，这个建立定义的办法不可能无止境地追究下去. 我们总得从某些东西开始，所以，每个演绎体系必须以一些基本概念为基础，这些基本概念本身不给以任何定义，而是通过它们去定义所有其余的概念.

在我们的几何的叙述里，将把下列概念认为是基本的：“点”“直线”“平面”“属于”“介于”和“运动”. 前面三个亦称基本形象或基本图形，后面三个亦称基本关系.

这样一来，所有其余图形和它们之间的关系的讨论，便归结为基本图形和基本关系的讨论.

例如，再看一看角的定义. 我们把这定义归结成为说明两个概念的意义的问题，这两个概念是：“通过点的直线”和“位于已知点的一侧的点的集合”. 现在我们可以给出这样的定义：我们说，直线 a 通过点 A，如果点 A 属于直线 a. 在这里对于最后一个定义，我们不能再继续追究下去了，因为已把这个问题完全归结为对基本图形“点”和“直线”之间的一个基本关系 ——“属于”.

正如我们将要在下面(§8)见到的，“在一侧”这个概念的定义也可归结为一个基本关系 ——“介于”.

再说公理和定理. 它们和定义有别，定义仅仅解释所使用的概念的意义，而公理和定理则是一些断语.

例如，下面两句都是断语：

1)“通过任何两个不同的点有且仅有一条直线”；

2)“两条直线仅有一个公共点”.

在这里我们不打算给名词“直线”或“点”建立定义，而只断定直线和点具有哪些性质.

一切断语的基本特性是，我们可以对它们提出正确不正确的问题. 例如，如果我们认为断语 1) 是正确的话，那么我们便需承认断语：“通过两个不同的点可以引两条不同的直线”，是不正确的了.

总之，公理和定理一样都是断语，不过它们在演绎体系里占有不同的地位.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

他们的区别在于:一切定理归根到底都是从公理引申出来的,公理则是不加证明的断语.

余下尚需说明构成演绎体系的最后组成部分 —— 证明.

定理的证明是一种论辩,即从前面已有的定理或公理的正确性逻辑地推出所提定理的正确性.

现在拿前面所提的断语 1) 和 2) 作为例子.

断语 1) 是公理,所以没有证明.

断语 2) 是定理,所以附有下面的证明.

假定断语 2) 不正确,即假定两条不同的直线同时通过两个不同的点 P 和 Q. 在这种情形下,通过两个不同的点 P 和 Q 可以引两条不同的直线. 但若这个断语是正确的话,那么公理 1) 所断言的便不正确. 这样,否定了和公理 1) 矛盾的定理,也就是证明了定理 2).

我们只援引了最简单的情形的证明,这个定理的证明,是直接地从公理推出的. 在许多更复杂的情形下,一个定理要从它前面已有的定理推出来,而这些定理本身又要和它们前面已有的定理加以比较才能得以证明.

这样,与叙述的次序相反地依次去检查每个演绎体系,即是从最后和最复杂的定理转向最前和最简单的定理,我们最终会达到最初的和最简单的定理,它们的证明是和公理直接比较得来的. 因此,归根到底一切定理的证明都以公理为根据,或者直接和公理比较,或者间接和别的定理比较.

由此可见,每个演绎体系必须从公理开始,即是从不加证明的假定开始的. 事实上,从一个定理追溯到它前面的定理,这个过程应该是有终止的. 在公理体系的断语中必须有这一类原始的命题,才可借以证明第一批定理. 那些原始的命题便是公理.

在简略地介绍过演绎法之后,我们认为有责任告诫读者,不要把用这个方法去认识事物的价值估计得太高. 读者必须注意,在人类认识自然的过程中,演绎法只有和归纳法交互作用才能产生效果. 创造演绎的几何体系,这个要求的发生,和它的实现的可能性,都是后来的事,即在人类经过几千年的长时期,积累了大量关于物体的几何特性的实际知识,并且当人类在实践活动中,用归纳方法研究了这些特性之后. 只有在这样大量的物质基础上,古希腊的学者们才迈开了第一步,用演绎法把科学建立起来.

§3　几何学和现实性

认识了前节所讲的演绎体系的结构之后,我们不得不注意下列两种情况.

