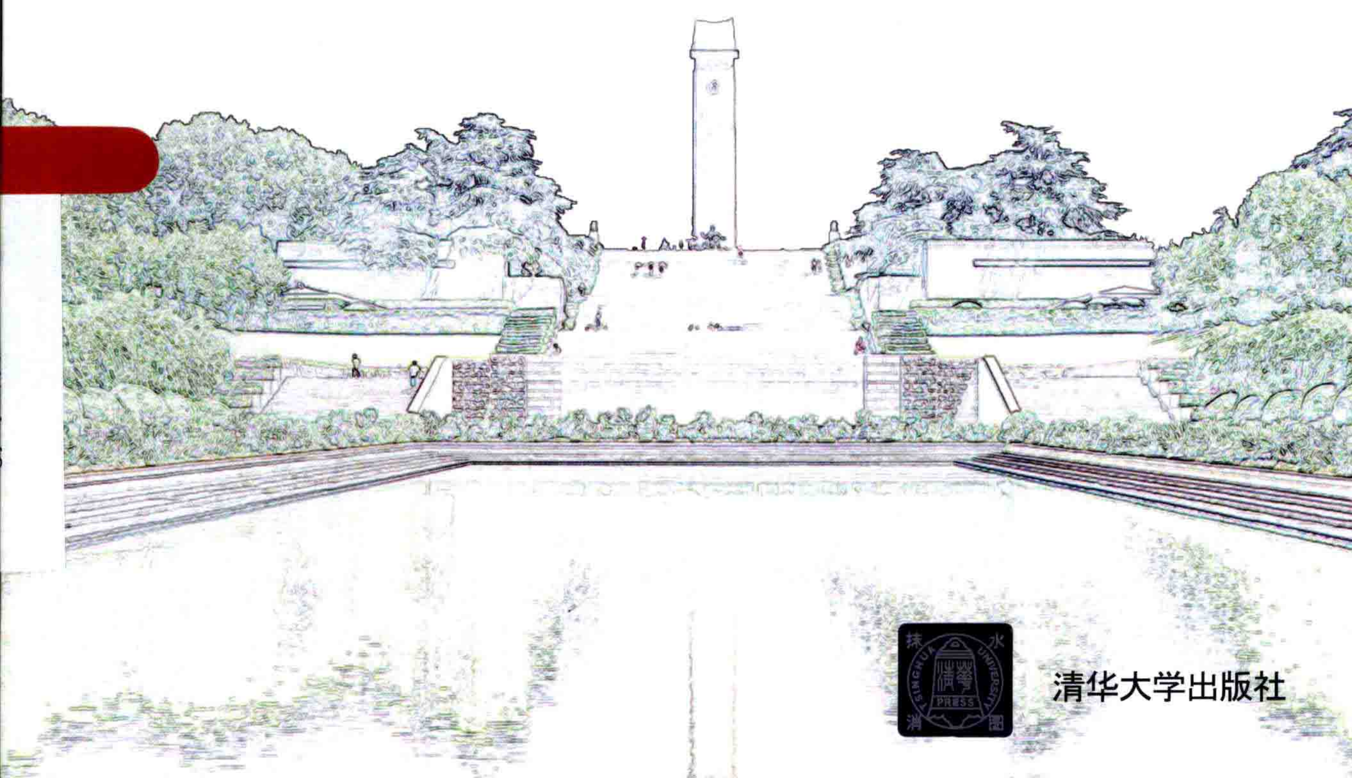
全国普通高校
电子信息与
电气学科
基础规划教材

电磁场与电磁波
学习指导与习题详解

郭业才 主编 林继成 蔡庆春 副主编



清华大学出版社

全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材

电磁场与电磁波

学习指导与习题详解

郭业才 主编 林继成 蔡庆春 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材《电磁场与电磁波》一书的配套参考书。全书共9章，每章包括学习要求、内容提要、重点难点分析、典型例题与习题解答5个部分。编者力求通过对《电磁场与电磁波》一书知识点的梳理归纳，使读者对书中的基本概念与公式理解更为准确透彻。而例题讲解这部分内容的设置，可提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书可供高等院校电气电子信息类专业的教师和学生使用，作为《电磁场与电磁波》课程的教学参考书和学习指导书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波学习指导与习题详解/郭业才主编. —北京：清华大学出版社，2015
全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材
ISBN 978-7-302-39748-9

