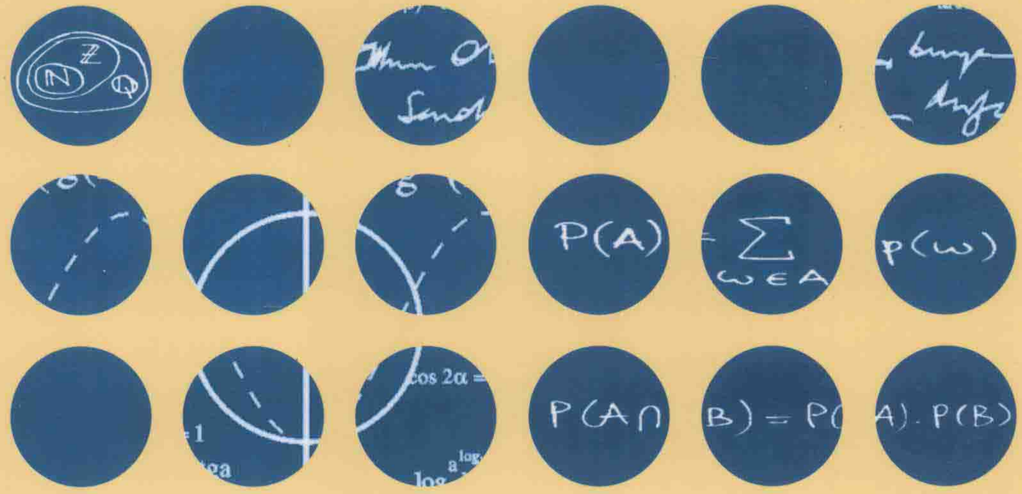

概率论与数理统计

主　编　贾　茗　刘春生　郑彭丹
副主编　马　林　潘一格　张　芳　夏　飞
主　审　黄政龙

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

概率论与数理统计

主　审　黄政龙

主　编　贾　茗　刘春生　郑彭丹

副主编　马　林　潘一格　张　芳　夏　飞

编　委　夏　飞　张　芳　马　林　贾　茗
张　勤　范伟平　曹玉芬　郑彭丹
潘一格　刘春生　黄政龙　魏许青
刘迪芬　谭岳武

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/贾茗,刘春生,郑彭丹主编.
—长沙:中南大学出版社,2014.6
ISBN 978 - 7 - 5487 - 1085 - 1

Ⅰ.概... Ⅱ.①贾...②刘...③郑... Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 106860 号

概率论与数理统计

贾 茗 刘春生 郑彭丹 主编

学出版社

长沙市麓山南路 邮编:410083

电话:0731-88876770 传真:0731-88710482

□印 装 长沙利君漾印刷厂

□开 本 720×1000 B5 □印张 15.25 □字数 380 千字
□版 次 2015 年 1 月第 1 版 □2015 年 1 月第 1 次印刷
□书 号 **ISBN 978 - 7 - 5487 - 1085 - 1**
□定 价 **29.00 元**

图书出现印装问题,请与经销商调换

前　言

概率论与数理统计是一门理论与应用并重，人机结合程度高，在多个领域，特别是与实验有关的领域，比如说在生物研究领域、新产品开发领域都有着广泛应用的学科.它是这类专业的专科生、本科生及硕士研究生的主干课与学位课.

本书从上述领域内的研究和技术人才培养目的出发，系统地介绍了各有千秋的各类概率定义，随机变量的各种分布表达形式，数字特征以及随机变量函数的各种相应结果，以及在实际问题中收集数据、处理数据、构造合适的统计量，用于对实际研究对象进行估计和检验的各种基本理论和方法.

本书在编写过程中，充分注意了授课对象的已有基础和非数学专业学生学习数学主要是为了用好数学的实际情况，力求概念准确、清楚，应用范围明确，使用方法及过程清晰，可操作性强.书中省略了一些较难的数学证明，但列举了大量的应用例题，特别是最近几年来经济活动中常出现的各类例题.这对读者理解和正确使用概率统计方法应该会有一些帮助.

本书每章后面均有一定数量习题并附有答案，以供读者复习和消化，验证课本知识.

