I 關於"算術及代數複習與研究"的教学大綱

1.数学函授專修科是和师范專科学校的数学科一样的。目的是培养学生成为一个合乎規格的初中数学教师。

2."算术及代数复习与研究"是数学科基础学科之一，設置的目的与要求是：

(1)对于中学算术的內容及代数的主要內容加以系統的整理与必要的补充，使学生对这部分中学教材获得較严整的理論基础，从而在教学实踐中有正确处理这些教材的能力。

(2)使学生明确概念，掌握严格的推論方法，預防在教学实踐中容易发生的形式主义傾向。

(3)提高学生解題技术。

3.教育部1956年編訂的师范專科学校数学科"算术及代数复习与研究"的試行教学大綱中規定，算术部分的內容包括以下五个部分：(1)自然数与零，(2)数的整除性，(3)分数，(4)量的度量，(5)近似計算。代数部分的內容是：(1)就有理数体、实数体、复数体的領域，来討論多項式、有理函数及方程，(2)簡單介紹不等式的解法及証明，(3)在数环、数体、多項式环及有理函数体的基础上介紹一般环和体的概念。

4.教育部訂定本課程的試行教学大綱內容如下：

(I)算術部分

(一)自然数与零(33学时)

(1)作为科学的算术与作为中学課程的算术，关于定义及不定义

的概念，公理及論断的解釋。

（2）数数及記数。

（3）集合的概念，集合的等价，有限集合与无限集合的基本区别，无限集合可与其眞部分集合等价的例子。基数、基数大小比較，基数的运算。

（4）序数理論，自然数列的公理，运算的归納定义。

（5）数零。

（6）算术运算及其规則（包括和、差、积、商的性質及作法）。

（7）制度数的概念及运算，从一个記数制度换到另一个記数制度。

（8）应用問題的解法。

（二）数的整除性（21学时）

（1）数的整除性，二数的公約数与公倍数，关于整除性的基本定理。

（2）用輾轉相除法求最大公約数，二数的最大公約数与最小公倍数的关系，若干个数的最大公約数及最小公倍数。

（3）質数，爱拉托斯（Eratosthenes）篩，歐几里得定理，数的标准分解及分解的唯一性，用数的分解求最大公約数及最小公倍数。

（4）整除性的特殊判別法。

（5）剩余类、驗算。

（6）歐拉（Euler）函数，歐拉定理与佛尔瑪（Fermat）小定理。

（7）应用問題的解法。

（三）分数（32学时）

（1）可較量的概念，可加量与无限分割原則，量的运算。

（2）分数的概念及其具体解釋，分数的基本性質，分数的大小比

较，分数的运算及其具体解释，基本运算律的保持，分数的双重意义。

（3）用公理方法建立分数。

（4）小数的概念，小数的大小比较，小数的运算。

（5）分数与小数的互化，分数能化成有限小数的充分必要条件。

（6）循环小数，循环小数与分数的互化，循环長度与循环节。

（7）应用問題的解法（包括百分法的应用問題）。

（四）量的度量（11学时）

（1）可通約量与不可通約量，量的度量。

（2）名数及其运算，标准制与市用制。

（3）量的比，成正比例的量，成反比例的量，比例，与若干个量成正、反比例的量。

（4）应用問題的解法。

（五）近似計算（8学时）

（1）量的近似值，（近似数）。

（2）絕对誤差与相对誤差。

（3）近似数的运算。

（Ⅱ）代数部分

（一）有理数体（41学时）

（1）有理数体的建立（12学时）

1)負数、有理数集合。

2)有理数的大小比较及其具体意义，有理数集合中顺序律的保持。

3)有理数的算术运算的定义及其具体意义，有理数集合中运算律的保持。

4)数环，数体，有理数体，有理数体是最小数体，有理数运算

的比較性質。

(2)有理函数体(20学时)

1)有理函数,單項式与多項式,把多項式看做函数。

2)多項式的恒等与运算,有理数体上多項式环。

3)多項式的整除,不可約多項式的概念,帶余式除法。

4)余式定理,有理数体上多項式根的个数,多項式整根及有理根的求法。

5)兩个多項式的最高公因式,輾轉相除法,多次式的不可約因式分解。

6)多变数多項式。

7)多項式因式分解的特殊方法。

8)有理数体上有理分式及其运算,有理函数体。

(3)綫性方程組(9学时)