Ⅰ. ①电…　Ⅱ. ①郭…　Ⅲ. ①电磁场—高等学校—教学参考资料 ②电磁波—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第071347号

责任编辑：梁　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：梁　毅
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市中晟雅豪印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：14　　**字　　数**：350千字
版　　次：2015年9月第1版　　**印　　次**：2015年9月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：29.00元

产品编号：062655-01

前言

本书是高等院校工科电气电子信息类专业“电磁场与电磁波”课程的辅助教材或教学参考书，并与林继成教授主编、郭业才教授主审、清华大学出版社出版的“全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材”《电磁场与电磁波》相配套。编写本书的目的是让学生在学习该课程时，能够及时了解学习要求，抓住要点、突破难点，通过内容提要、典型例题及习题解答，帮助学生加深对教学内容的理解，提高分析问题和解决问题的能力。

本书结构与教材相对应，每章的内容提要简练、重点突出；例题选题典型，与教学重点难点紧密结合；解题思路清晰，强调教学和物理概念的结合。每章的内容安排为：首先，给出本章学习要求，让学生了解教学内容和目标；其次，精炼本章的主要内容，便于学生课后总结与复习；其次，对本章的重点与难点内容进行剖析，便于学生抓住重点，突破难点；再次，通过典型例题分析与解答，让学生掌握分析与解决问题的基本思路与基本方法；最后，给出习题详解，让学生举一反三，以进一步提高学生分析与解决问题的能力。

本书由郭业才教授担任主编，并负责全书的统稿工作。参加本书编写工作的有：郭业才（南京信息工程大学，第2章，第4章的第4.1～4.4节，第7章的第7.1～7.3节及第8章）、林继成（南京晓庄学院，第1章）、赵超先（第6章）、唐斌（西南石油大学，第5章）、张永刚（安徽理工大学，第9章）、张闯（南京信息工程大学，第7章的第7.4～7.5节）、蔡庆春（沈阳化工大学，第3章）、陈春霞和马业万（安庆师范学院，第4章的第4.5节）。

本书的出版得到了“十二五”江苏省高等学校电子信息类重点专业（No.164）建设项目、南京信息工程大学精品资源共享课程《电磁场与电磁波》建设项目、江苏高校品牌专业建设工程一期项目（PPZY2015B134）的支持，同时，许多同仁对清华大学出版社给予了大力支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

由于作者水平有限，不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2015年6月

目 录

第1章 矢量分析

1.1 学习要求

理解标量和矢量的概念，掌握矢量的加减、点乘和叉乘运算以及微分积分运算。掌握在直角坐标系、圆柱面坐标系和球面坐标系中矢量的表示和运算方法。

理解场、等值面与流线的概念，了解如何用等值面族直观地描述一个标量场和如何用流线族直观地描述一个矢量场。

理解标量场的方向导数和梯度的概念，掌握在直角坐标系、圆柱面坐标系和球面坐标系中标量场梯度的表示以及计算方法。

理解矢量场的通量和散度的概念，掌握散度的定义，了解散度的物理意义。掌握在直角坐标系、圆柱面坐标系和球面坐标系中散度的表示以及计算方法。

理解矢量场的环量和旋度的概念，掌握旋度的定义，了解旋度的物理意义。掌握在直角坐标系、圆柱面坐标系和球面坐标系中矢量场旋度的表示以及计算方法。

掌握哈密顿算符在直角坐标系、圆柱面坐标系和球面坐标系中的表示及其运算规则。

理解散度定理和斯托克斯定理，掌握它们的应用。理解亥姆霍兹定理的物理意义。

1.2 内容提要

1.2.1 标量、矢量与场的概念

标量：在一定的单位制下，用一个实数就足以表示的物理量。

矢量：在一定的单位制下，除了要指明其大小还要指明其方向的物理量，或者说需要3个独立实数来表示的物理量。

场：一种物理量在空间区域内的连续分布。标量在空间区域内的连续分布形成标量场；矢量在空间区域内的连续分布形成矢量场；可分别用一个标量函数或矢量函数来描写。

等值面：在定义了标量场 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 的区域 τ 内，方程 $\varphi(\boldsymbol{r})=c$（常数）对应于一个曲面，在这个曲面上的每一点有相同的标量值，称为标量场的等值面。