还要提醒读者注意的是，虽然统计计算在数据较多时是比较繁杂的，但大家只需掌握其应用范围、操作步骤即可.因为关于数据计算的工作现在开发了很多的数据软件包，如SPSS，SAS，甚至在大家比较常用的EXCEL中也有专门的统计模块可供使用，大批量数据的计算已经不再是困难。

本书由贾茗老师撰写大纲和提供全书初稿，第1章由贾茗老师、刘春生老师编写；第2章由刘春生老师、贾茗老师编写；第3章由刘春生老师、贾茗老师编写，第4章由贾茗老师、郑彭丹老师编写、第7章由郑彭丹老师、贾茗老师编写、第8章由郑彭丹老师、贾茗老师编写，第5章和附表由潘一格老师和贾茗老师编写，第6章由马林老师和贾茗老师编写，最后由贾茗老师对全书进行统稿，中南林业科技大学黄政龙教授认真审阅了全书,并提出了许多宝贵的意见。

本书在编写的过程中参考了众多的国内、外教材.得到了中南林业科技大

学涉外学院向春阶院长、何立新副院长、教务部余波主任、理工系彭沛夫主任的大力支持与帮助，这些工作为保证本书质量起到了重要作用. 谨在此对为本书付出辛勤劳动的全体人员表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，使本书在教学过程中得到不断的完善.

编　者

2014 年 12 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

抛一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，在抛掷之前无法预知抛掷的结果，呈现出不确定性，但多次重复地抛掷同一枚硬币，得到正面朝上和反面朝上的次数大致相同. 这种大量重复试验或观察中所呈现的固有规律性，就是以后所说的**统计规律性**.

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果具有统计规律性的现象称为**随机现象**. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科，它从数量角度给出随机现象的描述，为人们认识和利用随机现象的规律提供了有力的工具. 因此概率论和数理统计这门学科应用相当广泛，几乎渗透到所有科学技术领域，工业、农业、国防与国民经济的各个部门都要用到它.

§1.1　随机事件

一、随机事件

概率论与数理统计要研究的是随机现象，这就需要进行大量重复的试验，要求试验具有以下三个特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现.

在概率论中，将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**. 下面举一些随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面朝上 H、反面朝上 T 出现的情况；

E_2：将一枚硬币抛三次，观察正面朝上 H、反面朝上 T 出现的情况；

E_3：将一枚硬币抛三次，观察正面朝上的次数；

E_4：在一批灯管中任意抽取一只，测试它的寿命.

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能的结果是明确的. 将随机试验 E 的所有可能的基本结果组成的集合称为 E

的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即随机试验 E 的每个结果，称为**样本点**.

下面写出试验 $E_i(i=1,2,3,4)$的样本空间 S_i：

S_1：$\{H, T\}$；

S_2：$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$；

S_3：$\{0, 1, 2, 3\}$；

S_4：$\{t \mid t \geqslant 0\}$.

要注意的是：样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 例如，在 E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币连抛三次，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样.

在实际的随机试验时，人们常常关心满足某种条件的样本点所组成的集合. 例如，若规定某种灯管的寿命小于 500 小时为次品，那么在 E_3 中更关心灯管的寿命是否有 $t \geqslant 500$(小时)的情况，满足这一条件的样本点组成 S_3 的一个集合：$A=\{t \mid t \geqslant 500\}$，称 A 为试验 E_3 的一个随机事件. 显然当且仅当集合 A 中的一个样本点出现时，有 $t \geqslant 500$(小时)，即灯管合格.

一般地，称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**. 随机事件一般用大写的字母 A，B，C，D 等来表示.

下面举出一些随机事件的例子.

例 1.1 在 E_2 中，事件“三枚硬币出现同一面”，即

$$A_1=\{HHH, TTT\},$$

事件“三枚硬币至少有两枚正面朝上”，即

$$A_2=\{HHH, HHT, HTH, THH\}.$$

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 如在 E_1 中有两个基本事件$\{H\}$和$\{T\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是它自身的子集，它在每次试验中总是发生的，称为**必然事件**. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它是样本空间 S 的子集，但在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

二、事件间的关系和事件的运算

事件是一个集合，因此事件间的关系和运算自然按集合论中集合间的关系与集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法和含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 A，B 是 S 的子集.

(1)事件的包含与相等

若事件 A 发生，则导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点均属于 B，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$.

图 1－1 表示事件 A 与事件 B 之间的关系.

若 $A\subset B$，且 $A\supset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(2) 和事件

"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的和（或并），记为 $A\cup B$（也可简记为 $A+B$）.

事件 $A\cup B$ 发生意味着，或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生. 图 1－2 表示事件 A 与事件 B 的和事件，和事件也称**并事件**.

