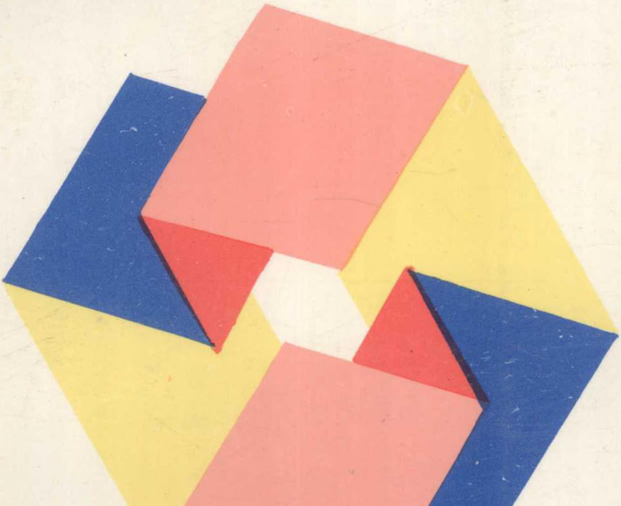
高中数学精讲

平面解析几何



江苏教育出版社

高中数学精讲

平面解析几何

（二年级用）

张乃达　汤希龙　编著

江苏教育出版社

高中数学精讲·平面解析几何

（二年级用）

张乃达　汤希龙　编著

责任编辑　喻　纬

出版发行：江　苏　教　育　出　版　社
（南京中央路 165 号，邮政编码：210009）
经　　销：江　苏　省　新　华　书　店
照　　排：南京理工大学激光照排公司
印　　刷：淮　阴　新　华　印　刷　厂
（淮阴市淮海北路 44 号　邮政编码：223001）

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 7.875　字数 169 800
1996 年 7 月第 2 版　　1996 年 7 月第 1 次印刷
印数 303831—359030 册

ISBN　7—5343—1313—9

G·1165　　　　定价：5.50 元

敬告读者

《高中数学精讲》是江苏教育出版社奉献给全国广大读者的一套高中数学学习辅导读物.《高中数学精讲》的第一批5种自1991年出版之后，很快便受到读者们的喜爱，它们不但被广大高中学生视为“家庭教师”，也被高中数学教师当作案头常备的教学参考书．1994年9月，《高中数学精讲》(5种)被中国书刊发行业协会评选为“全国优秀畅销书”．1996年，《高中数学精讲》又将增加配合综合复习的两个新品种——《专题讲座》和《解题方法》.

这套书的作者中，有特级教师7人：周学祁(通州市教育局教研室)，杨浩清(常州高级中学)，仇炳生(南京师范大学附属中学)，张连昌(金坛市华罗庚中学)，周祥昌(无锡市第一中学)，张乃达(扬州中学)，汤希龙(扬州大学师范学院附属中学)．长期以来一直关心中学数学教育的微分几何专家蒋声教授(扬州大学师范学院)，也应邀编写《解题方法》一书，参加《高中数学精讲》的作者队伍，进一步提高了这套书的品位．这套书不但力图体现一批多年从事高中数学教学的特级教师的教学水平，而且传递了作者们在实现高中数学教学向“素质教育”转变方面的最新探索的成功经验.

这套书中的《代数上册》、《立体几何》、《代数下册》和《平面解析几何》，分别与现行的四册高中数学教材配套编写，系浓缩作者新授课的教学精华而成，可供读者在教学中同步使用．各册内容的安排及章节的划分，与课本基本一致．各小节

的内容讲解部分，不求面面俱到，而着力于剖析教材的重点、难点和关键，例题的解答与分析也力求将“三基”(基础知识、基本技能技巧和基本思想方法)的教学与解题训练融为一体.各册中配备的练习题、习题、复习题，由易到难循序渐进，举一反三以少胜多.《思路方法》、《专题讲座》和《解题方法》，既可供一、二年级时配合新授课教学使用，也可供三年级高考复习时使用.《思路方法》及时介绍与整理了新授课过程中出现的数学思想方法，并进一步作了分类、总结.《专题讲座》根据高考要求，将重点教学内容作了梳理和适度的补充与提高.《解题方法》则侧重于帮助读者将学过的种种解题方法融会贯通，切实掌握快速找到正确解题思路的方法与技巧.