一个演绎体系的一切定义的基础,是本身不给定义的基本概念,又一切证明的基础,是本身不加证明的公理.在这里,好像始终存在着两个悬而未决的问题:关于基本概念的意义的问题,和关于公理的正确性的问题.这两个问题实在不能在演绎体系本身之内求得解决,因为要解决这些问题必须引入新的概念和新的公理,而这些概念和公理又将发生同样的问题.但这并不等于说,这些问题是根本解决不了的,要是这样,便谈不到演绎体系的实际应用了.但事实上,人类在几千年间的一切实践活动和科学工作,都在不同程度上依赖于逻辑、算术、几何和其他演绎体系的结论.

自然科学的历史证明,要在某门科学或在它的个别领域内建立公理体系,通常只有在这门科学发展到一定的水平,一般说来要到相当高的水平之后,并且在发展过程中所积累的大量实际材料的基础上才可能实现.公理化能够使我们把某门科学所研究的对象之间的基本联系和关系明白地表达出来.但是,对于一门具体科学,例如几何学的公理体系,如将其中所含的基本概念和基本关系加以适当形式的解释,常常会发现,这个公理体系所表述的联系和关系对于性质完全不同的事物也是适用的.这样一来,一门科学的公理体系的应用范围,可能比这门科学还要广泛得多.那便是说,产生了关于已知演绎体系能被利用的范围的问题.

在应用演绎体系的过程中,将同时解决两个问题:关于基本概念的意义的问题,和关于公理的正确性的问题.

要将演绎体系应用到包含某些事物的某一领域和它们之间的关系上去,首先必须解释这个体系的基本概念,也就是,说明我们所考虑的领域内的哪些事物和关系跟这个体系的基本对象和关系是对应的.其次,必须检验和演绎体系的基本概念相对应的那些事物和关系,是否适合公理的规定.如果发现它们都能够适合那些公理的话,那么这个演绎体系的每一个定理对于所考虑的事物的领域也将是正确的.

上面最后的情况说明了,建立演绎体系的科学的和实用的意义.要将这样的体系应用到某一事物的领域上去,我们只需检验它的公理是适合的,以后我们便可确信它的任何定理都是适用的.这样才有可能去发现我们所关注的领域内的事物的某些特性,这些特性如果用直接观察的方法可能是难以测知的.

颇为重要的是,我们可给予基本概念以不同的解释,而使公理仍能适用.这种情形保证了同一个演绎体系可被应用到不同的领域上去.

除此以外,还要注意到,演绎体系像任何别的科学体系一样,是用抽象的方法从实验得来的,也就是从科学研究的对象里抽出它们在实践上的主要性质,而把那些在科学的应用和发展的现阶段上比较不重要的性质撇开.

但撇开了这些次要的性质后,科学理论对现实性的反映将是不完全的,并

且只是近似真确的.

在科学和实践更进一步的发展过程中，可能有这样的一个时候，那时对象的某种性质，原先是不重要的，忽又变成重要的了. 在这时候，原来的理论，便不够充分，而必须让位给新的理论，因为新理论能把对象说明得更全面更深刻.

现在回到几何的讨论. 很难举出技术科学或自然科学的哪一个领域是没有几何的应用的. 而且在每一个领域里，几何的基本概念都有确定的解释，而它的公理或者直接地，或者从它的推论里获得验证.

例如，讨论直线和点的概念. 在最简单的测量实践中，我们把直线解释为拉紧的绳子；在力学上解释为物体依惯性运动的轨道；在光学、测量学和天文学上解释为光的射线. 同样地，关于点，我们了解为线的末端，或为物体，或为光源，它们是那么细微，在实际上可以不必计较它们的大小. 在所有这些情况里，点都是不可分裂，不可穿孔或不能透光的小东西，它都服从下面的命题：通过两个不同的点，能引一条而且只有一条直线.

同样地可以解释几何学的其他基本概念，并验证它的公理，而且由于公理是正确的，因此断定一切几何定理都是正确的. 几何定理的正确性不仅从它的公理的正确性逻辑地得出，而且在几千年的长时期里被人类的实践活动和科学工作不断地证实着.

因此，我们相信几何学的基本命题的正确性，正如相信每一门科学知识的正确性一样，是有其根据的，那就是这些命题是从经验中提炼出来的，在实践中受到了检验，并且表示出客观世界中的事物虽属近似但已足够精确的性质.