流线：在定义了矢量场的空间 τ 内，如果某一条曲线上的每一点对应的矢量的方向都与曲线在该点的切线重合，则称该有向曲线为矢量场中的一条流线。

1.2.2 矢量的坐标分量表示

1. 在直角坐标系中

任意矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{e}_x + F_y\boldsymbol{e}_y + F_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1}$$

矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 是沿坐标轴正向的单位矢量，称为基本单位矢量，且满足关系

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x,\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y \tag{1.3}$$

2. 在圆柱面坐标系中

任意矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\boldsymbol{F}=F_\rho\boldsymbol{e}_\rho+F_\phi\boldsymbol{e}_\phi+F_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.4}$$

矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z \tag{1.5}$$

式中，$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$ 是基本单位矢量，且满足关系

$$\boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_\rho,\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.6}$$

需要注意的是，3 个基本单位矢量中只有 $\boldsymbol{e}_z$ 是常矢量。

3. 在球面坐标系中

任意矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\boldsymbol{F}=F_r\boldsymbol{e}_r+F_\theta\boldsymbol{e}_\theta+F_\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.7}$$

矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \tag{1.8}$$

式中，$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi$ 是基本单位矢量，且满足关系

$$\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\phi,\quad \boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.9}$$

需要注意的是，3 个基本单位矢量都不是常矢量。

4. 3 种坐标系坐标变量及基矢间的关系

直角坐标系与圆柱面坐标系

$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad z=z,\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{e}_x=\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho-\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi,\quad \boldsymbol{e}_y=\sin\phi\boldsymbol{e}_\rho+\cos\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{e}_\rho=\cos\phi\boldsymbol{e}_x+\sin\phi\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{e}_\phi=-\sin\phi\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\boldsymbol{e}_y \tag{1.12}$$

直角坐标系与球面坐标系

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta \tag{1.13}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \phi=\arctan\frac{y}{x},\quad \theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x&=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta-\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi\\
\boldsymbol{e}_y&=\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\phi\boldsymbol{e}_\phi\\
\boldsymbol{e}_z&=\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r&=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y+\cos\theta\boldsymbol{e}_z\\
\boldsymbol{e}_\theta&=\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x+\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y-\sin\theta\boldsymbol{e}_z\\
\boldsymbol{e}_\phi&=-\sin\phi\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\boldsymbol{e}_y
\end{aligned} \tag{1.16}$$

1.2.3 哈密顿算符和拉普拉斯算符

哈密顿算符是一个矢量微分算符，记作∇，读作 del。拉普拉斯算符定义为$\nabla\cdot\nabla$，记作∇^2，读作 laplacian。在常用坐标系中哈密顿算符和拉普拉斯算符表示如下：

直角坐标系

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.17}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.18}$$

圆柱面坐标系

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.19}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.20}$$

球面坐标系

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{1.21}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{1.22}$$

1.2.4　矢量场的通量和环量

矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 在面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 上的通量定义为

$$\mathrm{d}\Phi_A = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.23}$$

式中，面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的大小为面元的面积；方向与面元垂直且规定：对于开曲面上的面元矢量，其指向与面元边界线的绕行方向成右手螺旋关系；对于闭合面上的面元矢量，指向闭合面外侧。

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中任取一有向闭合曲线 L 上的环量定义为

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.24}$$

式(1.24)称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在有向闭合曲线 L 上的环量。

1.2.5　矢量场的散度和旋度

1. 散度的定义

在矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 中任意一点 $\boldsymbol{r}$，取包围了该点的任一闭合面 S，以闭合面 S 为边界面的体积为 τ。若令 τ 趋于 0 时下面的极限存在，则称此极限值为矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点处的散度，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\tau} \tag{1.25}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度也可用哈密顿算符表示为 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\boldsymbol{A} \tag{1.26}$$

