小学教师胜任力培训丛书

How to Teach Children to Learn Mathematics

小学数学这样教

郜舒竹◎著

华东师范大学出版社

小学教师胜任力培训丛书

How to Teach Children to Learn Mathematics

小学数学这样教

郜舒竹◎著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学数学这样教/郜舒竹著.—上海:华东师范大学出版社,2015.7
ISBN 978-7-5675-3854-2

Ⅰ.①小… Ⅱ.①郜… Ⅲ.①小学数学课—教学研究 Ⅳ.①G623.502

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第161170号

小学数学这样教

著　　者　郜舒竹
项目编辑　蒋　将
特约审读　杨晓梅
责任校对　邱红穗
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　昆山市亭林彩印厂有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　11.75
字　　数　242千字
版　　次　2015年9月第1版
印　　次　2015年9月第1次
书　　号　ISBN 978-7-5675-3854-2/G·8469
定　　价　25.00元

出 版 人　王　焰

前言

小学数学“怎样教”其实是一个很难回答的问题，与之相关的一个基本问题是如何理解“数学教学”。关于数学教学至少可以给出三种理解方式：第一种是把数学教学理解为“教学生数学知识”，教学目标指向的是掌握知识和方法；第二种是把数学教学理解为“教学生学习数学”，其目标指向是对数学学习过程的经历和体验；第三种理解是“利用数学教学生”，把数学课程内容作为载体，注重的是学生作为人的全面发展。本书内容并不纠结这些观点的是与非，试图从数学课程内容的理解、学生数学学习的规律以及数学教学方法的有效三个方面，为小学数学教师的培训以及教学研究提供参考。

关于数学课程内容的理解，力图从数学、历史和人类活动三个方面揭示本质、渗透文化、实现关联，实现其工具性与人文性相统一的理解。全书涉及的课程内容不求全面，主要针对小学数学教学中普遍困惑的问题和误解给出作者的研究和解释。

关于学生的学习规律，书中结合实际的案例分析，给出了辨别数学错误的标准和方法，揭示了一些具有普遍性的学习规律，同时也涉及了将学生数学错误作为教学资源的方法。特别强调学生在学习数学的过程中，出现错误的必然性、规律性、价值性，提出教师教学中应当“宽容错误、善待错误、研究错误、利用错误”的观点。

在数学教学方法方面，本书提出了“变教为学”的教学方式，倡导将“以教师教的活动为主的课堂教学”转变为“以学生学习活动为主的课堂教学”，教师的角色从讲解者和示范者转变为导学者、诊学者、助学者。本书中也用实例阐述了实现“变教为学”教学改革的策略和方法。

全书内容与行文遵循“立足本土”与“实事求是”的原则，所有案例均源于作者近十年深入小学数学教学实践的亲身经历。在问题的研究中，参考了大量古今中外的文献，所有参考文献均以脚注的形式注明。这些文献也可以成为读者进一步研究的参考。

数学教学的复杂性使得本书不可能涵盖所有方面，难免存在疏漏、不当甚至错误之处，希望读者予以指正。

郜舒竹

2015 年 5 月 1 日

于北京

目录

第一章　数学课程内容的知识属性

第一节　知识属性与正误辨别

小学低年级学生在解决问题时常常出现一种“欲加却减，欲减又加”的现象。比如，例题 1 - 1 表达的是一道看图列式的问题：

例题 1 - 1

□○□=□

这一问题的原意是已知总量为 7，其中一个部分量为 3，求另一个部分量是多少。期望学生用减法计算，列式为：“7－3＝4”，而学生往往列出的算式为：“4＋3＝7”，把减法算式写成了加法算式。

再看一道文字题(例题 1 - 2)：

例题 1 - 2

湖面上有一些天鹅，飞走了 5 只，还剩 8 只，问湖面上原来有多少只天鹅?