§4　欧几里得公设

在上面我们把公理了解为根据经验并且由实践来加以验证的真理. 这种唯一正确的唯物论的看法并没有很快地贯注到科学里去. 自欧几里得的《几何原本》问世以后，在很长的一段时期里，另外一种见解占领着优势，这就是把公理看作是显然的真理. 根据这种见解，证明是一种论辩，它使某一命题成为显然的真理. 但因为公理本身是显然的，所以公理不需要任何的证明. 当然，这样的观点是经不起批判的. 显然性是一种纯粹主观的感觉，而且像任何感觉一样是可能骗人的. 人们只需回忆，在过去很长的时期里，人人都以为地球是显然不动的，而太阳围绕着地球运行，这就说明了显然性决不是树立科学真理的充分基础.

但历史的事实是：这个观点在几何学家中占了优势，所以他们就特别注意到欧几里得的一个命题，这个命题在《几何原本》的某些版本中称为第十一公

理，也有别的版本称为第五公设的. 欧几里得是这样表述这个命题的：

"如果一直线和两直线相交，所构成的两个同侧内角之和小于两直角，那么，把这两直线无限地延长，它们一定在那两内角的一侧相交."

换句话说：两条直线和第三条直线相交，如果它们在第三条直线的一侧构成的同侧内角之和小于两直角，那么，这两条直线一定相交.

可以立刻说明这个命题不是显然的. 无论如何，把它和欧几里得其余公理比较，或和《几何原本》里引为定理的很多命题比较起来，它都要复杂得多. 由于这个缘故，人们很快便产生了这样的意见，而且成为普遍的感觉，以为欧几里得把上述命题放在公理之列，不是因为它是不能证明的，而是因为欧几里得找不到它的证明. 一般认为这个命题所缺乏的证明，是欧几里得体系的基本的甚至是唯一的缺陷，是个"污点"，破坏了他的体系的纯洁和完美. 意大利的几何学家萨开里(1667—1733) 自以为完成了欧几里得公设的证明，他把自己关于这个问题的著作题为："肃清了一切污点的欧几里得".

对于欧几里得公设的这种看法，已成为人们的普遍信念，这自然促使几何学家去追求它的证明. 这种工作在古代东方和西方所有欧几里得《几何原本》的读者中持续了两千年之久. 在这个漫长的时期里，他们对于这个公设提出了许多不同的证明. 在这些证明中，有些是很深刻很巧妙的，但是在更仔细的研究之下，常常会发现它们或者直接含有逻辑上的错误，或者在证明时明显地或隐蔽地引进了和欧氏公设等价的新公理. 当然，即使在引进新公理的基础上所作的证明是正确的，也不能算作这个问题的解答，因为问题的核心在于限用欧几里得的其余公理去证明他的第五公设.

我们引述拜占庭的几何学家蒲罗克鲁(公元5世纪) 的论证作为一个例子，他的评注是附在一本现存的最古老的欧几里得原本里.

关于第五公设，蒲罗克鲁说："这个命题应从列举的公设中根本地取消掉，因为它是一个引起很多问题的定理，多雷米曾经在他的一本书中企图排除这些问题①，而且欧几里得自己也曾把这个命题的逆命题作为定理."

蒲罗克鲁还指出，欧几里得的命题不能认为是显然的，他这样结束他的论辩："非常明显地，这个定理应当找到证明；不过这个要求和公设的本质是不合的. 怎样证明这个命题，将见于下文 —— 这要等我们掌握了几何的要素以后. 我们有必要揭露它的正确性，但不是作为显然明白而毋需证的命题，而是作为有了证明才能成立的命题."②

---

① 这里是指公元1世纪的著名数学家和天文学家克劳夫特・多雷米，和他的名字联系着的宇宙体系的观念，直到哥白尼的时候还占着统治地位.

② 引语见 B・Φ・卡冈的几何学基础，第 Ⅰ 篇，国立技术理论书籍出版社，1949 年，第 113 页.

关于欧几里得公设的逆命题，蒲罗克鲁是指《几何原本》第一卷的第十七个命题:"在每个三角形里，任意选取两角，其和小于两直角."这个命题实质上就是第五公设的逆命题，而且事实上欧几里得在证明它时也不依赖于第五公设. 依据这结果，欧几里得又很容易地证明了定理 29，这个定理是说，两条直线如果和第三条直线构成的同侧内角之和等于 $2d$，那么这两条直线不能相交.

现在再来说说蒲罗克鲁的证明. 他所根据的是以前的定理，以及他自己称为亚里士多德公理的命题:把两条直线从它们的交点起延长，在不同延长线上两点的距离会无限地增大. 这个命题其实不是公理，我们将在后面加以证明(参看 §14 定理 2).