2. 散度的坐标表示

直角坐标系

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.27}$$

圆柱面坐标系

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\tag{1.28}$$

球面坐标系

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\tag{1.29}$$

3. **旋度的定义**

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中任意一点 $\boldsymbol{r}$ 的旋度是一个矢量，其模定义为该点处环量面密度的最大值，其方向就是该点处最大环量面密度的方向，记作 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\Gamma_{\max}\boldsymbol{e}_n,\quad \Gamma_{\max}=\left[\lim_{\substack{\boldsymbol{e}_n\text{不变}\\ \Delta S\to 0}}\frac{\oint_L\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}\right]_{\max}\tag{1.30}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度也可用哈密顿算符表示为 $\nabla\times\boldsymbol{A}$，即

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\tag{1.31}$$

4. **旋度的坐标表示**

直角坐标系

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\tag{1.32}$$

圆柱面坐标系

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_\rho\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial z}\right]+\boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z\end{vmatrix}\tag{1.33}$$

球面坐标系

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(r\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\phi}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(r\sin\theta A_\phi)}{\partial r}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}\tag{1.34}$$

1.2.6 散度定理与斯托克斯定理

1. **散度定理**

在任意一个闭合面 S 上矢量场的通量，等于在 S 所包围的空间区域 τ 内矢量场散度的

积分。即

$$\oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}\tau \tag{1.35}$$

2. **斯托克斯定理**

在任意一个有向闭合曲线 L 上矢量场的环量，等于以 L 为边界线的曲面 S 上矢量场旋度的通量。即

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.36}$$

这里，有向闭合曲线 L 的绕行方向与曲面 S 所在的侧满足右手螺旋关系。

1.2.7　标量场的梯度

1. **梯度的定义**

在连续可微的标量场 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 中的每一点可以定义这样一个矢量：其模等于该点处的标量场最大方向导数；其方向就是该点处具有最大方向导数的方向，记作 $\mathrm{grad}\varphi$，并称之为在标量场的梯度。

标量场在任意一点沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的方向导数，可用梯度表示为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{e}_l \tag{1.37}$$

标量场 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 的梯度也可用哈密顿算符表示为 $\nabla\varphi$，即

$$\nabla \varphi = \mathrm{grad}\varphi \tag{1.38}$$

2. **梯度的坐标表示**

直角坐标系

$$\nabla \varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{1.39}$$

圆柱面坐标系

$$\nabla \varphi = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{1.40}$$

球面坐标系

$$\nabla \varphi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r\sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \tag{1.41}$$

1.2.8　场的若干性质

1. **旋度场的散度为零**

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{1.42}$$

2. **梯度场的旋度为零**

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \tag{1.43}$$

3. **无旋场可用其位函数的梯度表示**

若 $\boldsymbol{A}$ 是定义在一个单连通区域上的无旋场，则必存在标量函数 φ，使得

$$\boldsymbol{A} = \nabla \varphi \tag{1.44}$$

式中，φ 是矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的位函数，可由下面的线积分确定：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_{r_0}^{r} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.45}$$

式中，r_0 是位函数的参考点。

4. 无散场可用其矢量位函数的旋度表示

若矢量场 $\boldsymbol{B}$ 是无散场，而矢量场 $\boldsymbol{A}$ 是一个有旋场，则

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.46}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的矢量位函数。注意：无散场 $\boldsymbol{B}$ 的矢量位 $\boldsymbol{A}$ 不是唯一的，可以相差一个任意的梯度场。

5. 有散且有旋场可通过其标量位和矢量位确定

若矢量场 $\boldsymbol{B}$ 是一个有散有旋场的场，则总可以将其表示为一个标量场的负梯度与一个矢量场旋度的叠加，即

$$\boldsymbol{B} = -\nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.47}$$

