普通高等教育“十二五”规划教材·经济管理类数学基础系列配套用书

线性代数学习指导

（第二版）

李振东　李　凌　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
经济管理类数学基础系列配套用书

线性代数学习指导

（第二版）

李振东　李　凌　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是“普通高等教育‘十二五’规划教材·经济管理类数学基础系列”中《线性代数》(科学出版社 2015 年出版)配套使用的学习辅导与解题指南。书中各章内容与主教材同步,每章包括基本要求、内容提要、典型例题、教材习题选解、自测题及自测题参考答案六个部分。

本书内容丰富,思路清晰,例题典型,注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,对培养和提高学生的学习兴趣、增强分析问题和解决问题的能力大有益处.

本书适合经济管理类专业和其他相关专业的学生学习线性代数课程使用,也可供报考研究生的学生复习时使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/李振东,李凌主编. --2 版. —北京:科学出版社,2015
普通高等教育“十二五”规划教材. 经济管理类数学基础系列配套用书
ISBN 978-7-03-044456-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… ②李… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 114492 号

责任编辑:相 凌 焦惠丛/ 责任校对:李 影
责任印制:赵 博 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
文林印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2015 年 6 月第 二 版 印张:10 1/2
2015 年 6 月第八次印刷 字数:220 000

定价:23.00 元

第二版前言

2011 年本书第一版出版以来，按照全国高等学校教学研究中心研究项目“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的要求，进行了四年的教学实践.四年中，读者和使用本书的同行们提出了许多宝贵的修改意见和建议，这些意见和建议除了在平时的教学实践中不断吸纳外，借这次修订机会，对本书的部分内容也作了相应调整与修订，使其更符合先易后难、循序渐进的教学规律.本书是兰州财经大学“质量工程”——“经济数学基础系列课程教学团队(2013 年度)”教材建设的阶段性成果.

本书习题配置合理，难易适度，适当融入了一些研究生入学考试内容，选用了近年全国硕士研究生入学统一考试中的部分优秀试题，如 1998 考研真题用(1998)表示，2009 考研真题用(2009)表示.教材每章后的习题均为(A)(B)两组，其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课的基本要求，(B)组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的学生练习.

各章中标有“ * ”的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或供读者自学用.

本书由李振东、李凌主编.第 1、2 章由王国兴编写，第 3 章由李振东编写，第 4、5 章由李金林编写，第 6、7 章由李凌编写，全书由主编统稿定稿.

尽管这次修订我们希望本书更符合现代教育教学规律，更符合大学数学教学的实际，更容易被读者所接纳，但仍存在不妥之处，恳请读者和同行批评指正.

编　者

2015 年 4 月

第一版前言

本书是中国科学院“十一五”规划教材《线性代数》(科学出版社出版)的配套用书,是经济管理类数学基础系列中的一本,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考研究生的学生作为复习用书.

全书以提高大学生的数学素养,领会微积分基本概念和理论、掌握微积分的基本解题方法和思路为目的,精心编写而成.书中包括教材的全部内容,共7章:行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型.每章均有基本要求、内容提要、典型例题、教材习题选解、自测题及自测题参考答案六项内容.

基本要求,既是对学习内容的要求,也是学习的重点;内容提要,指明学习要点,对有关概念、性质和定理作了深入分析与归纳,以方便读者课后复习;典型例题,是在教材已有例题的基础上,进一步扩展了例题范围,通过对典型例题的深入分析和详尽解答,帮助读者弄懂基本概念、提高分析能力、熟悉解题方法、掌握解题技巧;教材习题选解,对教材中有一定特点或难度较大的习题,给予详细的解答,解决读者在学习该课程时遇到的困难;自测题及自测题参考答案,是对本章学习内容的进一步扩展,有针对性地给出了一些综合练习题,同时提供参考答案,以帮助读者增强自主学习的能力.

书的最后附有模拟试题及参考答案,以方便读者考试前进行总复习.

本书由李振东、李金林主编.第1、2、3章由王国兴编写,第4、5、6章由李金林编写,第7章由李振东编写,全书由主编统稿定稿.

由于作者水平所限,书中难免有不足之处,恳请读者及专家学者批评指正.

编　者

2011年3月

目　　录

第 1 章　行　列　式

一、基本要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.
2. 掌握用行列式的定义和有关定理计算较简单的 n 阶行列式的方法.
3. 熟练掌握用行列式的性质和有关定理计算 n 阶行列式的方法.
4. 掌握克拉默(Cramer)法则.

