应用技术型大学数学课程系列教材

微积分与数学模型

（下 册）

主　编　张秋燕　彭年斌

副主编　陈骑兵　李建军　李宝平

科学出版社

应用技术型大学数学课程系列教材

微积分与数学模型(下册)

主　编　张秋燕　彭年斌
副主编　陈骑兵　李建军　李宝平

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是由电子科技大学成都学院"数学建模与工程教育研究项目组"的教师，依据教育部颁发的《关于高等工业院校微积分课程的教学基本要求》，以培养应用型科技人才为目标而编写的. 与本书配套的系列教材还有《微积分与数学模型(上册)》、《线性代数与数学模型》、《概率统计与数学模型》.

本书分5章，主要介绍多元函数微分学及其应用、重积分及其应用、曲线曲面积分及其应用、微分方程及其应用、无穷级数及其应用等多元函数微积分学的基本内容和应用模型. 每节后面配有适当的习题，每章配备有复习题，最后附有参考解答与提示. 本书的主要特色是注重应用，在介绍多元微积分基本内容的基础上，融入了很多模型及应用实例.

本书可作为普通高校、独立学院及成人教育、自考等各类本科微积分课程的教材或相关研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分与数学模型. 下册/张秋燕，彭年斌主编. —北京：科学出版社，2015.1

应用技术型大学数学课程系列教材

ISBN 978-7-03-043015-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①张… ②彭… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 ②数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O172 ②O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第009049号

责任编辑：昌 盛 周金权/责任校对：钟 洋

责任印制：霍 兵/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年2月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2015年2月第一次印刷 印张：17 1/4

字数：347 000

定价：35.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

为了培养应用型科技人才，我们在大学数学的教学中以工程教育为背景，坚持将数学建模、数学实验的思想与方法融入数学主干课程教学，收到了好的效果．通过教学实践我们认为将原来的高等数学、线性代数、概率论与数理统计课程分别改设为微积分与数学模型、线性代数与数学模型、概率统计与数学模型课程，对转变师生的教育理念，引领学生热爱数学学习、重视数学应用很有帮助，对理工类应用型本科学生工程数学素养的培养很有必要．

“将数学建模思想全面融入理工类数学系列教材的研究”是电子科技大学成都学院“以CDIO工程教育为导向的人才培养体系建设”项目中的课题，也是四川省2013～2016年高等教育人才培养质量和教改建设项目．

本套系列教材主要以应用型科技人才培养为导向，以理工类专业需要为宗旨，在系统阐述微积分、线性代数、概率统计课程的基本概念、基本定理、基本方法的同时融入了很多经典的数学模型，重点强调数学思想与数学方法的学习，强调怎样将数学应用于工程实际．

本书主要介绍多元函数微分学及其应用、重积分数学模型及其应用、曲线、曲面积分及其应用、微分方程及其应用、无穷级数及其应用等多元函数微积分学的基本内容和应用模型．

本书的编写具有如下特点：

（1）在保证基础知识体系完整的前提下，力求通俗易懂，删除了繁杂的理论性证明过程；教材体系和章节的安排上，严格遵循循序渐进、由浅入深的教学规律；在对内容深度的把握上，考虑应用型科技人才的培养目标和学生的接受能力，做到深浅适中、难易适度．

（2）在重要概念和公式的引入上尽量根据数学发展的脉络还原最质朴的案例，教材中引入的很多案例都是数学建模活动中或讨论课上学生最感兴趣的问题，其内容丰富、生动有趣，视野开阔、宏微兼具．这对于提高学生分析问题和解决问题的能力都很有帮助．

（3）按节配备了难度适中的习题，按章配备了复习题，并附有答案或提示．

全书讲授与模型讨论需要80学时．根据不同层次的需要，课时和内容可酌情取舍．

本书由张秋燕、彭年斌主编，第6章由李宝平编写，第7章由李建军编写，第8章由张秋燕编写，第9章由陈骑兵编写，第10章由彭年斌编写．全书由张秋燕负责

统稿.

在本书的编写过程中,我们参阅了大量的教材与文献资料,在此向这些作者表示感谢.

由于编者水平有限,书中难免有缺点和不妥之处,恳请同行专家和读者批评指正.

