

中学智能教育丛书

- 智能数学高考特训教程（理科）

副本:自我检测问题集（理科）

- 智能数学高考特训教程（文科）

副本:自我检测问题集（文科）

- 智能数学特训教程 高中数学学前准备

- 智能数学特训教程 高中数学必修1

- 智能数学特训教程 高中数学必修2

- 智能数学特训教程 高中数学必修3

- 智能数学特训教程 高中数学必修4

- 智能数学特训教程 高中数学必修5

总策划：中公教育

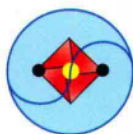
封面设计：杨丹

ISBN 978-7-5100-6856-0



9 787510 068560 >

定价：32.00元



智能教育丛书

理科

智能数学高考特训教程

自我检测问题集

(做中学与用中学)

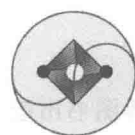
齐智华 齐新 / 著

智能数学



挑战高考

世界图书出版公司



智能教育丛书

理科

智能数学高考特训教程

自我检测问题集

(做中学与用中学)

齐智华 齐新/著

智能数学一二三

一个中心:数学思想方法

两个基本点:

1. 基础知识傻瓜化
2. 解题方法明确化

三步学:学会自我总结,摧毁题海战术

- S1 问中学(总结基础秘诀与数学方法)
- S2 例中学(范例评注)
- S3 做中学与用中学(自我检测)

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

智能数学高考特训教程自我检测问题集. 理科 / 齐智华, 齐新著. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2013.8(2014.8 重印)

(智能教育丛书)

ISBN 978-7-5100-6856-0

I. ①智… II. ①齐… ②齐… III. ①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 197911 号

智能教育丛书·智能数学高考特训教程自我检测问题集(理科)

著 者: 齐智华 齐 新

责任编辑: 夏 丹 翟 蕾

装帧设计: 中公教育图书设计中心

出 版: 世界图书出版公司北京公司

出 版 人: 张跃明

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(地址: 北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 64077922)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 三河市海新印务有限公司

开 本: 787 mm×1092 mm 1/16

印 张: 9.5

字 数: 152 千

版 次: 2013 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5100-6856-0

定 价: 32.00 元

版权所有 翻印必究

前言

PREFACE

本书副本《自我检测问题集》，全集十二章共 37 卷测试卷，供你做中学与用中学，特别注意作好每卷每专题的自我总结。每卷测试两类问题：

(一) 理论测试：自我检测基础秘诀与数学方法的问题；

(二) 习题测试。

本书要求你强力执行“问题解决”的现代学习方法，力行四学，傻瓜三步：

第一步，问中学（总结基础秘诀和解题方法）；

第二步，例中学（范例评注）；

第三步，做中学与用中学（自我总结）。

这里强调两点：

(1) 要带着问题学：像考试一样，先独立地自我检测，找到并抓住自己的主要问题之后，再对照与研究本书正本的[基础秘诀与数学方法]和[范例评注]的讲解。做到有的放矢，开发大脑！

(2) 本书把基础秘诀与数学方法的理论测试放在首位，其次才是习题测试。传统的学习方法几乎都是“题海战术”，传统做法是：

老师讲解和布置的都是习题，从来不测试理论方法；

学生从来不独立地解题，只是听讲和照猫画虎，更不会自我总结。本书希望你学会自我总结，摧毁题海战术。

本书《自我检测问题集》的做法正是针对“旧数学老办法”的挑战与革命。

六种数学思想方法表(解题小辞典)

一 猜证结合思想

五猜：特殊化 一般化
类比法 归纳法
统计猜想
七证：综合法 分析法，
比较法
穷举法 数学归纳法
反证法 举反例

二 化归思想

双向化归 分解与组合
辅助元 映射法
递推法 回归定义
三角化归：三变 立体化归：升降维

三 分合思想

分步解决与分类讨论
整体解决：反分步，反分类
算法：分步，分类，递归

四 数形结合思想

坐标法 向量法 复数法
几何法 图解法

五 函数与方程思想

基本量方法：方程组法与条件组法
基本方程法与辅助方程法，判别式法
基本函数法与辅助函数法
函数，方程，不等式相互转化
换元法与参数法

六 微积分思想

极限法
导数法
积分法

目 录

CONTENTS

六种数学思想方法表(解题小辞典)