《高中数学精讲》可供高中学生，自学高中数学者，中学数学教师、教研员、高中数学家庭教师，师范院校数学系师生阅读使用.

《高中数学精讲》面世五年而常销不衰，是与不停地采用“滚动式修订”从而保证“常出常新”分不开的.每次重印，作者都及时修订，力求消灭错误.每逢高中数学教学内容或高考要求有所调整，都及时组织作者改写有关内容，以确保《高中数学精讲》丛书始终保持与高中数学教学内容配套.每隔一段时间，都组织作者全面修订，撰写新版书稿，新版书稿在保持原有特色的同时，系统地融入高中数学教学与高考复习中的新鲜经验，并将例题、习题大幅度地更换成新题.我们希望，崭新的《高中数学精讲》(7种)能更加切合全国广大读者的需要.

尽管如此，书中的不足之处仍然在所难免，欢迎读者们提出批评、建议，以便随时作进一步的修订.

江苏教育出版社

1996年10月

目录

第一章 直 线

一 有向线段、定比分点 …… 2
1.1 有向线段、两点的距离 …… 2
1.2 线段的定比分点 …… 6
二 直线的方程 …… 11
1.3 直线的倾斜角和斜率 …… 11
1.4 直线方程的几种形式 …… 12
三 两条直线的位置关系 …… 21
1.5 两条直线的平行与垂直 …… 21
1.6 两条直线所成的角 …… 26
1.7 两条直线的交点 …… 31
1.8 点到直线的距离 …… 37
1.9 直线方程的综合应用 …… 42
复习题一 …… 56

第二章 圆锥曲线

一 曲线和方程 …… 59
2.1 充要条件 …… 59
2.2 曲线和方程 …… 63
2.3 曲线的交点 …… 67

二　圆 …………………………………………………… 72
2.4　圆的方程 …………………………………………… 72
2.5　直线与圆、圆与圆的位置关系 ……………………… 82
2.6　圆系 ………………………………………………… 92
三　椭圆 …………………………………………………… 99
2.7　椭圆及其方程 ……………………………………… 99
2.8　椭圆的第二定义 …………………………………… 106
2.9　参数法在椭圆中的应用 …………………………… 113
四　双曲线 ………………………………………………… 121
2.10　双曲线及其方程 ………………………………… 121
2.11　双曲线的第二定义 ……………………………… 128
2.12　参数法在双曲线中的应用 ……………………… 132
五　抛物线 ………………………………………………… 139
2.13　抛物线及其方程 ………………………………… 139
六　坐标变换(平移) ……………………………………… 150
2.14　坐标轴的平移 …………………………………… 150
2.15　对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线的方程 ……… 155
2.16　二元二次方程的讨论 …………………………… 161
复习题二 ………………………………………………… 164

第三章　参数方程、极坐标

一　参数方程 ……………………………………………… 167
3.1　参数与参数方程 …………………………………… 167
3.2　直线的参数方程 …………………………………… 172
3.3　圆锥曲线的参数方程 ……………………………… 183
3.4　参数法求轨迹 ……………………………………… 190

二　极坐标…………………………………………………… 202
3.5　曲线的极坐标方程 ……………………………………… 202
3.6　圆锥曲线的极坐标方程 …………………………………… 208
3.7　极坐标系的应用 ………………………………………… 213
复习题三…………………………………………………… 222
总复习题…………………………………………………… 223
习题答案与提示…………………………………………… 226

第一章 直　　线

解析几何是用代数的方法来研究几何问题的数学分科.

几何图形(它们的形状、大小和位置关系)是解析几何的研究对象,而代数方法(解析法)则是解析几何中的主要研究方法.因此,形数结合的思想是解析几何的主导思想.

在解析几何中,形和数的联系是通过坐标系来揭示的.坐标系的建立,在形和数之间确定了一种对应关系,从而为使用代数方法解决几何问题(或者用几何方法解决代数问题)奠定了基础.坐标系是研究解析几何的基本工具.

解析几何中,对曲线的研究按如下步骤进行:

第一,根据已知条件,求出表示平面曲线的方程;

第二,通过方程,研究平面曲线的性质.