本题的意思是知道了“飞走”和“还剩”这两个部分量，求总量是多少。期望学生用加法“5 ＋ 8 ＝ 13”计算，可许多学生又偏偏列出减法算式“13 － 5 ＝ 8”。当问及学生本题答案时，他们往往能够说出正确答案。

这种“欲减却加，欲加又减”的现象在小学低年级学生中普遍存在，究竟是什么原因导致这种现象的发生呢？这个现象的背后一定隐藏着儿童的某种认知规律。另外，许多教师在判断学生这样做的正误时也出现困惑，当学生这样列式计算时，到底应当判错还是判对呢？辨别对错的标准究竟应当是什么？

一、儿童的认识规律

学生的认知过程大致可以概括为三个阶段：第一是感知，就是利用诸如眼睛、耳朵等感觉器官获取信息；第二是对感知到的信息进行加工，这一阶段是在头脑中进行的；第三是作为感知和加工结果的输出，通常表现为书面或口头语言的表达。输出既然是感知和加工的结果，那么其中出现的问题一定与感知和加工这两个阶段有关。

例题 1-1 和例题 1-2 有一个共同特点，就是学生写出来的算式中数的顺序与题目中阅读到信息的顺序是一致的。在第一个问题中，学生感知到的信息首先是“空篮子”，第二是“3”，第三是“7”，它们之间的关系是前二者的和等于第三者。也就是说，通过感知，学生在头脑中形成的问题结构是“$\square+3=7$”。由于数字相对简单，学生可以轻易算出“$\square$”中是“4”，因此头脑中就不再进行其他加工活动了，按照这个顺序直接就写出算式“$4+3=7$”。第二个问题也是类似：学生按照阅读顺序感知到信息的顺序是“原有、飞走、还剩”，它们之间的关系是第一个减去第二个等于第三个，相应的问题结构是“原有 − 飞走 = 还剩”，也就是“$\square-5=8$”，按照这种顺序直接列出算式就是“$13-5=8$”。

人的阅读顺序通常是“从左向右，从上向下”，因此输入到头脑中的信息也是有顺序的。这些信息和相应的顺序就在头脑中形成了一个自然的结构。头脑对信息的加工是一个复杂的过程，其中一个重要内容就是根据需要对这样的结构进行调整。对于低龄儿童来说，头脑加工能力相对较弱，因此感知到的这种自然结构就会对输出产生更大的影响。根据这样的分析，前面案例中学生所列算式也就不足为奇了。

我们把学生感知到的“$\square+3=7$”和“$\square-5=8$”叫做问题的自然结构，教师所期望的“$7-3=\square$”和“$5+8=\square$”叫做问题的加工结构。可以得到的一点启示就是，在解决问题的教学中应当注意两种结构转换的启发和引导。而能够做到这一点的前提是，教师不仅要了解问题的加工结构，更应当了解学生可能感知到的自然结构。

二、是“对”还是“错”

明白了学生这样做的道理，还需要分析这样做到底对不对。对此存在不同见解，认为“对”的主要理由是：“这样列式的学生通常都能说出问题的正确答案，说明学生是明白这道题的数量关系，并且能够正确计算的”；认为“错”的主要理由是：“学生没有分清题目中的已知和未知，应当把已知数写在等号左侧，把计算结果写在等号右侧。”

事实上，一个问题中的“已知数”和“未知数”虽然是不同的，但在思考的过程中往往需要把二者统一起来。比如在学习“方程”的时候，就是用字母代替未知数，把它看成和已知数同样的数参与到运算之中。如果利用方程的知识解决前面两个问题，就是用字母 x 表示未知数，根据题目叙述的顺序列出方程“$x+3=7$”和“$x-5=8$”。这实质上与学生所列算式是一样的。另外，这种已知与未知的统一关系还经常体现于数学结论的推广方面。比如用任何具体的已知数都无法表示一般意义的长方形面积公式，一旦将具体的已知数用“未知”的字母来代替，更具普遍性的长方形面积公式

“$S=a\times b$”就出现了。因此从更广泛的意义上说，研究一个问题的着力点应当放在数量关系方面，这样的数量关系可以有不同的表达方式，无论什么样的表达方式，“已知”和“未知”往往处于同等地位，放在什么位置上并不是最重要的事情。例题1-1和例题1-2中学生的列式实际上已经表达出了问题的数量关系，所以应当认为是正确的。