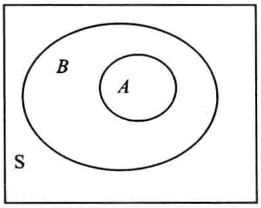

图 1－1　$A\subset B$

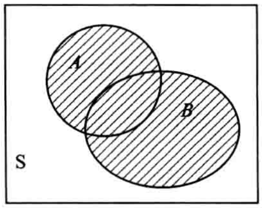

图 1－2　$A\cup B$

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，…的和事件.

(3) 积事件

"事件 A 和事件 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的**积**（或**交**）**事件**，记为 $A\cap B$（也可简记为 AB）.

$A\cap B$ 通常记为 AB. 事件 AB 发生意味着事件 A 与事件 B 都发生. 图 1－3 表示事件 A 与事件 B 的积事件，积事件也称交事件.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，…的积事件.

(4) 差事件

"事件 B 发生而事件 A 不发生"这一事件，称为事件 B 与事件 A 的**差事件**，记为 $B-A$.

图 1－4 表示事件 A 与事件 B 的差事件.

(5) 互不相容（互斥）事件

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B

是**互不相容(互斥)事件**，简称事件 A 与事件 B 是**互不相容**，或**互斥**的.

图 1-5 表示事件 A 与事件 B 是互不相容的事件.

(6)对立(互逆)事件

若事件 A 与事件 B 满足 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与事件 B 为**对立(互逆)事件**. A 的对立事件常记为$\overline{A}$. 图 1-6 表示事件 B 与事件 $\overline{B}$ 是对立事件.

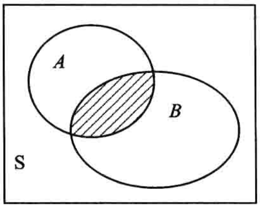

图 1-3 $A\cap B$

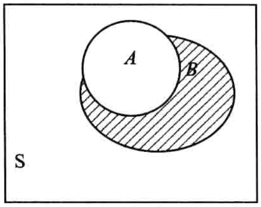

图 1-4 $B-A$

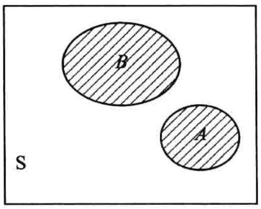

图 1-5 $A\cap B=\varnothing$

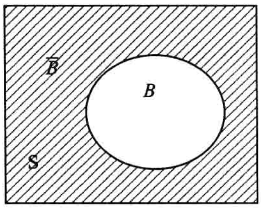

图 1-6 $B\cup\overline{B}=S$，$B\cap\overline{B}=\varnothing$

例 1.2 在例题 1.1 中有

$$A_1\cup A_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, TTT\},$$
$$A_1\cap A_2=\{HHH\},$$
$$A_1-A_2=\{TTT\}.$$

例 1.3 下列各式说明什么包含关系？

(1)$AB=A$；(2)$A\cup B=A$；(3)$A\cup B\cup C=A$.

解 (1)$AB=A$ 表示事件 A 包含于事件 B，事件 B 包含事件 A，即 $A\subset B$；

(2)$A\cup B=A$ 表示事件 B 包含于事件 A，事件 A 包含事件 B，即 $B\subset A$；

(3)$A\cup B\cup C=A$ 表示事件 $B\cup C$ 包含于事件 A，事件 A 包含事件 $B\cup C$，即 $B\cup C\subset A$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

三、事件的运算规律

在进行事件的运算时，经常要用到下述定律. 设 A，B，C 为事件，则有

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律(对偶律)：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

例 1.4　将下列事件用事件 A，B，C 表示出来.

(1)3 个事件中至少有 1 个发生　$A\cup B\cup C$

(2)3 个事件都不发生　$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$

(3)3 个事件不都发生　$\overline{ABC}$或者$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

(4)3 个事件只有 A 发生　$A\,\bar{B}\,\bar{C}$

(5)3 个事件恰好有 2 个事件发生　$(AB\bar{C})\cup(A\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC)$

(6)3 个事件至少有 2 个事件发生　$AB\cup BC\cup AC$

(7)3 个事件中不多于 1 个事件发生　$(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})\cup(A\,\bar{B}\,\bar{C})\cup(\bar{A}B\,\bar{C})\cup(\bar{A}\,\bar{B}\,C)$

例 1.5　证明事件等式成立：$A\cup B=A\,\bar{B}\cup B$.

证明　由对偶律公式知$\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B}$，而

$\overline{A\,\bar{B}\cup B}=\overline{A\,\bar{B}}\cap\bar{B}=(\bar{A}\cup\bar{\bar{B}})\bar{B}=(\bar{A}\cup B)\bar{B}=\bar{A}\,\bar{B}\cup B\,\bar{B}=\bar{A}\,\bar{B}\cup\varnothing=\bar{A}\,\bar{B}$，

所以　$\overline{A\cup B}=\overline{A\,\bar{B}\cup B}$，即 $A\cup B=A\,\bar{B}\cup B$ 成立.