第 1 章 两种推理与高速选填	(1)
检测 1.1 推理基础——集合	(1)
检测 1.2 推理基础——逻辑	(4)
检测 1.3 演绎推理——七证	(7)
检测 1.4 合情推理——五猜	(10)
第 2 章 高考重点函数	(19)
检测 2.1 高考重点函数	(19)
检测 2.2 函数性质与图象变换	(23)
第 3 章 不等式	(29)
检测 3.1 不等式性质与基本不等式	(29)
检测 3.2 不等式的解法	(32)
检测 3.3 不等式的应用	(35)
检测 3.4 不等式的区域与线性规划	(39)
第 4 章 导数与定积分	(43)
检测 4.1 导数的概念与运算	(43)
检测 4.2 导数的应用	(46)
检测 4.3 定积分	(50)
第 5 章 三角函数与三角方法	(53)
检测 5.1 三角变换	(53)
检测 5.2 三角函数的图象和性质	(56)
检测 5.3 解三角形	(60)

第 6 章 数列与数列方法	(65)
检测 6.1 基本数列:等差数列,等比数列	(65)
检测 6.2 数列化归与先猜后证	(69)
第 7 章 计数与概率统计	(75)
检测 7.1 计数	(75)
检测 7.2 概率	(78)
检测 7.3 随机变量及其分布	(81)
检测 7.4 统计	(84)
第 8 章 向量法与几何法	(89)
检测 8.1 向量法	(89)
检测 8.2 空间向量	(92)
检测 8.3 几何证明选讲	(95)
第 9 章 立体几何	(99)
检测 9.1 线面关系	(99)
检测 9.2 柱,锥,台,球	(101)
检测 9.3 三视图与直观图	(104)
检测 9.4 夹角,距离与综合题	(107)
第 10 章 解析几何	(111)
检测 10.1 直线与圆	(111)
检测 10.2 椭圆,双曲线,抛物线	(114)
检测 10.3 解析几何综合题	(119)
检测 10.4 极坐标系与参数方程	(126)
第 11 章 复数/算法	(129)
检测 11.1 复数	(129)
检测 11.2 算法	(132)
第 12 章 不等式拓展/行列式与矩阵	(137)
检测 12.1 不等式拓展	(137)
检测 12.2 行列式与矩阵	(140)

第1章 两种推理与高速选填

[检测 1.1] 推理基础——集合

(一) 理论测试: 回答基础秘诀与数学方法的问题.

问1 试总结表示集合的方法.

问2 总结“集合基本关系表”.

问3 总结“集合运算表”.

问4 画出“集合傻瓜图”(8图).

问5 写出“有限集合的子集数目公式”, 并加以证明.

(二) 习题测试

1 已知 A, B 均为集合 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的子集, 且 $A \cap B = \{3\}$, $(\complement_U B) \cap A = \{9\}$, 则 $A =$

- A. $\{1, 3\}$ B. $\{3, 7, 9\}$
C. $\{3, 5, 9\}$ D. $\{3, 9\}$

2 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集, 且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是

- A. $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$ B. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$ D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

3 设全集 $U = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y-4}{x-2} = 3\}$, $N = \{(x, y) | y = 3x - 2\}$, 那

么 $(\complement_U M) \cap N$ 等于

- A. $\emptyset$ B. $(2, 4)$ C. $\{(2, 4)\}$ D. N

4 设若非空集合 $X = \{x | a + 1 \leq x \leq 3a - 5\}$, $Y = \{x | 1 \leq x \leq 16\}$, 则使得 $X \subseteq (X \cap Y)$ 成立的所有的 a 的集合是

- A. $\{a | 0 \leq a \leq 7\}$ B. $\{a | 3 \leq a \leq 7\}$
C. $\{a | a \leq 7\}$ D. 空集

5 设全集为 U , A, B 是 U 的子集, 定义新运算: $A * B = \{x \mid x \in A \cup B, \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 则 $(A * B) * A =$

- A. A B. B
C. $B \cap (\complement_U A)$ D. $A \cap (\complement_U B)$

6 身穿蓝、黄两种颜色衣服的各有两人, 身穿红色衣服的有一人, 现将这五人排成一行, 要求穿相同颜色衣服的人不能相邻, 则不同的排法共有

- A. 48 种 B. 72 种 C. 78 种 D. 84 种

7 设 $M = \{x \mid x = \sin \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}\}$, 则满足条件 $M \cup P = M$ 的集合 P 的个数是_____.