至于“已知数应当写在等号左侧，计算结果应当写在等号右侧”，实际上是对等号的一种误解。为了说明这一点，先来介绍数学中的“等价关系”。所谓等价关系，可以说是一种很“亲密”的关系。不妨用熟知的“亲兄弟”关系来理解。凡亲兄弟关系一定会符合下面的条件：如果甲和乙是亲兄弟，那么乙和甲也一定是亲兄弟；另外，如果甲和乙是亲兄弟，同时乙和丙也是亲兄弟，那么甲和丙也一定是亲兄弟。稍微“疏远”一些的“朋友”关系就不符合后面的条件。

等号在数学中表示与亲兄弟类似的“亲密”关系，用符号可以表示成下面三个条件：

1. 自身性，即：$A=A$；
2. 交换性，即：如果 $A=B$，那么一定有 $B=A$；
3. 传递性，即：如果 $A=B$，$B=C$，那么一定有 $A=C$。

在数学中，凡符合上述三个条件的关系就叫做等价关系，“相等关系”自然也是一种等价关系。其中的交换性表明等号两侧是可以互换位置的，因此所谓的“已知数应当写在等号左侧，计算结果应当写在等号右侧”的说法是不成立的，至多可以认为是约定俗成的一种习惯。从这个意义上说，也应当承认前面例题中学生的做法是正确的。

三、辨别正、误的标准

课程改革倡导学生的学习应当是自主探索的过程，当学生探索的积极性和主动性充分调动起来的时候，自然会出现各种各样的探索结果，这个时候就给教师带来了一个挑战：如何辨别学生探索结果的对错？

《现代汉语词典》对“错误”的解释为：“不正确；与客观实际不符合。”如果以此作为辨别错误的标准，就需要进一步理解数学中“客观实际”的含义。小学生学习的数学内容依据其作用可以分为三类，分别叫做规律性知识、规则性知识和规定性知识。

所谓规律性知识，是对数学中某种客观规律的描述。比如加法交换律($a+b=b+a$)，它描述的是两种“加”的过程间的内在联系，是加法运算的自然规律。只要有加法的存在，这种规律就随之存在，不以人的意志为转移。再如，“平面上三角形内角和等于180度”，反映的是平面上三角形三个内角之间的内在联系，是平面上三角形的自然属性，只要是平面上的三角形都具有这种属性。

规则性知识是依据数学自身逻辑发展的需要人为规定的内容。比如在除法运算中要求“除数不能为零”；在有余数除法中规定“余数要比除数小”；在对自然数进行分类时规定“1既不是质数也不是合数”等等。诸如此类的要求并不是对某种客观规律

的描述，而是为了保证数学运算或逻辑推理的确定性所制定的规则。这种规则性的内容是人为的，是为了数学自身逻辑发展的需要。

规定性知识是依据人的某种需要或者习惯人为规定、约定俗成的内容。比如计算方法中的竖式，在没有电子计算机(器)的时代，为了减轻计算的思维负担，需要借助纸笔作为计算的工具。在此基础上，人们发明了多种多样的计算方法，经过长时间的使用与对比，把为多数人所接受的算法承传下来，作为后人学习的标准算法。虽然这些标准算法是依据数学中的规律形成的，但其更主要的特征是人为规定，目的在于简便。

```
246)1 6 0.8 8 4(.654
    1 4 7 6
   ----------
      1 3 2 8
      1 2 3 0
     ----------
        9 8 4
        9 8 4
       -------
```

图 1－1　除法竖式示意图

比如，除法竖式起初就不是现在的样子，而是把商写在被除数的右侧(见图 1－1)。

再如，概念的命名，把具有相同属性的一类对象冠以名称，这种名称也是人为规定的内容。命名的依据是使得词义尽可能反映概念的内涵和外延。比如“质数”这一概念，最初的命名叫做“数根”，后来演变为质数或者素数。前面所说的“已知数应当写在等号左侧，计算结果应当写在等号右侧”，仅仅是一种符合人们习惯的说法而已。