例 1.6　向指定目标射击三枪，分别用 A_1、A_2、A_3 表示第一、第二、第三枪击中目标，可用 A_1、A_2、A_3 表示以下事件：

(1)只有第一枪击中：$A_1\,\bar{A}_2\,\bar{A}_3$

(2)至少有一枪击中：$A_1\cup A_2\cup A_3$

(3)至少有两枪击中：$A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$

(4)三枪都未击中：$\bar{A}_1\,\bar{A}_2\,\bar{A}_3$

§1.2 随机事件的概率

一、事件的概率

除必然事件和不可能事件外，在一次试验中一个事件可能发生也可能不发生. 观察试验中的各个事件，常会发现有些事件在一次试验中发生的可能性较大，而另一些事件发生的可能性较小. 例如，在抛一颗骰子观察它的点数的试验中，事件“出现偶数点”比事件“出现 1 点”发生的可能性要大. 希望对每个事件指定一个数，能用它来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小.

为此，我们首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而再引入概率的概念——表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数.

1. 频率

设在相同的条件下，进行了 n 次试验. 若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次，则比值 k/n 称事件 A 在这 n 次试验发生的频率，记为 $f_n(A)=k/n$.

由上定义推知，频率具有以下性质：

(1) 对任一事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) 对于必然事件 S，有 $f_n(S)=1$；

(3) 若事件 A，B 互不相容，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

一般地，若事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$f_n(\cup A_i)=\sum_i f_n(A_i).$$

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 表示 A 发生的频繁程度，频率大，事件 A 发生的就频繁，在一次试验中，事件 A 发生的可能性也就大. 反之亦然. 因而，直观的想法是用 $f_n(A)$ 表示事件 A 在一次试验中发生可能性的大小. 但是，由于试验的随机性，即使同样是进行 n 次试验，$f_n(A)$ 的值也不一定相同. 但大量试验证实，随着重复试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某个常数附近，且偏离的可能性很小.

定义 1.1 设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k，当 n 很大时，频率 k/n 在某个数值 p 的附近摆动，而随着试验次数 n 的增加，发生较大摆动的可能性越来越小，则称数 p 为**事件 A 发生的概率**，记为 $P(A)=p$.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应，因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限

增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件 A 的概率，这就是概率的统计定义. 在实际应用时，往往可用试验次数足够大时的频率来估计概率的大小，且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高.

要注意的是，上述定义并没有提供确切计算概率的方法，因为我们永远不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率. 在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，况且我们不知道 n 要取多大才行. 如果 n 取得很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有理由认为，取试验次数 $n+1$ 来计算概率，总会比取试验次数 n 来计算概率将会更准确、更逼近所求的概率.

2. 概率的公理化定义

下面给出表征事件发生可能性大小的概率的定义.

定义 1.2　设 E 是随机试验，S 是它的样本空间. 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为**事件 A 的概率**，如果它满足下列条件：

(1) 非负性：对于任意事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3) 可列可加性：设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

由概率的定义可以推得概率具有下述性质.

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

证明　在可列可加性中取所有的 $A_k=\varnothing$ 得

$$P(\varnothing) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\varnothing)$$

再由概率的非负性得：$P(\varnothing) = 0$.

性质 2 (有限可加性)　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互斥事件组，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

特别地，若 $A \cap B=\varnothing$，则有 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

证明　在可列可加性中取 $A_k=\varnothing$，$k=n+1, n+2, \cdots$，再由性质 1 即可证.

性质 3（对立事件的概率） $\overline{A}$是 A 的对立事件，则有
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

证明 因 $A \cup \overline{A} = S$，$A \cap \overline{A} = \varnothing$，所以由有限可加性及规范性得
$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$
即
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 4 设 A，B 是两个事件，则有 $P(B-A) = P(B) - P(AB)$.

特别地当 $A \subset B$，则有
$$P(B-A) = P(B) - P(A),\ P(B) \geqslant P(A).$$

证明 因 $B = (AB) \cup (B-A)$，$(AB) \cap (B-A) = \varnothing$，于是由有限可加性
$$P(B) = P[(AB) \cup (B-A)] = P(AB) + P(B-A),$$
即得
$$P(B-A) = P(B) - P(AB).$$

当 $A \subset B$ 时，可得 $P(AB) = P(A)$，所以
$$P(B-A) = P(B) - P(A).$$

由于概率 $0 \leqslant P(B-A) = P(B) - P(A)$，于是 $P(B) \geqslant P(A)$.