电子科技大学成都学院
数学建模与工程教育研究项目组
2014 年 11 月于成都

目　　录

第 6 章　多元函数微分学及其应用

一元函数研究的是两个变量之间的关系.在自然科学和工程技术中,一个变量的变化往往涉及多方面的因素,反映到数学上,就是多元的问题.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分学及其应用.

6.1　多元函数的基本概念

6.1.1　区域

由于讨论多元函数的需要,我们首先将一元函数中的邻域和区间的概念加以推广.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,$\delta$ 为某一正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$的全体,称为点 $P_0(x_0,y_0)$的 δ **邻域**,记作 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^2 \mid |P_0P|<\delta\}$$
$$=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上,$U(P_0,\delta)$就是在 xOy 平面上,以 $P_0(x_0,y_0)$为中心,δ 为半径的圆内部的点的全体.$U(P_0,\delta)$中除去点 $P_0(x_0,y_0)$后剩下的部分,称为点 $P_0(x_0,y_0)$的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.显然,它是一元函数中邻域概念的推广.

如果不需要强调邻域的半径 δ,则用 $U(P_0)$表示点 P_0 的某个邻域,点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

2. 区域

对于任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$:

若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$,则称 P 为 E 的**内点**;

若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称 P 为 E 的**外点**;

若点 P 的任一邻域 $U(P)$内既含有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的**边界点**. E 的边界点的全体称为 E 的**边界**,记作∂E.

如图 6.1 所示,P_1 是 E 的内点,P_2 是 E 的外点,P_3 是 E 的边界点.

根据定义可知,E 的内点必属于 E;E 的外点必不属于 E;而 E 的边界点可能

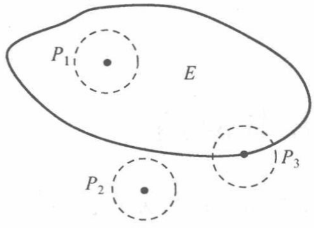

图 6.1

属于 E,也可能不属于 E.

如果对于任意给定的 $\delta>0$,点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点,则称 P 是 E 的**聚点**.由定义可知,点集 E 的聚点 P 本身,可以属于 E,也可以不属于 E.

如果点集 E 的点都是 E 的内点,则称 E 为**开集**.如果点集 E 的余集 E^C 为开集,则称 E 为**闭集**.

例如,集合 $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 是开集;集合 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是闭集;而集合 $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$ 既非开集,也非闭集.

如果点集 E 内任何两点,都可用折线连接起来,且该折线上的点都属于 E,则称 E 为**连通集**.

对于平面点集 E,如果存在某一正数 r,使得 $E\subset U(O,r)$,其中 O 是坐标原点,则称 E 为**有界集**,否则称为**无界集**.

连通的开集称为**开区域**.开区域连同它的边界一起所构成的点集称为**闭区域**.

例如,集合 $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 是开区域;而集合 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是闭区域.

上述概念可逐一推广到 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中去.例如,设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^n$,$\delta$ 为一正数,则 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域为 $U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^n\mid |P_0P|<\delta\}$.

6.1.2　多元函数的概念

定义 6.1　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空子集,从 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个映射 f 称为定义在 D 上的一个 n **元实值函数**,记作 $f:D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,或 $y=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$x\in D$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数 f 的**定义域**,$f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**,并且称 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的子集 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)\mid y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$ 为函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 D 上的图像.

特别地,设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 的非空子集,$\mathbf{R}$ 为实数集,若 f 为从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,即对于 D 中的每一点 (x,y),通过 f 在 $\mathbf{R}$ 中存在唯一的实数 z 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的**二元函数**,记为 $f:D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 或 $z=f(x,y)$,$(x,y\in D)$,其中 x,y 称为自变量,z 称为因变量,D 称为函数 f 的定义域,记为 D_f,$z_f=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$ 称为函数 f 的值域.