8 非空集合 S 同时满足: ① $S \subseteq \mathbf{N}$; ② “若 $a \in S$, 则 $8-a \in S$ ”. 则非空集合 S 共有_____个.

9 设集合 $A = \{x \mid x^2 + 4x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$,

(1) 若 $A \cap B = B$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

10 设集合 $A = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = a+1\}$, $B = \{(x, y) \mid (a^2-1)x + (a-1)y = 15\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值集合.

[检测 1.1] 习题解答

1. 答 D

解 $A = (A \cap B) \cup (A \cap \complement_U B) = \{3, 9\}$, 故选 D.

2. 答 C

解(反演律的推广) 对已知等式 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$ 取补, 得 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$, 故选 C.

3. 答 C

解(巧设全集) 由 $\frac{y-4}{x-2} = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 2 (x \neq 2) \Rightarrow N = M \cup \{(2, 4)\}$. 改设全集 U 为 N , 则

$(\complement_U M) \cap N = (\complement_N M) \cap N = \{(2, 4)\}$, 故选 C.

评注 学会巧设全集的数学方法.

4. 答 B

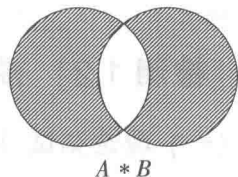
解 $X \subseteq (X \cap Y)$ 等价于 $X \subseteq Y$. 再注意到 X 是非空集合, 故有

$$\begin{cases} 3a-5 \geq a+1 \\ a+1 \geq 1 \\ 3a-5 \leq 16 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq a \leq 7, \text{ 故}$$

选 B.

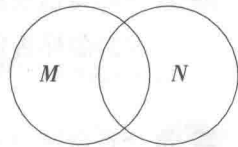
5. 答 B

解(新定义) $A * B$ 为“两月牙”, $(A * B) \cup A = A \cup B$,
 $(A * B) \cap A$ 为“左月牙”, 因而 $(A * B) * A = B$, 故选 B.



6. 答 A

解(容斥原理) 设 $M = \{\text{两蓝相邻}\}$, $N = \{\text{两黄相邻}\}$, 则
 $M \cap N = \{\text{两蓝相邻且两黄相邻}\}$, 所以不同的排法共有
 $A_3^5 - A_1^4 \times 2 - A_1^4 \times 2 + A_1^3 \times 2 \times 2 = 4! \times 2 = 48$. 故选 A.



7. 答 8

解 化简集合: $M = \{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, 而 $M \cup P = M \Leftrightarrow P \subseteq M$, 故集合 P 的个数等于
 集合 M 的子集个数 $2^3 = 8$.

8. 答 31

解法 1(分类穷举法) 非空集合 S 共有: $1+4+4+6+6+4+4+1+1=31$ (个)

解法 2(对应法) $T = \{\{4\}, \{0, 8\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$, 非空集合 S 的个数等于集合 T
 的非空子集的个数, 所以共有: $2^5 - 1 = 31$ (个).

9. 解 (1) $A = \{-4, 0\}$, $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$.

设 B 的方程 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 的判别式为 Δ , 按 Δ 分类:

$B \subseteq A \Leftrightarrow$ ① $\Delta < 0 (B = \emptyset)$, 或 ② $\Delta = 0 (B = \{0\})$, 或 ③ $\Delta > 0 (B = A = \{-4, 0\})$.

解得 a 的取值范围是 $\{a | a \leq -1, \text{ 或 } a = 1\}$.

(2) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow B = A = \{-4, 0\}$, 解得 a 的取值范围是 $a = 1$.

10. 解 由联立方程组 (*) $\begin{cases} y-3=(a+1)(x-2) \\ (a^2-1)x+(a-1)y=15 \end{cases}$ 消去 y ,

得 $2(a^2-1)x = 2a^2 - 3a + 16$. ————①

当 $a = \pm 1$ 时, 方程无解, 得 $A \cap B = \emptyset$;

当 $a \neq \pm 1$ 时, 方程有解, 但 $x=2$ 时, 解得的 $(x, y) \notin A$, 所以 $x \neq 2$. 因此以 $x=2$ 代入①,

求得 $a = -4$ 和 $a = \frac{5}{2}$.