性质 5 对任意事件 A，总有 $P(A) \leqslant 1$.

证明 由于 $A \subset S$，由性质 4 可得，$P(A) \leqslant P(S) = 1$.

性质 6（加法公式） 对于任意两事件 A，B，有
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明 因 $A \cup B = (A - AB) \cup B$，$(A - AB) \cap B = \varnothing$，由性质 2 及性质 4 可得
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - AB) + P(B) = P(A) - P(AB) + P(B) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

容易推广到 n 个事件的情形，这里给出三个事件 A_1，A_2，A_3 的加法公式：
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) \\ &\quad - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3). \end{aligned}$$

例 1.7 （1）设 A，B 是互不相容的事件，已知 $P(A) = 0.4$，$P(B) = 0.5$，求 $P(\overline{A})$，$P(A \cup B)$，$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

（2）设 A，B 是两事件，已知 $P(A) = 0.2$，$P(B) = 0.3$，$P(A \cup B) = 0.4$，求 $P(AB)$，$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 （1）$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$.

因 A, B 是互不相容的事件，即 $AB=\varnothing$, $P(AB)=0$，于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.5-0=0.9,$$

由德摩根(对偶)律，$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.9=0.1.$

(2) $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.2+0.3-0.4=0.1,$

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.4=0.6.$$

例 1.8　已知 $P(A)=P(B)=1/4$, $P(C)=1/2$, $P(AB)=1/8$, $P(BC)=P(CA)=0$，试求 A, B, C 中至少有一个发生的概率.

解　$\{A, B, C$ 中至少有一个发生$\}=A\cup B\cup C$，而 $ABC\subset BC$，且 $P(BC)=0$，所以有 $P(ABC)=0$，则由加法公式可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-0-0+0=\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

二、古典概率模型

考察一类最简单的随机试验，它们具有以下两个特点：

(1)试验的样本空间只包含有限个样本点，即随机试验出现有限个基本事件；

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同，即每一个基本事件的概率相等.

具有这两个特点的试验称为**古典概率模型**或称**等可能概率模型**. 例如前面提到的“抛硬币”和“掷骰子”的试验就属于这一类试验.

基于古典概率模型的特点，其概率计算方法为：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

若以 M 表示样本空间中的基本事件的总数，以 N 表示事件 A 中包含的基本事件数，即有：

$$P(A)=\frac{N}{M}.$$

这就是古典概率模型中，事件 A 的概率的计算公式. 上式表明在古典概率模型中，事件 A 的概率等于 A 中包含的样本点的个数在样本空间的全部样本点总数中所占的比例.

每一个基本事件 $E_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的概率为

$$P(E_i)=\frac{1}{N}.$$

古典概率模型中事件 A 的概率也称为**古典概率**. 在计算时，可以利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识来求得相应的概率.

例 1.9 将一枚硬币抛掷三次，求：

(1) 恰有一次出现正面朝上的概率；

(2) 至少有一次出现正面朝上的概率.

解 将一枚硬币抛掷三次的样本空间为

$$S=\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

S 中包含有限个样本点，且由对称性可知每个样本点出现的可能性相同，是古典概率.

(1) 设 A 表示“恰有一次出现正面朝上”，则

$$A=\{HTT, THT, TTH\},$$

故有

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

(2) 设 B 表示“至少有一次出现正面朝上”，则 B 的对立事件 $\overline{B}=\{TTT\}$，得

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

当样本空间 S 中包含的样本点个数较多时，一般不将 S 中的元素一一列出，而只需要分别求出 S 中和事件 A 中分别包含的样本点的个数，再由古典概率模型计算公式即可得到事件 A 的概率.

例 1.10 箱中有 a 只白球，b 只红球，k 个人依次在箱中取一只球，考虑两种取球方式：

(1) 作**放回抽样**，即每人取一只球，观察其颜色后再放回箱中.

(2) 作**不放回抽样**，即每人取一只球，观察其颜色后不再放回箱中.

求第 i $(i=1, 2, \cdots, k)$ 人取到白球(记为事件 A)的概率(设 $k\leqslant a+b$).

解 本题是古典概率模型.

(1) 放回抽样的情况，每个人在取球时箱中均有 a 只白球，b 只红球，故第 i $(i=1, 2, \cdots, k)$ 人取到白球的概率均为 $\frac{a}{a+b}$，即

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com