其次蒲罗克鲁讨论直线 EF(图 1) 和 AB，GH 和 CD，这三条直线和 EF 相交于点 E 和点 F，并且和 EF 构成同侧内角 $\angle BEF$，$\angle HEF$ 和 $\angle DFE$，使

$$\angle BEF + \angle DFE = 2d$$

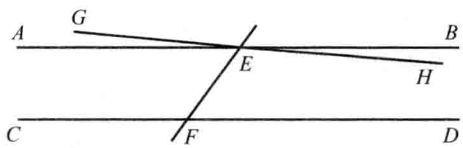

图 1

这个等式等价于《几何原本》第一卷定理 29，即直线 AB 不能和直线 CD 相交，亦即这两条直线是平行的. 但是直线 EH 通过角的内域，而且，依蒲罗克鲁的说法:"因为我们有两条直线，即 EB 和 EH，可以从点 E 起无限地延长，所以它们之间的距离可以超过任意指定的长度. 因此，它可以超过已知的平行直线(AB 和 CD) 间的距离，于是 GH 和 CD 相交. 这样一来，直线 GH 和 CD 在 EF 的一侧相交，即在构成的两角($\angle HEF$ 和 $\angle DFE$) 之和小于两直角的那一侧相交."

骤然看来，这个证明好像是很可信服似的，因为我们知道，在一个平面上两条不相交的直线，即是平行线，其间的距离常常是保持有限的，甚至还是固定的. 但是如果我们试图证明这断语，又非引用欧几里得公设或者和它等价的什么命题不能成功. 所以，蒲罗克鲁的一切讨论仍然回到这个事实，即他采纳了新的公理:在一平面上两条不相交的直线彼此相隔的距离是有限的.

我们不再援引别的证明例子了. 我们仅将指出一些可以用来代替欧几里得公设的历史上最著名的公理.

13 世纪的著名学者土西的那西尔爱丁曾给欧几里得公设做出证明，它是从下列公理出发的:假定两条直线在同一平面上，并在某一方向互相接近，如果它们不相交，则它们就不能在该方向延长时分散.

他也首先指出"三角形的三角之和等于两直角"，这一命题是和第五公设等

价的①.

克利斯多福·克拉维(16世纪,德国人)引用公理:和直线同在一平面上,在它的同侧,和这条直线有相等距离的三点,都在另一条直线上.

华里斯(1616—1703,英国人)利用了公理:对于任何图形常有任意大小的相似图形存在.

普雷菲尔(18世纪,英国人)采用公理:在平面上通过直线外一点仅能引一条直线和已知直线不相交.在现代的初等几何学教科书里常用这个公理来代替欧氏公理.

勒戎得耳(18,19世纪,法国人)根据下列公理:通过介于角的两边之间的任一点,可以引直线和这角的两边分别相交.

这些例子的数目还可以增加.在著名的"平行线"论文里B·布尼阿可夫斯基引述了约有三十种之多.

在18世纪末至19世纪初,围绕着第五公设的问题,曾经产生过特殊的研究风气.

德国的哲学家兼数学家兰佩尔德在1763年写道:"欧几里得公设的证明可能推到这样远,使人们看起来只是剩下一些细节.但是从精密的分析中显露出,这些表面上看来似乎是细节的里面却含有问题的全部实质;它通常包含着或者就是所要证明的命题,或者是和公设等价的命题."匈牙利的几何学家B·波里埃 给他的儿子约翰写道:"希望你不要专意企图克服平行线的理论了;你会在这上面花费掉所有的时间,而终生不能证明这个命题…….这个昏无天日的黑暗将使成千个像牛顿那样杰出的天才全被吞没.它任何时候也不会在地面上明朗化,并且不让不幸的人类,即使在几何学上到得任何成功.这是永远留藏在我内心里的巨创."

§5 罗巴切夫斯基的发现

这句惊人的话早在19世纪的20年代就已被写下了,但两千年来笼罩在第五公设的问题周围的"昏无天日的黑暗",那时实已临近要被驱散的时期.驱散这个黑暗的就是我们的天才数学家尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基.

尼·伊·罗巴切夫斯基1792年12月1日(旧俄历11月20日)生于诺夫哥罗德城,在喀山中学毕业后,他于1807年进入了新设立的喀山大学,1811年大

① 参看Б·А·罗津费尔德(Розенфельд)所著"土西的那西尔爱丁的数学工作",数学史研究,第四期,国立技术理论书籍出版社,1951年.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com