其中第一步是由形到数;第二步是由数回到形.以上的思想可用框图(图1-1)表示如下:

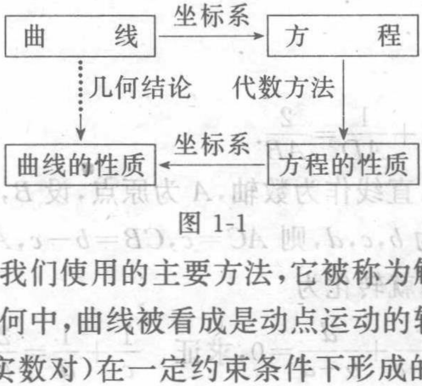


图 1-1

这种方法就是我们使用的主要方法,它被称为**解析法**.

在解析几何中,曲线被看成是动点运动的轨迹,方程则是由坐标(有序实数对)在一定约束条件下形成的一种关系.因

此，运动和变化的思想是解析几何中另一个基本的思想. 正因为如此，解析几何被人们看成为从常量数学到变量数学的飞跃.

解析几何中，运动和变化是通过参数来表达和刻划的，参数方法也是解析几何中的重要方法.

本章中我们将通过对直线的系统研究，初步建立起上述认识，从而形成解析几何学科的总体框架.

一 有向线段、定比分点

1.1 有向线段、两点的距离

1. 数轴——直线坐标系

数轴是规定了原点、正方向和长度单位的直线. 数轴可以看成是最简单的坐标系——直线坐标系. 借助于数轴，可以建立起直线上的点与实数间的对应关系，从而提供了利用代数方法解决几何问题的可能.

例 1 设 A,B,C,D 是一直线上的四点，且满足 $\frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0$.

求证：$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

分析 以直线作为数轴，A 为原点，设 B,C,D 三点对应的坐标分别为 b,c,d，则 $AC=c,CB=b-c,AD=d,DB=b-d$. 于是问题就转化为

"已知 $\frac{c}{b-c}+\frac{d}{b-d}=0$，求证 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{b}$"

这样一个代数问题了.

证明 略.

例 1 中使用的方法就是解析法. 这是一种在坐标系的基础上，利用代数的方法来解决几何问题的解题方法. 如图1-2，是解析法解题的结构框图.

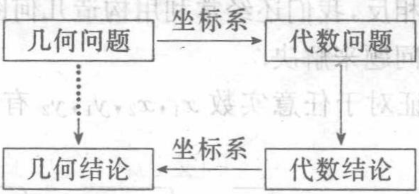


图 1-2

2. 解析法

平面直角坐标系，建立了平面上的点与有序实数对之间的对应关系，从而为利用解析法解决平面上的几何问题创造了条件.

例 2 求证：矩形的对角线相等.

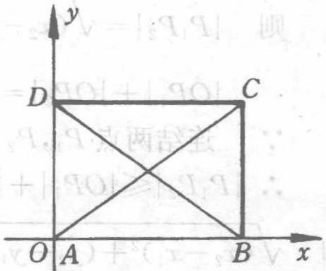


图 1-3

证明 如图 1-3，取矩形 $ABCD$ 的两邻边所在直线为轴，建立直角坐标系.

设 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$D(0,b)$，则 C 为 (a,b).

$\because$ $|AC|=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，

$|BD|=\sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，

$\therefore$ $|AC|=|BD|$.

故矩形的对角线相等.

说明 利用解析法解题的关键在于恰当地选择坐标系.一般说来,选择直角坐标系时,应注意平面图形的几何特征(定点、定直线、垂直、对称等),应尽可能地减少参数(设定的字母)的个数.

3. 构造几何图形法

和解析法相反,我们还经常利用构造几何图形,将代数问题转化为几何问题来解决.

例 3 求证对于任意实数 x_1,x_2,y_1,y_2 有下列不等式成立:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

证明 在平面直角坐标系内,设 P_1,P_2 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,

则 $\quad |P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$,

$\quad |OP_1|+|OP_2|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

$\because$ 连结两点 P_1,P_2 的所有线中,以线段 P_1P_2 最短,

$\therefore$ $|P_1P_2|\leqslant|OP_1|+|OP_2|$.

即 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

这里使用了构造图形解决代数问题的方法,它是构造法的一种.和解析法相反,它的解题结构框图如图 1-4.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{代数问题}} \arrow[r, "\text{构造模型}"] \arrow[d, dotted] & \boxed{\text{几何问题}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{代数结论}} & \boxed{\text{几何结论}} \arrow[l, "\text{反演回去}"']
\end{tikzcd}$$

图 1-4

应用这种方法的关键在于挖掘代数问题的几何意义,构

造出适当的几何模型,使代数问题几何化.