1)綫性方程組。

2)二阶及三阶行列式及其性質。

3)兩个未知量及三个未知量的綫性方程組的解法及其推究。

4)齐次綫性方程組。

5)方程組的初等解法及其根据。

6)应用問題的解法。

(二)实数体(22学时)

(1)連續量的度量,直綫連續公理。

(2)作为不循环无限小数的无理数,实数集合。

(3)实数的大小比較及其具体意义,实数集合中順序律的保持,用有理数趋近实数。

(4)实数的算术运算的定义及其具体意义,实数集合中运算律的保持。

(5)实数开方。

(6)作为数体的实数集合。

(7)中間数体的例子。

(8)可数集合的概念，实数集合的不可数性。

(9)实数体上多項式环，有理函数及綫性方程組，实数体上多項式的实根个数及因式分解。

(10)根式及其运算，无理式，无理式的恆等变形。

(三)复数体及复数体上的代数函数(28学时)

(1)复数的定义及其运算，复数集合是数体，复数的几何表示，隶模弗公式，复数开方。

(2)复数体上多項式环，复数体上多項式根的存在定理(不証明)，多項式的一次因式分解，实系数多項式的复根的共轭性，实系数多項式的不可約因式分解，多項式根与系数的关系。

(3)代数方程，方程的变形与等价，二次及三次方程(卡当公式)，四次方程，五次及五次以上一般方程不能用根式解的問題(不証明)，方程的特殊解法。

(4)关于消去法問題的概念，高次方程式的特殊解法，

(5)无理方程及其特殊解法。

(6)应用問題的解法。

(四)不等式(8学时)

(1)不等式的基本理論。

(2)一次与二次不等式的解法。

(3)联立不等式的解法举例。

(4)不等式的証明。

(五)代数公理方法(6学时)

(1)环、体的定义及例子，环中零元及負元的存在，体中單位元及

逆元的存在，运算規則。

（2）同構，同構及不同構的环和体的例子。

5.大綱所規定的各部分分配的时間，系講授的时間，对函授自学来說，仅能作为参考。对大綱的規定的內容对函授自学来說，是要求完全达到的。

II 關于教科書及主要参考書

1.根据教学大綱規定的內容及大綱的主要精神，我們选定：格列本卡著，張禾瑞、孫永生譯的算术（高等教育出版社出版）作为算术部分的教科書。諾霍塞洛夫著、張禾瑞、孫永生等譯的代数与初等函数（高等教育出版社出版）（書中代数部分）作为代数部分的教科書。这兩本書的內容，大致符合教学大綱的要求的。

2.算术部分可供参考的書，有勃·阿·杜林諾夫与雅·費·捷馬列夫著，叶述武譯的算术（人民教育出版社出版），这是苏联师范学校用的教科書，苏联的师范学校相当于我國中等师范学校。內容和我国現行中学算术教科書差不多，但理論性比較严整一些。里面有近似計算一章，論述关于近似計算的初步理論知識。可作为我們学习近似計算的主要参考材料。

和这一本算术的內容差不多的另一本算术（辽寧人民出版社出版），是东北师范大学数学函授專修班的講义，它主要是依据勃·阿·杜林諾夫与雅·費·捷馬列夫著的算术編譯而成的。經过东北各地区的函授学員及教师进修学院試用的結果，認为可以供初中教师作为教学上的参考書。

上面兩本算术，就內容来講是差别很少的，差别仅在于：一本按苏

联原本直接翻譯而成，一本則依据原本編譯而成，后者有少許在原書不合我国实际情况的說明及例子等，加以修改的。

格列本卡的算术，比上面所提的兩本算术，在內容上要深一些，也广一些；在理論性方面也較为严正得多。

3.代数部分可供参考的書，有諸寋諾洛夫著，赵庚慈等譯：初等代数專門教程，这本書是可作为师范学院数学系初等数学复习及研究的教科書的（高教社出版）。其次还有里亞平著曹錫华等譯的高等代数教程；奥庫湼夫著，楊从仁譯的高等代数；庫罗什著，柯召譯的高等代数教程。以及阿·兹可夫等著，丁寿田譯的代数，这几本書，都是用比較高的代数观点来討論多項式，有理函数及方程等方面的問題的。（这四本書都是高教社出版的）。