综上, a 的取值集合是 $\{1, -1, -4, \frac{5}{2}\}$.

评注 所给解法是子集思想方法: $A \cap B$ 是方程组 (*) 解集的子集, 用解集间的包含关系解决问题. 本解巧妙地利用了等价关系: $\frac{y-3}{x-2} = a+1 \Leftrightarrow y-3 = (a+1)(x-2) (x \neq 2)$.

[检测 1.2] 推理基础——逻辑

(一) 理论测试: 回答基础秘诀与数学方法的问题.

问 1 (1) 写出全称量词、全称命题, 特称量词、特称命题的定义.

(2) 怎样否定全称命题与特称命题?

问 2 “否命题”与“命题的否定”有何区别?

问 3 你学会了几个逻辑联结词, 它们与集合的子、交、并、补有何关系?

问 4 怎样判断复合命题的真假? (由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫复合命题)

问 5 怎样判断“条件”的充分性和必要性? 怎样求事件的“充要条件”?

问 6 执行“正难则反”的解题策略时, 你有哪些方法?

(二) 习题测试

1 命题“若 $A \subseteq B$, 则 $A=B$ ”与其逆命题、否命题、逆否命题四个命题中, 真命题的个数是

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

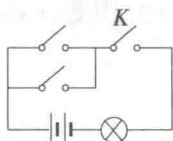
2 已知命题

p_1 : 函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, p_2 : 函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,

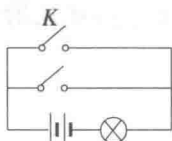
则在命题 $q_1: p_1 \vee p_2$, $q_2: p_1 \wedge p_2$, $q_3: (\neg p_1) \vee p_2$ 和 $q_4: p_1 \wedge (\neg p_2)$ 中, 真命题是

- A. q_1, q_3 B. q_2, q_3
C. q_1, q_4 D. q_2, q_4

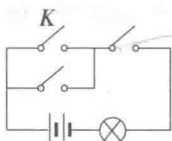
3 下列电路图中, 开关 K 闭合是灯亮的必要不充分条件是



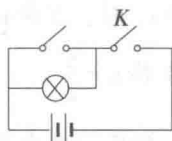
A



B



C



D

4 不等式 $a > b$ 与 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 同时成立的充要条件是

- A. $ab > 0$ B. $a > 0 > b$
C. $ab < 0$ D. $ab \neq 0$

5 已知 $h > 0$, 设命题甲为: 两个实数 a, b 满足 $|a - b| < 2h$; 命题乙为: 两个实数 a, b 满足 $|a - 1| < h$ 且 $|b - 1| < h$, 那么甲是乙的

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既非充分又非必要条件

6 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M = N$ ” 的

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既非充分又非必要条件

7 设条件 $p: 1 \leq x \leq 3$, 条件 $q: m + 1 \leq x \leq 2m + 4, m \in \mathbf{R}$. 若 p 是 q 的充分条件, 则 m 的取值范围是_____.

8 (2012 北京) 已知 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3), g(x) = 2^x - 2$, 若同时满足条件:

① $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$; ② $\exists x \in (-\infty, -4), f(x)g(x) < 0$. 则 m 的取值范围是_____.

9 已知 BD, CE 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle B, \angle C$ 平分线, $BD \neq CE$, 求证 $AB \neq AC$.

10 求证: “ $\triangle ABC$ 内接于单位圆” 的必要条件是 “ $\triangle ABC$ 至少有一边不大于 $\sqrt{3}$ ”, 并讨论这个条件是否为充分条件.

[检测 1.2] 习题解答

1. 答 B

2. 答 C

3. 答 A

4. 答 B

5. 答 B

提示: 利用数轴, 举反例. $\text{乙} \Rightarrow \text{甲}$, 但 $\text{甲} \not\Rightarrow \text{乙}$.

6. 答 D

提示: 举反例 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} < 0$ ” 与考察极端 “ $M = N = \emptyset$ ”.

7. 答 $[-\frac{1}{2}, 0]$

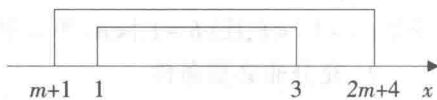
解 (利用子集和推出关系)

设 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid m+1 \leq x \leq 2m+4\}$,

因为 $p \Rightarrow q$, 所以 $A \subseteq B$.