诸如此类的规定性知识还有：圆周角规定为“360 度”；圆周率规定用符号“π”表示；在平面上确定位置时规定“横为行，竖为列”；在地图中确定方向时规定“上北下南，左西右东”；在四则混合运算时规定“先乘除，后加减”等等。

上述三类知识依据其主、客定位可以分别概括其特征为：规律性知识具有较强的客观性；规则性知识可以视为是主、客观兼容的一类知识，简单说就是规则是为了适应某种规律而制定的；规定性知识具有明显的主观特征，是为了人的某种需要而作出的规定，具有可变性和多样性。将辨别学生错误的标准局限于人的主观方面，显然是不恰当的。应当把这个标准定位于数学中的“客观实际”，也就是前面所说的“规律性”。

前面案例中呈现的客观规律是“局部与整体”的数量关系，而如何表达这种数量关系就带有明显的主观性了，属于规定性知识。学生的列式应当说并没有违背客观的数量关系，而仅仅与小学算术中习惯的“已知数写在等号左侧，计算结果写在等号右侧”的表达方式不同。“欲减却加，欲加又减”的现象说明低龄儿童头脑中较少有约定俗成的条条框框，这或许恰恰是儿童创造性思维的基础，是需要我们积极保护、鼓励和引导的。

第二节　知识属性与学习活动

把以教师“教”的活动为主的课堂教学，改变为以学生“学”的活动为主的课堂教学，首先需要改变的是教师备课的思维方式。所谓“备课”不等同于“写教案”，备课的

过程更多的是学习和思考的过程，更应当包括教师个体具有创造性的思考。这样的思考应当聚焦于学生应当“学什么”，以及学生可以“怎样学”这样两个基本问题上，即思考“知识属性”和针对不同的属性设计学习活动。

对“学什么”这一问题的思考，实际就是对学生“学习目标(objective)”的确定过程。如果把学生视为学习的主体，那么这样的学习目标相对于学生来说就具有客观性，是课程编制者或者教师对学生应当“学什么”的期望(expectation)。对“怎样学”的思考首先是将学习目标转变为学生所应当执行并完成的学习任务(task)，之后是思考学生为完成任务所需要经历的学习活动(activity)。“学什么”和“怎样学”两个问题的思考并不是截然分开的，二者的思考应当是融合在一起，并且都要基于对所学知识本质属性的认识。

一、思考“知识属性”

比如“平行四边形的面积”，这一知识点反映的是一个平行四边形面积的大小与这个平行四边形内部元素(底边长度和高的长度)之间相互依赖与制约的关系，其本质属性是对客观规律的描述，此类知识的特点是相对于学习者来说具有“确定性”，不依人的意志为转移。认识这种知识的基本方法是“发现(discover)”，也就是通过观察并比较诸多不同对象，从中发现共性，这样的共性就成为了具有一定普遍意义的规律。

数学课程中另外一类知识其本质属性是人的“发明(invention)”，这一类知识通常是依赖于人的主观“需求(need)”而出现的。以分数为例，这种“需求”至少表现在三个方面。从语言的视角看，当表达数量关系的时候，同一种数量关系通常会有两种说法，这两种说法往往是“双向同义”的。如果说“甲的收入比乙的收入多 100 元”，就会有反过来并且意义相同的说法，即“乙的收入比甲的收入少 100 元”。如果说“甲的收入是乙的 3 倍”，就需要反过来并且意义相同的说法，如果没有分数，这样的说法就难以实现。有了分数，就可以说“乙的收入是甲收入的三分之一”，从而实现了“双向同义”的语言描述。

历史上人们对分数的“需求”还表现在“量(magnitude)”的测量方面。在没有度量单位的时候，人对量与量之间的比较通常都是“用小量大”，当出现“量不尽”的情况时，就“用余量小”，如此反复，量尽为止。比如图 1－2 两条线段分别表示量 A 和量 B，其中 A 是较大的量：