式中，φ 是矢量场 $\boldsymbol{B}$ 的标量位函数；$\boldsymbol{A}$ 是矢量场 $\boldsymbol{B}$ 的矢量位函数。

1.2.9 亥姆霍兹定理

定理：定义在有限区域 τ 内的任一矢量场，由其散度、旋度和边界条件唯一地确定。

注意：这里的边界条件是指在包围区域 τ 的表面上场量和场量偏导数的取值。

1.3 重点难点分析

1.3.1 3 种常用坐标系基矢

直角坐标系的 3 个基矢 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 均为常矢量；圆柱面坐标系的基矢中 $\boldsymbol{e}_z$ 是常矢量，而 $\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 的方向会因坐标 ϕ 的不同而不同，即是坐标 ϕ 函数：$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\rho(\phi), \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_\phi(\phi)$；球面坐标系中的基矢 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 是坐标 θ 和 ϕ 的函数，即 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta,\phi), \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta(\theta,\phi)$，而 $\boldsymbol{e}_\phi$ 是坐标 ϕ 的函数：$\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_\phi(\phi)$。因此，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e}_x = \nabla \cdot \boldsymbol{e}_y = \nabla \cdot \boldsymbol{e}_z = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{e}_x = \nabla \times \boldsymbol{e}_y = \nabla \times \boldsymbol{e}_z = 0$$

而对于圆柱面坐标系的基矢，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}\phi} = \boldsymbol{e}_\phi, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\phi}{\mathrm{d}\phi} = -\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e}_\rho = \frac{1}{\rho}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_\phi = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_\rho = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{e}_\rho = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{e}_\phi = \frac{\boldsymbol{e}_z}{\rho}, \quad \nabla \times \boldsymbol{e}_z = 0$$

对于球面坐标系的基矢，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \phi} = \sin\theta \boldsymbol{e}_\phi, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta \boldsymbol{e}_\phi, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\phi}{\partial \phi} = -\sin\theta \boldsymbol{e}_r - \cos\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e}_r = \frac{2}{r}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\cot\theta}{r}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_\phi = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{e}_r = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}, \quad \nabla \times \boldsymbol{e}_\phi = \frac{\cot\theta \boldsymbol{e}_r}{r} + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}$$

1.3.2 散度、旋度的定义与奇点

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中任意一点 $\boldsymbol{r}$ 的散度定义为下面的极限

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\tau}$$

式中，S 是包围着 $\boldsymbol{r}$ 点的曲面；τ 是 S 所包围的体积。若上式右边的极限值存在，则 $\boldsymbol{r}$ 点存在散度定义，且散度等于此极限值并可用哈密顿算符表示为 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$。反之，若 $\boldsymbol{r}$ 点为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的奇点时上述极限不存在，即矢量场的奇点不存在散度定义。通常说散度反映了矢量场中各点处发散源的强度，散度不为零的点必存在发散源，存在发散源的点散度必不为零。需要注意的是，在这种表述中是排除了奇点的，奇点的情况是无法在散度中反映出来的。例如，对于矢量场 $\boldsymbol{A}=\frac{k}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，当 $r\neq 0$ 时，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，而 $r=0$ 是场的奇点，该点无散度定义。为了确定 $r=0$ 点是否存在发散源，以该点为中心作半径为 r 的球面 S，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在此球面 S 上的通量当 r 趋于零时是一个非零的常量

$$\lim_{r\to 0}\oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\lim_{r\to 0}\left(\frac{k}{r^2}\cdot 4\pi r^2\right)=4\pi k$$

这表明：在 $r=0$ 点处，一定存在着发散源。注意到在 r 趋于零的过程中 $\boldsymbol{A}$ 在 S 上的通量始终是一个与 r 无关的常量，这表明存在于 $r=0$ 点处的源是一个点状的发散源。点源是一种理想模型，如点电荷模型。在现实世界中任何源都具有一定的体积，不存在真正的点源。

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点的环量面密度会因有向闭合回路的空间取向而异，$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点的旋度的模定义为该点处最大环量面密度的值，即

$$\Gamma_{\max}=\left[\lim_{\substack{\boldsymbol{e}_n\text{不变}\\ \Delta S\to 0}}\frac{\oint_L \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}\right]_{\max}$$

当 $\boldsymbol{r}$ 点为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的奇点时，上述极限不存在。即奇点不存在环量面密度的定义，因而也就不存在的旋度定义。旋度反映了矢量场中各点处涡旋源的强度，旋度不为零的点必存在涡旋源。而在无旋度定义的奇点处是否存在涡旋源，则需通过计算围绕该点的闭合路径上矢量场的环量进行判断。

1.3.3 关于位函数

任何一个连续可微标量场 φ 均伴随着一个矢量场 $\boldsymbol{A}=\operatorname{div}\varphi$，称 $\boldsymbol{A}$ 为标量场 φ 的梯度场；而称 φ 为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的位函数也称为势函数。