由图, 得 $\begin{cases} m+1 \leq 1 \\ 3 \leq 2m+4 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 0$

所以 m 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, 0]$.



8. 答 $(-4, -2)$

解 $g(x) < 0 \Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1$, $f(x)$ 的根 $x_1 = 2m$, $x_2 = -m-3$.

$\therefore$ ①真 $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ x_1 < 1 \text{ 且 } x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 0$;

记②为命题 p , 则

$\neg p: " \forall x \in (-\infty, -4), f(x)g(x) \geq 0 " \Leftrightarrow " \forall x \in (-\infty, -4), f(x) \leq 0 "$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ x_1 \geq -4 \text{ 且 } x_2 \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 0$, 于是在 $m < 0$ 的条件下, ②真 $\Leftrightarrow m < -2$.

所以同时满足条件①②, m 的取值范围是 $-4 < m < -2$.

评注 解条件②时, 若按两根大小分类, 很麻烦, 是傻解. 本例解法是利用逻辑“ $\neg$ ”进行“反分类”: 将存在性命题②否定, 就转换为全称命题, 不必分类了.

9. 探路 直接证明很难, 改证逆否命题:

“ $AB=AC \Rightarrow BD=CE$ ” ——①

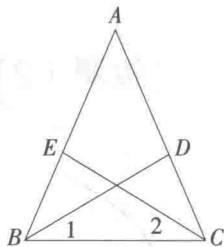
证明 $AB=AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$,

而 BD, CE 是 $\angle ABC, \angle ACB$ 的平分线 $\therefore \angle 1 = \angle 2$,

又 $BC=CB, \angle ACB = \angle ABC$,

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle CBE \Rightarrow BD=CE$.

即逆否命题①成立, 所以原命题得证.



10. 证明 (反证法) 假设 $\triangle ABC$ 的三边均有: $a > \sqrt{3}, b > \sqrt{3}, c > \sqrt{3}$, 则由正弦定理得 $a = 2R \sin A = 2 \sin A > \sqrt{3} \Rightarrow A > 60^\circ$, 同理 $B > 60^\circ, C > 60^\circ \Rightarrow A+B+C > 180^\circ$, 这与 $A+B+C = 180^\circ$ 相矛盾, 故必要条件证完.

这个条件不是充分条件, 如反例: $a=b=3, c=1 \leq \sqrt{3}$ 满足条件, 但边 $a > 2$ (直径), $\triangle ABC$ 不可能内接于单位圆.

[检测 1.3] 演绎推理——七证

(一) 理论测试: 回答基础秘诀与数学方法的问题.

问 1 什么是综合法、分析法? 总结常用变式.

问 2 什么是比较法? 总结常用的比较法.

问 3 写出用数学归纳法证明命题 $P(n)$ ($n \in \mathbb{N}$, 且 $n \geq n_0$) 成立的一般步骤.

问 4 什么是穷举法? 总结常用的穷举法.

问 5 什么叫“正难则反”? 怎样用举反例和反证法解题?

(二) 习题测试:

1 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为

- A. 3 B. 6 C. 8 D. 10

2 (2012 课标全国) 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, SC 为球 O 的直径, 且 $SC=2$, 则此棱锥的体积为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 (湖北) 某实验室需购某种化工原料 106 千克, 现在市场上该原料有两种包装, 一种是每袋 35 千克, 价格为 140 元; 另一种是每袋 24 千克, 价格为 120 元. 在满足需要的条件下, 最少要花费 _____ 元.

4 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点. 定义 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 两点之间的“直角距离”为 $d(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. 已知点 $B(1, 0)$, 点 M 是直线 $kx - y + k + 3 = 0$ ($k > 0$) 上的动点, $d(B, M)$ 的最小值为 _____.

5 (北大) $f(x) = x^2 - 53x + 196 + |x^2 - 53x + 196|$, 求 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50)$.

6 已知 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 且 $x + y = 1$, 求证: $(x + \frac{1}{x})^2 + (y + \frac{1}{y})^2 \geq \frac{25}{2}$, 并指出何时取等号.