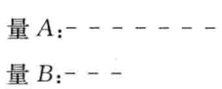

图 1－2 量的比较示意图

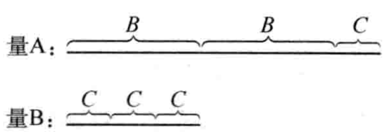

图 1－3 “量不尽”示意图

如果需要了解并且表达两个量之间关系的时候，人们首先就会用较小的量 B 去与较大的量 A 重叠测量，目的是为了知道几次量尽，从而就可以知道量 A 中包含了几个量 B。但是测量过程中经常出现量不尽的情况，也就是有剩余的情况出现(见

图 1－3）。

图 1－3 中用量 B 测量量 A 重叠 2 次后，出现了小于量 B 的剩余量 C，这时候人们通常会用剩余的量 C 反过来去与量 B 重叠测量，如果仍然量不尽，就继续重复这一“用余量小”的过程。图 1－3 用 C 量 B 的结果恰好三次量尽。这时候就需要用数来描述量 A 与量 B 之间的关系，此时仅有整数就不够了，有了分数就可以说“A 是 B 的 $2\frac{1}{3}$ $\left(\text{或者}\frac{7}{3}\right)$”；也可以说“$B$ 是 A 的$\frac{3}{7}$”。用“比”的语言说就是 A 与 B 的比是 $7:3$，或者 B 与 A 的比是 $3:7$。

数学家对分数的“需求”还表现为对除法运算“封闭”的愿望。在整数范围内，两个整数相除，可能得不到整数的结果，这种情况就叫做“整数集合对除法运算不封闭”，也就是整数集合内两个元素的运算结果跑到了整数集合的外面了。因此需要扩大整数集合的范围，把分数合并到整数集合中来，由此形成了数学中的有理数集合，在这个集合中除法运算就能保证封闭了，即任何两个有理数相除的结果一定还是有理数。

二、针对“知识属性”设计学习活动

“发现”的知识与“发明”的知识属性不同，当然学习的方式也就有了差异。发现的过程核心环节是“观察与比较”，发明的过程重在“需求与创造”。针对不同属性的知识，备课中就要思考如何为学生设计学习任务和学习活动。

（一）“发现”的过程

对客观规律的认识至少应当包括两个方面。首先应当是定性的认识，比如对于“平行四边形面积”来说，应当认识无论什么样的平行四边形，其面积的大小都受制于底边长度和高的长度；在定性认识的基础上，就可以有定量的认识，即面积的大小等于底边长度与高的长度的乘积。针对定性的认识，需要观察并且比较不同的平行四边形，在不同中发现共性，也就是所有平行四边形面积的大小都受制于底边长度和高的长度；而对于定量的认识，也就是平行四边形的面积等于底边长度与高的长度的乘积，则需要观察平行四边形与面积相等的长方形之间的关系而得到。如果把长方形视为特殊的平行四边形，那么就可以将定性的认识与定量的认识合为一体，把学习目标确定为“发现平行四边形面积的大小与底边长度和高的长度的关系”。

既然这一学习目标的实现依赖于观察与比较的活动，备课中需要思考的重要问题就是如何设计能够沟通学习目标及观察与比较活动之间联系的学习任务。这种任务的设计是否有效取决于两个前提，第一是观察者为什么需要观察，也就是要为学生提供观察的理由，这种理由可以使得学生具有观察的动机；第二是观察什么，也就是需要为学生提供观察对象以及思考方向。学习任务的叙述可以是以问题的形式出现的，不妨称之为“问题型”任务。比如针对学习目标“发现平行四边形面积的大小与底