练　习

1. 填空:

(1)在数轴上已知 B 点坐标为 5,$AB=4$,则点 A 的坐标是__________;若 B 点坐标为 -5,$BA=2$,则点 A 的坐标是__________;若点 B 的坐标是 -7,$|BA|=3$,则点 A 的坐标是__________.

(2)等边$\triangle ABC$ 中,已知 $A(1,1)$、$B(3,1)$,则点 C 的坐标是____________________.

2. 选择:

(1)已知数轴上三点 A、B、C 的坐标分别是 4、-2、-6,则有向线段$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{CB}$、$\overline{AB}$中数量最大的是　(　　)

(A)$\overline{BC}$.　(B)$\overline{AC}$.　(C)$\overline{CB}$.　(D)$\overline{AB}$.

(2)以点 $A(1,3)$,$B(-2,8)$,$C(7,5)$为顶点的$\triangle ABC$ 是　(　　)

(A)直角三角形.　(B)锐角三角形.

(C)钝角三角形.　(D)等腰三角形.

3. A,B,C,D 是一条直线上任意四点,不管它们的位置如何,试证明:

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

4. 设 $\alpha\in(0,2\pi)$,$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$B(\cos 2\alpha,\sin 2\alpha)$,求 AB 的长.

5. 用解析法证明:平行四边形的两条对角线的平方和等于各边的平方和.

6. 设 $0<x<1$,$0<y<1$,求证:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant\sqrt{2}.$$

1.2 线段的定比分点

1. 关于定比分点

有关定比分点，要着重理解如下几点：

(1)点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的比，是有向线段 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 的数量的比 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$，而不是它们的长度比 $\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}$.

(2)分点 P 的位置，决定了比值 λ 的正负，我们可以列出下表示明.

<table>
<tr><th>P 点位置</th><th>λ 的取值</th><th>P 点名称</th></tr>
<tr><td>若点 P 在 $\overline{P_1P_2}$ 的两端点之间</td><td>$\lambda>0$</td><td>内分点</td></tr>
<tr><td>若点 P 在 $\overline{P_1P_2}$ 的延长线上</td><td>$\lambda<-1$</td><td rowspan="2">外分点</td></tr>
<tr><td>若点 P 在 $\overline{P_1P_2}$ 的反向延长线上</td><td>$-1<\lambda<0$</td></tr>
</table>

例 1 已知 B 点分 $\overline{AC}$ 的比是 $\dfrac{2}{3}$，求 A 点分 $\overline{BC}$ 的比，C 点分 $\overline{AB}$ 的比.

解 如图 1-5，

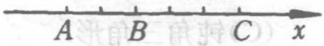


图 1-5

$\because$ B 点分 $\overline{AC}$ 的比是 $\dfrac{2}{3}$，

$\therefore$ 点 B 在线段 AC 上.

不妨设有向线段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的数量分别为 $2k$ 和 $3k(k>0)$.

$$\therefore \quad \frac{BA}{AC}=\frac{-2k}{5k}=-\frac{2}{5},\ \frac{AC}{CB}=\frac{5k}{-3k}=-\frac{5}{3}.$$

故点 A 分 $\overline{BC}$ 的比为 $-\dfrac{2}{5}$，点 C 分 $\overline{AB}$ 的比为 $-\dfrac{5}{3}$.

说明 这里只要画出数轴，问题就迎刃而解了.

2. 关于定比分点公式

分点公式的应用，应特别注意两种可能.

例 2 已知两点 $A(3,-4)$，$B(-9,2)$，在直线 AB 上求一点 P，使得 $|AP|=\frac{1}{3}|AB|$.

解 (1)若 P 在线段 AB 上时，P 为内分点，$\overline{AP}$与$\overline{PB}$同向.

$\because\ |AP|=\frac{1}{3}|AB|$，$\therefore\ |AP|=\frac{1}{2}|PB|$，

$$\therefore\ \lambda=\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ x_P=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{3+\frac{1}{2}\times(-9)}{1+\frac{1}{2}}=-1,$$

$$y_P=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{-4+\frac{1}{2}\times 2}{1+\frac{1}{2}}=-2.$$

(2)若 P 不在线段 AB 上.