4.要作更进一步研究的参考書，有依·培·勃罗斯庫列亞阿夫著，吳品三譯的数与多項式；張禾瑞著的近世代数基础。前一書是用集合、环、体的概念，比較严密的来討論自然数，有理数、实数、复数、多項式的理論；后一書是近世代数理論的基础。（数与多項式高教社出版，近世代数基础商务出版。）

5.伯拉基斯著，吳品三譯的中学数学教学法有关部分，（通論、算术、代数），以及現行中学的算术，代数教科書，也是学习这一門課程的重要参考書。

Ⅲ 算術各章学習指導

前　言

1.作为科学的算术是研究数、数的性質及其运算的科学，是数学科学的一个分科。（参考中学数学教学法第二冊§1）。

关于数的研究是現代数学中最重要的，同时也是比較困难的部分。在格列本卡的算术里，仅能对一些有关的算术基本問題作簡單的敍述。

关于自然数，有理数，实数，复数等較严密的以及較完善的敘述，讀者可閱讀參考書：数与多項式。

2.作为中学課程的算术，就本質上来說是与作为科学的算术有区别的。因为作为学校中教学課程的算术，它的內容是受教育的目的所限制的。受学习这一課程的学生的生理年龄以及他的基础知識所限制的。因此，中学算术的內容，仅能包含关于数的理論的不多部分，而这些部分也是被非常簡化了的形狀放入这个課程里的。特別的，中学的算术中包括了我們每一个人在日常生活所需要的数学知識，（如記数法，四則运算的熟練技巧，量的度量的应用：長度、面积、体积等）。以及为了学习其他課程（如物理、化学）所需要的有关的基础知識等。而且这些內容也还是受傳統的中学的教育实踐所限制的。

3.在格列本卡算术里所包含的并不是作为科学的算术的內容，而是作为一門教学課程的算术的內容。它为了更好地面向算术各部分的教学来培养教师，为了能够最大限度地使得从这里所获得的一系列知識，能直接应用到中（小）学的教学上去，所以，在这本書里，是按照中（小）学算术教材的結構，而在較高的理論水平上来講述中（小）学的算术的各种有关問題的。

明了这一点，对我們学习格列本卡的算术是有好处的。

第一章　自然數與自然數列

1.学习这一章，要求理解：（1）自然数是怎样被定义的？它的实际意义怎样？（2）兩个自然数的相等、大小关系是怎样被定义的？它的实际意义怎样？（3）算术运算：加、減、乘、除是怎样被定义的？它的实际意义怎样？（4）运算的基本性質，（加法的結合、交换；乘法的結合、交换；以及加法与乘法的分配性質），和运算的其他一些法

则。（5）計算方法的理論根据。

2.数的产生和发展，是由于劳动生产，生活实踐的需要。我們的祖先，在劳动生产和生活实踐中，积累了关于数的极为丰富的知識。怎样把这些知識系統化，用邏輯推理方法建立起科学的理論来。这就是关于自然数的理論，分数的理論的主要內容。所以要建立起这些理論的目的，是为了使我們掌握这方面的知識，运用这方面的知識，有堅实的科学基础。

3.在我們的生活实踐中，数可以利用于数东西以及編号，这也就是說，数具有兩种意义：数量的意义（基数）与次序的意义（序数）。因此，对于自然数的理論，就有基数的理論与序数的理論，用純邏輯的方法被建立起来。这在第九章关于数的理論中將詳細討論这兩个理論体系。

在第一章中，对于自然数的理論，是依据現行中学算术教科書的結構，作"数数"这一个基本概念作为基础来敍述的，在这里面揉合着基数的理論和序数的理論。这样的敍述，就是为了使学者在这里所获得的理論知識，能直接应用到中（小）学的教学实踐中去这一个企图而这样做的。

4.数（自然数）是什么？"在数东西时，我們（出声的或无声的）数出一、二、三、四、……等等，这一、二、三、四等就是自然数。"

"一个物体又一个物体为二个物体，二个物体又一个物体为三个物体，三个物体又一个物体为四个物体，这样一、二、三、四，……繼續地数下去，就得到自然数列：1，2，3，4，5，6，……"。