边长度和高的长度的关系”，可以设计如下的问题型任务：

例题 1－3

下面是三组平行四边形，每一组中两个平行四边形面积是否相等？你是怎么得到结论的？

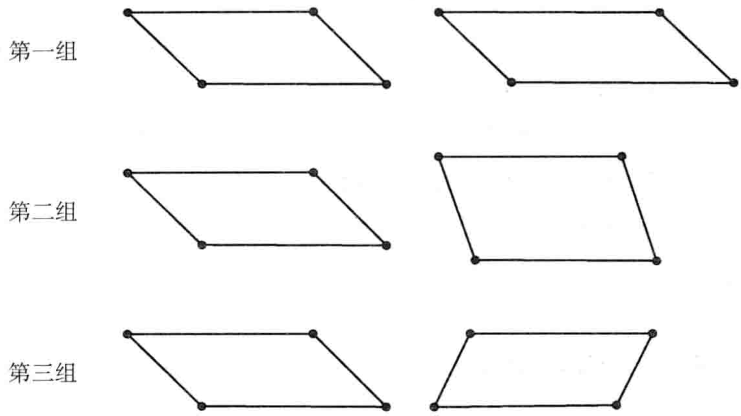

图 1－4　平行四边形面积比较图

例题 1－3 中第一组中两个平行四边形是底边长度不相等，但是高的长度相等；第二组中两个平行四边形是底边长度相等，但是高的长度不相等；第三组中两个平行四边形的底边长度相等，同时高的长度也相等。为了回答这样两个问题，学生可能的学习活动有用眼睛“看”，看不出来还可以用尺子“量”，当然也可以用剪刀把两个平行四边形“剪”下来重叠在一起“看”。所有的活动都是针对“是否相等”以及“为什么”这样两个问题，因此活动就不是盲目的，而是有目的的，活动的目的性使得学生具有了参与活动的动机。同时，教师为学生提供的三组图形相当于为学生的观察提供了对象。通过活动最终期望学生发现平行四边形面积的大小与底边长度以及高的长度有关。

学习任务的叙述还可以是“指令性”的，就是指明要求学生做什么。比如在例题1－3已经完成的基础上，为了能够发现平行四边形面积公式，可以给学生布置如下任务：

在方格纸上画出一个长方形，再画出一个与长方形面积相等的平行四边形，和你的同伴说说你的画法。

学生依据前面观察的经验，在画图过程中自然而然地就会把平行四边形的底和高与长方形的长和宽建立起联系。

在以上学习活动的基础上，最后可以通过布置指令性任务：

请自己总结出计算平行四边形的面积公式，将你的结论写出来。

通过以上三项任务，学生经历一系列以观察与比较为核心的学习活动，就应当可以达成“发现平行四边形面积的大小与底边长度和高的长度的关系”这一学习目标。

(二)“发明”的过程

对于“发明”的知识,认识的核心环节是感受需求,并且经历自主发明的过程。以分数为例,分数的学习包括分数概念的形成与语言表述、分数之间的相等与不等关系、分数的运算以及分数与除法和比的关系等内容,这些内容需要一个螺旋上升的学习过程。如果把分数的本质属性定位于语言,那么其学习过程就应当遵循语言学习的规律。语言通常是按照“先听说,后读写”的顺序进行学习的。通过“听说”可以感受到分数的存在以及分数概念的含义,通过“读写”让学生经历“发明”的过程,感受数学中文字语言、图形语言以及符号语言之间的相互关系。学习分数之初,首先应当让学生感受到对分数的“需求”,体现“让知识因需要而产生”的教学原则。因此小学三年级**“分数初步认识”的学习目标**可以确定为如下三条:

1. 感受分数在语言中的存在及其必要性;
2. 经历分数符号从“多样”到“统一”的发明过程;
3. 了解分数的含义。

针对**第一条学习目标**,可以设计如下的学习任务:

例题 1-4

钟表上表示的时间是“7 点半”,思考其中的“半”是什么意思?与同伴交流自己的想法。(见图 1-5)。

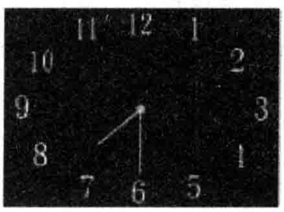

图 1-5 钟表示意图

学生在执行并完成这一任务的过程中,自然要思考和交流分针转动一圈与半圈的关系,或者时针转动一格与半格之间的关系。这种思考与交流一方面感受到二分之一的现实存在,同时也能初步感受到分数用于描述局部与整体关系的含义。类似的任务还可以设计为如下的形式:

- 将一张长方形纸对折,折痕将整张纸平均分成了两部分。这两部分的大小是什么关系?用尽可能多的语言说说其中一部分的大小与整张纸之间的关系。
- 用尽可能多的语言说说“10 元钱”与“2 元钱”之间的关系。

这样的任务可以启发学生在思考和交流的过程中,沟通描述数量关系的多种语言之间的联系。比如关于“10 元钱”与“2 元钱”之间的关系,学生可能利用先前熟悉的描述加减关系的语言,说出:“10 元比 2 元多 8 元”和“2 元比 10 元少 8 元”。学生还可能利用二年级学习过的“倍的认识”说:“5 个 2 元等于 10 元”或者“10 元是 2 元的 5

倍”，此时恰好说明需要一种与之相反的说法：“2元是10元的五分之一”，“五分之一”自然而然地因需要而产生了。

通过“听说”初步感受到分数的含义后，就需要符号来表示分数。符号作为一种数学中的语言，具有“人造(artificial)”的特点，其发生与发展必然是从“多样”走向“统一”的过程。如果把分数的符号表示方法直接告知学生，表面看省时省力，但失去的是学生经历发明符号的思考过程。

为了让学生经历这种“发明”的思考过程，针对**第二条学习目标**，可以设计这样的学习任务：

例题 1－5

你认为应当用什么样的符号表示二分之一？向同伴介绍你的发明。

图 1－6　学生分数符号表达

在课堂教学实践中，发现学生依据这个任务开展活动后，的确出现了“多样”的符号表达(见图1－6)。这些符号表达中，学生运用斜线、横线、逗号等多种方式表达“分”的含义。而且还发现许多学生在写“二分之一”的符号时，喜欢将“2”写在左侧或者上面。这实际上反映出平时习惯的阅读和书写顺序(从左向右，自上而下)对学生认识分数的符号是有影响的。分数“二分之一”的读法是“先2后1”，因此学生书写也是这样的顺序。

在学生“多样”的发明充分交流和展示之后，教师可以补充一个学习任务：

例题 1－6

同一个二分之一出现了这么多不同的符号，行吗？应当怎么办呢？

这一任务的目的在于引发学生思考，分数符号作为一种数学中的语言，其重要作用是用于交流，多样化会带来交流的困难。因此需要统一，统一的目的是让所有人看到后都能够知道其确定的含义。

这两个任务之后，为了进一步沟通不同语言之间的联系，深化对分数含义的理解，可以再为学生布置一个任务：

例题 1－7

举个例子说明$\frac{1}{4}$的意思。在小组内交流不同的想法。

学生可以通过画图、折纸、讲故事等多样化的活动完成这个任务，过程中自然会加深对分数含义的理解。

如果时间允许，还可以设计数学与其他学科沟通联系的学习任务。比如中国传统文化中成语和诗词的学习通常是语文课程中的内容，如果引入到数学课程与教学中，一方面可以沟通不同学科知识之间的联系，同时也能够激发学生学习数学的兴

趣，感受到数学学习的现实意义。在前面已经初步认识分数之后，可以利用成语“半斤八两”设计如下的学习任务：

例题 1-8

中国古代用“斤”和“两”作为重量单位，16 两为 1 斤。古代成语中有“半斤八两”的说法，请你用今天学习的知识描述这个成语的意思。

这个任务的思考讨论实际上已经渗透了六年级将要学习的“正比例”的知识。如果把“斤”和“两”看作两类不同的量，那么其相互依赖的关系可以从表 1-1 中明显看出。类似的成语还有“事半功倍”与“事倍功半”等。

表 1-1 “半斤八两”关系表

斤	1	2	$\frac{1}{2}$	……
两	16	32	8	……

中国古代诗词中也有蕴含着分数含义的。比如明代诗人杜庠的题为“岳阳楼”的诗：“茫茫雪浪带烟芜，天与西湖作画图。楼外十分风景好，一分山色九分湖。”洞庭湖是湖南省和湖北省的分界，岳阳楼位于洞庭湖畔湖南省一侧，在楼中能够远眺君山。“楼外十分风景好，一分山色九分湖”可以用分数的语言描述为：把楼外的风景看作整体，那么山景占了其中的$\frac{1}{10}$，水景占了$\frac{9}{10}$，描绘出了近大远小的视觉效果。