不是任何一个连续可微矢量场都存在位函数的定义，矢量场存在位函数的条件是：场量的线积分与路径无关且仅由起点和终点位置决定。另一种等价的表述为：场量沿任意闭合路径的积分为零。具有这个特性的场称为保守场，有时也称为有势场，即只有保守场才存在位函数的定义。

在矢量场域 τ 内的每一点，场量的旋度均为零的场称为无旋场。保守场必为无旋场，反之，无旋场却不一定是保守场，只有定义在单连通域内的无旋场才是保守场，才存在位函数的定义。在教材中已经约定，凡提到无旋场均指定义在单连通域的矢量场。在此约定下，无

旋场必存在位函数场量必可表示为其位函数的梯度。

沿若矢量场 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$ 存在位函数 $\varphi(x,y,z)$，则有 $\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，即

$$\mathrm{d}\varphi = A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z$$

因此，求矢量场的位函数问题，本质上就是求微分形式 $A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$ 的原函数问题。

1.3.4 亥姆霍兹定理的本质

任何矢量场总是由某个或某些源激发的，亥姆霍兹定理断定只可能存在两种源，即散度源和旋度源。它们与所激发的矢量场之间的关系可分别表示为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{A} = f(\boldsymbol{r}) \quad 和 \quad \nabla\times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$$

反之，在无界空间中只要确定了这两种源，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 也就唯一地确定了；在有界空间中只要确定了这两种源和边界条件，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 也就唯一地确定了。因此，上述散度方程和旋度方程组成了矢量场的基本方程，求解矢量场问题归结为解这组微分方程的问题。

1.4 典型例题

【例 1.1】 计算圆柱面坐标系基矢 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\phi$ 的积分 $\int_0^\pi \boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\phi$ 和 $\int_0^\pi \boldsymbol{e}_\phi\mathrm{d}\phi$。

分析：在常用的 3 种坐标系中只有直角坐标系所有基矢均为常矢量，而其他坐标系的基矢则不是或不完全是常矢量，因此在做积分时必须注意到基矢是否为积分变量的函数。因为 $\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 均不是常矢量而是坐标 ϕ 的函数，在 $\int_0^\pi \boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\phi$ 和 $\int_0^\pi \boldsymbol{e}_\phi\mathrm{d}\phi$ 积分时不能提到积分号外面，但可以先将它们表示成直角坐标系分量形式，然后进行计算。

解：因为圆柱面坐标系基矢与直角坐标系基矢有如下的关系

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y$$

所以

$$\int_0^\pi \boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\phi = \int_0^\pi(\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}\phi = \boldsymbol{e}_x\int_0^\pi\cos\phi\mathrm{d}\phi + \boldsymbol{e}_y\int_0^\pi\sin\phi\mathrm{d}\phi = 2\boldsymbol{e}_y$$

$$\int_0^\pi \boldsymbol{e}_\phi\mathrm{d}\phi = \int_0^\pi(-\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}\phi = -\boldsymbol{e}_x\int_0^\pi\sin\phi\mathrm{d}\phi + \boldsymbol{e}_y\int_0^\pi\cos\phi\mathrm{d}\phi = -2\boldsymbol{e}_x$$

【例 1.2】 试导出球面坐标系和圆柱面坐标系中的流线微分方程组。

分析：在定义了矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的空间中，如果某一条曲线上的每一点对应的矢量的方向都与曲线在该点的切线重合，则称该有向曲线为矢量场中的一条流线，用流线族图可以形象而直观地表示出一个矢量场中矢量的分布情况。各点处矢量的方向与流线在该点的切线重合，而矢量模的大小则由流线的疏密体现：模较大的区域流线较为密集，模较小的区域流线较为稀疏。

在矢量场中过 $\boldsymbol{r}$ 点的流线上的线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与该点处的切线方向重合，因此 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与该点处的矢量 $\boldsymbol{A}$ 平行，因此有 $\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$。将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 用某个坐标系中的分量表示，即可得到在该坐标系中流线的微分方程组。

解：流线微分方程的矢量形式为 $\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$

在球面坐标系中