二、内容提要

1. n 阶行列式的定义

1) 二阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2) 三阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注　只有二阶和三阶行列式适用对角线法则.

3) 排列与逆序数

由 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级(元)排列. 所有的 n 级排列的总数为 $n!$.

在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若数 $i_t > i_s$,则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为奇数,则称该排列为奇排列;如果 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数,则称该排列为偶排列;规定逆序数为零的排列为偶排列.

4) n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列组成的

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为**n阶行列式**. 其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有n级排列$j_1 j_2 \cdots j_n$求和. $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 为行列式的一般项.

更一般地,可以将 n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ 或 j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中 $\sum\limits_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ 或 j_1 j_2 \cdots j_n}}$ 表示对行标构成的所有的 n 级排列或列标构成的所有的 n 级排列求和.

2. 行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

(2) 交换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 若一个行列式有两行(列)的对应元素相同,则此行列式的值为零.

(4) 用数 k 乘行列式的某一行(列),等于用数 k 乘此行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD.$$

(5) 若行列式有一行(列)的元素全为零,则行列式等于零.

(6) 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式等于零.

(7) 若行列式的某一行(列)各元素都是两数之和,即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(8) 将行列式某一行(列)所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

3. 行列式按行(列)展开

(1) 把 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则称 A_{ij} 为 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按某一行(列)展开定理.

n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即可以按第 i 行展开

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

或可以按第 j 列展开

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

(3) 异乘变零定理.

n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s),$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t).$$

(4) 拉普拉斯定理.

在 n 阶行列式 D 中,任意选定 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式 $M_i(i=1,2,\cdots,t)$ 与各自的代数余子式 $A_i(i=1,2,\cdots,t)$ 的乘积之和等于行列式 D,即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t\quad(t=\mathrm{C}_n^k).$$

4. 克拉默法则

含有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}.$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，称为 n 元齐次线性方程组；否则，称为 n 元非齐次线性方程组.

(1)（克拉默法则）若 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq0$，则方程组有唯一解，其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换成方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，而其余各列保持不变得到的行列式.

(2) 如果含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，则该方程组只有零解.

(3) 如果含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组有非零解，则该方程组的系数行列式 $D=0$；如果含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数行列式 $D=0$，则该方程组有非零解.

三、典型例题

例 1 已知排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 a，则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为____________.

分析 在排列 $x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_n$ 中任取两个数 x_i 与 x_j，那么在 $x_n\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_1$ 中相应的两个数 x_j 与 x_i，若 (x_i,x_j) 在 $x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_n$ 中不构成逆序对，则在 $x_n\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_1$ 中构成逆序对；若 (x_i,x_j) 在 $x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_n$ 中构成逆序对，则在

$x_n\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_1$ 中不构成逆序对;则在这两个排列中任选一对数,只有在其中一个排列中构成逆序对,那么 n 个数中任选一对数的选法为 C_n^2,也就是这两个排列逆序数的总和.

$$\tau(x_1x_2\cdots x_n)+\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以 $\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-a$.

答案 $\dfrac{n(n-1)}{2}-a$.

例 2 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}=$__________.

分析 行列式的完全展开式中,每一项都包含最后三行中位于不同列的元素,而后三行中只有第 4 列和第 5 列的元素不为 0,因此每一项都包含 0,从而这个行列式的值为 0.

答案 0.

例 3 行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充分条件是( ).

A. $k=0$; B. $k=1$; C. $k=2$; D. $k=3$.

分析 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=k^2-k-6=(k+2)(k-3)$,所以使该行列式为零的充分条件是 $k=3$.

答案 D.

例 4 设 D 为 n 阶行列式,则 $D=0$ 的充分必要条件是( ).

A. D 中有两行(列)的对应元素成比例;

B. D 中有一行(列)的所有元素全为零;

C. D 中有一行(列)的所有元素均可以由行列式的性质化为零;

D. D 中有一行(列)的所有元素的代数余子式均为零.

分析 四个选项都是 $D=0$ 的充分条件,而 $D=0$ 只能推出 D 中有一行(列)的所有元素均可以由行列式的性质化为零,即 C.

答案 C.

例 5 计算五阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\end{vmatrix}$.