课堂教学期望的是学生“自由、自主、自信”地开展学习活动，为此就需要教师在备课中准确把握知识的本质属性，合理设置学习目标。在此基础上，“把目标变成任务、把知识变成问题、把方法变成活动”，让学生在课堂的学习活动中“爱做、能做、善做”。所谓“爱做”就是学生对于执行学习任务具有积极性和主动性，也就是所谓内在的动机(motivation)，让学习活动成为学生“自觉自愿”的主动活动，而不是“被逼无奈”的被动活动；所谓“能做”是期望每位学生都能够明白自己应当做什么和怎样做，而不是“部分人做，其他人陪”；所谓“善做”指的是每位学生都有做好的愿望，活动过程中有机会向同伴学习，也有机会与同伴分享自己的想法，真正做到“每位学生都有活动，每位学生都有机会”。

第三节 数学中的“人为规定”

在一份五年级单元测验试卷上发现这样一道判断题(例题 1-9)：

例题 1-9

长方体的六个面都是长方形。

翻看标准答案发现豁然是一个“错”字。与几位熟识的小学数学教师谈起此事，

得到如下几种解释：

- 这道题所考查的知识点是“长方体的六个面中允许相对的两个面是正方形”，如果学生答“对”，说明他没有认识到这一点，所以本题应该答“错”。
- 正方形是特殊的长方形，但不是真的长方形，如果答“对”，不就没有包括正方形的情况了吗？所以本题应该答“错”。
- “正方形是特殊的长方形”这句话在平面图形中是对的，但在立体图形中是不对的。所以本题应该答“错”。

这些模棱两可、似是而非的解释令人困惑，如果学生听了这样的讲解，岂不是越听越糊涂。看来矛盾的焦点在于如何理解“正方形”与“长方形”这两个概念之间的关系。

概念之间的关系大致来说有两种，一种是相容关系，另一种是相斥关系。如果两个概念所包括的对象（外延）有共同的部分，那么这两个概念之间的关系就是相容关系。如果两个概念所包括的对象（外延）没有共同的部分，这两个概念之间的关系就是相斥关系。

比如“质数”和“偶数”这两个概念，由于 2 既是质数又是偶数，这两个概念所指的对象有公共部分，所以“质数”和“偶数”这两个概念符合相容关系。再如“奇数”和“偶数”这两个概念，由于奇数中没有偶数，偶数中也没有奇数，所以这两个概念属于相斥关系。

相容关系中有一种特殊的情况，如果甲概念具有乙概念的全部属性，就意味着甲概念所包括的全部对象（外延）包含在乙概念所指对象（外延）中，这时称这两个概念之间的关系为属种关系，其中甲概念就是相对于乙概念的种概念（species），乙概念就是相对于甲概念的属概念（genus）。①

按照这样的理解来分析长方形和正方形这两个概念之间的关系。首先将长方形所具有的属性列举出来：

- 是四边形；
- 对边互相平行且长度相等；
- 四个角都是直角；
- 两条对角线长度相等且互相平分；
- 面积等于相邻两边长度的乘积。

---

① 注：关于如何翻译“species”和“genus”这两个词汇，曾经有过不同意见。古希腊时期人们运用类比（analogy）研究事物分类时，通常是通过提取个别的、特殊的 species 的属性进行对比，把相同属性保留下来，就形成了一类“species”，把这样的类叫做“genus”。按照这样的思路，把“species”翻译成“种”，把“genus”翻译成“属”是合理的。在数学中，概念的形成往往是反过来的，比如是先定义“长方形”，而后定义“正方形”，也就是说正方形是在长方形的基础上增加了属性后得到的。所以长方形相对于正方形具有“种”的特征，而正方形相对于长方形具有属的特征。因此“species”和“genus”的翻译就应当反过来。这里采用的是第一种翻译，也就是把属理解为是包含种的大类。