7 求证: $2^n + 2 > n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

8 求证: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

9 若不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > \frac{a}{24}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 求自然数 a 的最大值, 并加以证明.

10 若 $p, q \in \mathbf{R}$, $p^3 + q^3 = 2$, 求证: $0 < p+q \leq 2$.

[检测 1.3] 习题解答

1. 答 D

解 对 x 穷举:

x	5	4	3	2
y 的个数	4	3	2	1

所以 B 中所含元素的个数为 $4+3+2+1=10$ (种), 选 D.

2. 答 A

解法 1 (秒杀: 估算)

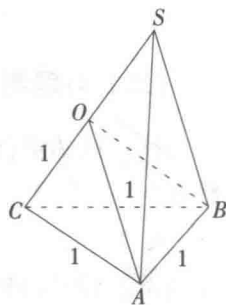
$$V_{SABC} < \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \right) \times 2R = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故选 A.

解法 2 (秒杀: 辅助正方体)

$$V_{SABC} = 2V_{OABC} = 2 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

故选 A.



3. 答 500.

解 (穷举法) 设买 35 千克装的原料 x 袋, 买 24 千克装的原料 y 袋, 则总花费 $z = 140x + 120y$ 元.

约束: $35x + 24y \geq 106$, 且 x, y 是自然数, 求 $z_{\min}$.

对 x 列表穷举:

x	0	1	2	3	4
$y_{\min}$	5	3	2	1	0
$z_{\min}$	600	500	520	540	560

故 $z_{\min} = 500$ (元).

评注 求最优整点是图解法的难点, 这时需求“最值等值线”及其附近的整点, 如果难以求出最优整点, 则不用图解法, 改用穷举法. 本题用穷举法比用图解法快捷得多!

当年无数考生用图解法解答本题, 吃尽了苦头!

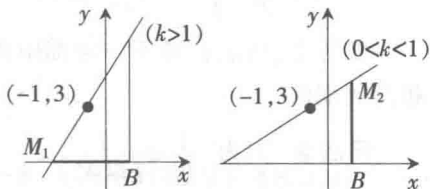
4. 答 $\begin{cases} \frac{3}{k}+2, & k \geq 1, \\ 2k+3, & 0 < k < 1. \end{cases}$

解 直线 $kx - y + k + 3 = 0 (k > 0)$

过定点 $(-1, 3)$, 如图.

按 k 分类:

$$d(B, M)_{\min} = \begin{cases} |M_1 B|, & k \geq 1, \\ |M_2 B|, & 0 < k < 1. \end{cases}$$



5. 解 (分类) $f(x) = (x-4)(x-49) + |(x-4)(x-49)| \Rightarrow f(4) + f(5) + \cdots + f(49) = 0,$

$$\therefore \sum_{i=1}^{50} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) + f(50) = 288 + 188 + 92 + 92 = 660.$$

6. 证明 $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{1}{2} (x=y=\frac{1}{2} \text{ 时取等号})$ ——①

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy} \geq \frac{2}{(\frac{x+y}{2})^2} = 8 (x=y=\frac{1}{2} \text{ 时取等号})$$
 ——②

由①和②, 得 $(x+\frac{1}{x})^2 + (y+\frac{1}{y})^2 = (x^2+y^2) + (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}) + 4 \geq \frac{1}{2} + 8 + 4 = \frac{25}{2}$, 取等号 $\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

评注 取等号条件 $x=y=\frac{1}{2}$ 是求证的线索.

7. 提示 用数学归纳法, 起点后移.

8. 探路 原题用数学归纳法失效! 如果还要用数学归纳法证明, 就得变换命题, 使不等式的右边与 n 有关. 经过猜测, 发现可以改证:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbf{N}, n \geq 2) \quad \text{①}$$

证法 1 先用数学归纳法证明辅助不等式①:

(1) 当 $n=2$ 时, 左边 $= 1 + \frac{1}{2^2} = 1\frac{1}{4}$, 右边 $= 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$, 左边 $<$ 右边, 不等式①成立.

(2) 假设 $n=k (k \geq 2)$ 时, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$ 成立, 则当 $n=k+1$ 时,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} = 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1},$$

即不等式①也成立.

由(1)和(2), 可知不等式①得证.

又因为 $2 - \frac{1}{n} < 2$, 且当 $n=1$ 时原不等式显然成立,