$\because\ |AP|=\frac{1}{3}|AB|$，$\therefore\ |AP|<|AB|$.

P 点不可能在 AB 的延长线上，只能在 AB 的反向延长线上，此时 AP 与 AB 的方向相反，所以，$\frac{AP}{AB}=-\frac{1}{3}$. 又因为 $AP=-PA$，所以，$\lambda=\frac{PA}{AB}=\frac{1}{3}$.

$$\therefore\ x_A=\frac{x_P+\frac{1}{3}x_B}{1+\frac{1}{3}}，即\ 3=\frac{x_P+\frac{1}{3}\times(-9)}{1+\frac{1}{3}};$$

$$y_A=\frac{y_P+\frac{1}{3}y_B}{1+\frac{1}{3}}，即-4=\frac{y_P+\frac{1}{3}\times 2}{1+\frac{1}{3}}.$$

解得　$x_P=7, y_P=-6$.

∴　点 P 的坐标为 $(-1,-2)$ 或 $(7,-6)$.

还应当用运动的观点来看待定比分点公式. 当 λ 为某一确定的值时 $(\lambda\neq-1)$，点 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ 表示直线 P_1P_2（其中 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$）上的一个动点. 当 λ 变动时，则 P 点也跟着 λ 的值 $(\lambda\neq-1)$ 的变化而在直线 P_1P_2 上运动，它"跑遍"直线 P_1P_2 上除 P_2 外的所有点. 因此，直线 P_1P_2 上除 P_2 外的任意一点都可以表示为 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ 的形式. 反过来，点的坐标只要具有 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ 的形式，则该点一定在直线 P_1P_2 上（除 P_2 点外）.

例 3　求连结 $A(4,1)$ 和 $B(-2,4)$ 的直线与 x 轴的交点 P 的坐标.

解　设点 P 为 (x,y)，因为点 P 在直线 AB 上，且点 P 显然不是点 B，由分点坐标公式则有

$$x=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{4-2\lambda}{1+\lambda}, \qquad ①$$

$$y=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{1+4\lambda}{1+\lambda}. \qquad ②$$

∵ 点 P 又在 x 轴上，

∴ $y=0$，即 $\dfrac{1+4\lambda}{1+\lambda}=0$，得 $\lambda=-\dfrac{1}{4}$，代入①有 $x=6$.

∴ AB 与 x 轴的交点 P 为 $(6,0)$.

练　习

1. 填空：

(1) 已知点 P 分 AB 的比是 $\dfrac{1}{3}$，则点 P 分 BA 的比为____，

点 A 分 PB 的比为____，点 B 分 AP 的比为____；

(2)若点 $P(x,1)$ 在 $A(2,-4)$，$B(5,11)$ 两点连成的线段上，则 $x=$____；

(3)若连结点 $P_1(2,y)$ 和点 $P_2(x,6)$ 的线段中点是 $(3,2)$，则 $x=$____，$y=$____.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A(0,-2)$，$B(-3,1)$，$C(1,-1)$，求 BC 边上的中线长和 $\angle A$ 的平分线长.

3. 用解析法证明：平行四边形的对角线互相平分.

4. 已知 $P_1(-1,-6)$，$P_2(3,0)$，P 为有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的分点，且 $|P_1P|=\frac{1}{3}|P_1P_2|$，求 P 点坐标.

习　题　一

1. 填空：

(1)A，B 是数轴上两点，点 A 的坐标为 $x_1=-(a+b)$，点 B 的坐标为 $x_2=b-a$，那么 $AB=$________，$BA=$________，$|AB|=$________；

(2)当 $m=$____时，点 $A(-2m+1,m-2)$ 到 y 轴的距离是它到 x 轴距离的 2 倍；

(3)等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(3,0)$，底边 $|BC|=4$，若 BC 的中点是 $D(5,4)$，则它的腰长为________；

(4)若 $\triangle ABC$ 的重心 $G\left(\frac{13}{6},-2\right)$；$AB$ 中点 $D\left(-\frac{5}{4},-1\right)$，$BC$ 中点 $E\left(\frac{11}{4},-4\right)$，则顶点 A、B、C 的坐标是 A________，B____________，C________；

(5)已知 $A(-1,4)$，$B(3,2)$，H 是有向线段 AB 所在直线上一点，$\frac{|AH|}{|HB|}=4$，则点 H 的坐标为____________.