解 利用各行的元素之和相同的特点，把除第 1 列以外的各列加到第 1 列，然后再把第 5 行减去第 4 行、…、第 2 行减去第 1 行，得

$$D=\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\15&3&4&5&1\\15&4&5&1&2\\15&5&1&2&3\\15&1&2&3&4\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&5&1\\1&4&5&1&2\\1&5&1&2&3\\1&1&2&3&4\end{vmatrix}$$

$$=15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&1&1&-4&1\\0&1&-4&1&1\\0&-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}15\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix},$$

将上面最后一个行列式的各行加到第 1 行并提取第 1 行的公因子(−1)，得

$$D=-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}=-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-5&0\\0&-5&0&0\\-5&0&0&0\end{vmatrix}=1875\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix},$$

在上面最后一个行列式中，交换第 1 行和第 4 行，再交换第 2 行和第 3 行，得

$$D=(-1)^2\times1875\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=1875.$$

例 6 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$.

解 将第 j 列元素的 $-\dfrac{1}{j}(j=2,3,\cdots,n)$ 倍加到第 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

注　原行列式在三条线上(第 1 行,第 1 列及主对角线)元素不为零,其余元素均为零,俗称爪型行列式,其解法是消零化成上三角行列式.

例 7(拆项法)　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n\\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}\quad(n\geqslant 2).$$

解　当 $n=2$ 时,

$$D_2=\begin{vmatrix}x_1+1 & x_1+2\\ x_2+1 & x_2+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+1 & 1\\ x_2+1 & 1\end{vmatrix}=(x_1+1)-(x_2+1)=x_1-x_2;$$

当 $n>2$ 时,

$$\begin{aligned}D_n&=\begin{vmatrix}x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n\\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}x_1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n\\ x_2 & x_2+2 & \cdots & x_2+n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_n+2 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n\\ 1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix},\end{aligned}$$

前一个行列式从第 2 列起各列分别减去第 1 列,则行列式除第 1 列外各列成比例,故值为 0;后一个行列式从第 2 列起各列分别减去第 1 列的 $2,3,\cdots,n$ 倍,得到的行列式除第 1 列外各列相同,值也为 0,即

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & 2 & \cdots & n\\ x_2 & 2 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n\end{vmatrix}=0.$$

例 8　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解　将第 2,3,…,n 列加到第 1 列,然后按第 1 列展开,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=D_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}=D_{n-1}+1.$$

由上述递推关系得

$$D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+n-1=2+n-1=n+1.$$

注　若改成证明 $D_n=n+1$,则可用数学归纳法证明.

例 9　如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx+y+z=0 \\ x+ky-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

有非零解,k 应取什么值?

解　齐次线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=k^2-2-1-2k-1-k=k^2-3k-4=(k+1)(k-4),$$

如果方程组有非零解,则 $D=0$,即 $(k+1)(k-4)=0$,解得 $k=-1$ 或 $k=4$,所以,当 $k=-1$ 或 $k=4$ 时,该齐次线性方程组有非零解.

例 10　证明齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0 \\ 2x_1+4x_2+8x_3+\cdots+2^nx_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ nx_1+n^2x_2+n^3x_3+\cdots+n^nx_n=0 \end{cases}$$

仅有零解.

证　齐次线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & (n-1)^3 & \cdots & (n-1)^n \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

$$=2\times3\times\cdots\times n\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-1} \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=n!\ (2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)\cdots(n-2)\cdots(n-(n-1))$$

$$=n!\ (n-1)!\ \cdots 2!\ \neq 0.$$

所以方程组仅有零解.

四、教材习题选解

(A)

2. 解方程.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

解　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3+3x-x^2-x=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)=0,$

解得$x_1=-1,x_2=3$.

4. 求下列排列的逆序数.

(3) $23\cdots(n-1)n1$;　　　　(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots2n$;

解　(3) $23\cdots(n-1)n1$ 的逆序为 $21,31,\cdots,(n-1)1,n1$;逆序数为 $n-1$.

(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots2n$ 所含逆序为:

和 2 构成逆序的有 $3,5,7,\cdots,2n-1$,共 $n-1$ 个;

和 4 构成逆序的有 $5,7,9,\cdots,2n-1$,共 $n-2$ 个;

……

和 $2n-2$ 构成逆序的有 $2n-1$,共 1 个.

逆序数为$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

7. 根据行列式的定义计算下面的行列式.

(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

解 (2) $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix} = acfh+(-1)^{\tau(1324)}adeh+(-1)^{\tau(4321)}bdeg$$

$$+(-1)^{\tau(4231)}bcfg = acfh+bdeg-adeh-bcfg;$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n12\cdots n-1)}a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}.$$

9. 用行列式性质证明：

(1) $\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

证 (1)将左端行列式分为 8 个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & c_2 & a_2 \\ a_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & a_1 \\ b_2 & b_2 & a_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$