一个二元函数 $z=f(x,y)(x,y\in D)$ 的图像 $\{(x,y,f(x,y))\mid (x,y)\in D\}$ 在几何上通常表示空间的一张曲面.在空间直角坐标系下,这张曲面在 xOy 坐标面上

的投影就是函数 $f(x,y)$ 的定义域 D_f，如图 6.2 所示. 例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\leqslant 1)$ 的图像是上半球面，它的定义域是闭单位圆域

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

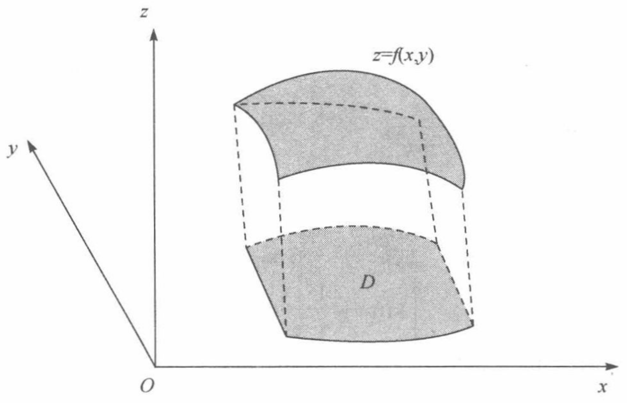

图 6.2

一元函数的单调性、奇偶性、周期性等性质的定义在多元函数中不再适用，但有界性的定义仍然适用.

设有 n 元函数 $y=f(x)$，其定义域 $D_f\in\mathbf{R}^n$，集合 $X\subseteq D_f$. 如果存在正数 M，对任一元素 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**，M 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个界.

6.1.3　多元函数的极限

我们先讨论二元函数的极限.

定义 6.2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的**极限**，记作 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

为了区别一元函数的极限，我们把二元函数的极限称为二重极限．类似可以定义 n 元函数的极限．

必须注意，所谓 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$，是指在 D 上动点 $P(x,y)$ 以任何方式、任意路径趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限都存在并且等于 A；反之，若动点 $P(x,y)$ 沿着某个路径无限趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 不存在极限或者沿着某两个

不同的路径无限趋近于 $P_0(x_0,y_0)$时,$f(x,y)$趋于不同的值,则函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$就不存在极限.

例 6.1.1　求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解　$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot2=2.$

例 6.1.2　求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解　由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}xy=0\cdot1=0,$$

$$\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant1,$$

根据有界函数与无穷小的乘积仍然是无穷小,得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

例 6.1.3　设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,证明:当$(x,y)\to(0,0)$时,$f(x,y)$的极限不存在.

证　当动点 $P(x,y)$沿直线 $y=kx$(k 为任意实常数)趋于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然,等式右边的值随斜率 k 的不同而不同. 因此,极限不存在.

例 6.1.4　设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

试讨论$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$是否存在.

解　当点 $P(x,y)$沿直线 $x=ky$(k 为任意实常数)趋于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to0\\x=ky}}f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{ky^3}{k^2y^2+y^4}=0;$$

当点 $P(x,y)$沿抛物线 $x=y^2$ 趋于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{y\to0\\x=y^2}}f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}.$$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

例 6.1.5 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}]^{y}=\mathrm{e}^{2}$.

6.1.4 多元函数的连续性

定义 6.3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,且 $P_0(x_0,y_0)\in D$,若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**,若 $f(x,y)$ 在 D 的每一点处都连续,则称函数 $f(x,y)$ 是 D 上的**连续函数**.

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续,则称 P_0 为函数 $f(x,y)$ 的**间断点**,二元函数的间断点可以是孤立点,有时可以是一条或几条曲线,甚至是一个区域. 例如,函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 的间断点是曲线 $x^2+y^2=1$,函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 的间断点是平面区域 $x+y\leqslant 1$.

类似可定义 n 元函数的连续性和间断点.

与一元函数一样,利用多元函数的极限运算法则可以证明,多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是连续函数,多元连续函数的复合函数也是连续函数.

和一元初等函数类似,多元初等函数是指能用一个解析表达式表示的多元函数,这个解析表达式由常量及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算而得到. 例如,$z=\dfrac{3x+2y}{1+x^2}$,$u=\sin(x+2y^2+3z)$ 等都是多元初等函数. 一切多元初等函数在定义区域内是连续的.

在求多元初等函数 $f(P)$ 在点 P_0 处的极限时,若点 P_0 在函数的定义域内,根据函数的连续性,该极限值就等于函数在点 P_0 处的函数值,即

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

例如,求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}=\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$,因为 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 是初等函数,所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

性质 6.1 有界闭区域 D 上的多元连续函数是 D 上的有界函数.

性质 6.2 有界闭区域 D 上的多元连续函数在 D 上存在最大值和最小值.

性质 6.3 有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间