这样来使中学的学生获得自然数和自然数列的概念是很具体而且生动的。

数是由数数而产生的。最原始的数数只是在于將被計算的东西与已选擇好了的数（如手指，足趾等）相比較，（相对应）。例如兒童計算

物件时，一个东西屈一个手指，二个东西屈二个手指等。这样第一个手指作为数1的象征，第二个手指作为数2的象征。而現在我們数数时，却用自然数列的断片：1，2，3，4，…n 来作为数的标准了。这已經是一个很复杂的过程，是我們的祖先經过几千万年无数亿次实踐的結果。

数数时用什么东西作为数的标准，那是不关重要的。重要的是：每个东西都被数到，并且只数到一次（不重复，不遺漏）。§6数数的原則中所說的：1)数东西的結果和数的次序无关，而是一个唯一的数；2）在数东西时，每一样东西可以用另外一样东西代替；3）数的过程是无限的。这說明了数数实質上是怎么一件事。

5.为了能够用較少的詞汇（数的名称）在我們日常生活中进行数数，以及用簡單的文字把数数的結果表示出来，这就有命数法和記数法。我們对于数的名称是：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万、亿（万万），等，而記数的符号是1、2、3、4、5、6、7、8、9、0。用十进位制度来表示一个数。

对于数的名称和表示的方法是有各种各样的。現在在数学中存留的六十进位制度（如度、分、秒等），就是古代罗馬的記数制度。

数数时，用單元数，用十数，用百数，用千数，用各种單位数，在§1和§3中很詳細地說明，是为了在§8揭示出用数碼表示数的实际意义。在中学里，不是每个学生都能說得出："123"是表示"一个百，二个十，三个單元"的实际意义的，因为这些学生的老师并沒有告訴他們这一点。

6.为了要規定兩个数的大小相等关系，在§14中引出自然数列的三个特性：1）在自然数列中有一个数，它不跟随任何一个数。这个数是一。2）在每一个数后，跟隨着一个数，而且只跟隨着一个数。3）除了数一以外，每一个数都有一个先行的数，而且只有一个。

这里"跟随着一个数""与"一个先行的数"都是表示这些数之間的关系的。

这三个特性，是意大利数学家和哲学家匹阿罗（G.Peano）所提出的自然数公理系統的头三条，所謂自然数的順序公理。

有了这个順序关系之后，在§16中对于数，我們引入"大于"，"小于"和"等于"的概念。即：

①）假使在数出自然数列的数时，数 a 在数b之后，那么就說数 a 大于数b，写成 $a>b$.

②）假使数b在数 a 之后，那么在自然数列中数 a 在数b之前，我們就說数 a 小于数b，写成 $a<b$

③）$a=b$就是說：数 a 与数b一样，并且这些数就叫做相等的数。

根据上面的定义，我們容易得出下面关于順序的基本关系：

Ⅰ）对于任何兩自然数 a，b，必有且仅有下列三种关系之一成立：或者 $a>b$，或者 $a<b$，或者 $a=b$。

Ⅱ）$a=a$.

Ⅲ）若 $a=b$，則$b=a$.

Ⅳ）若 $a=b$，$b=c$，則 $a=c$.

Ⅴ）若 $a>b$，$b>c$，則 $a>c$。

7.在数学中，对于数零应該有足够的重視。

零表示在数东西时沒有东西。数零不是自然数。假使我們把零写在自然数列前面，那么我們得到所謂扩大自然数列。于是把自然数列的特性以及大于、小于、等于的基本关系都扩充到扩大的自然数的范圍中来。

扩大自然数列的任何一个数叫做整数。（因为在算术中不討論負数，这样称呼整数是可以的；以后，在代数中討論了負数后，整数是指正整数（自然数）、零、負整数）。

練 習 一

1）什么叫自然数，自然数列？

2）如何确定兩个已給定的自然数的大小或相等？

3）自然数列扩大后，所謂扩大自然数列的特性怎样？

4）自然数列扩大后，关于自然数順序的基本关系（Ⅰ——Ⅴ）得到怎样的扩充？

5）怎样取得近似弱数，或近似强数？近似数的实际意义怎样？

8.加法的意义 在自然数中，在数出数 a 以后，我們連續数出b个数来；与数b对应的自然数列里的一个确定数c，这个数c，就叫做数 a 与b的和，并且表示为 $a+b$。因此可以这样写 $c=a+b$。

所謂 $c=a+b$，我們可以这样地具体解釋为：有 a 个东西，再并入b个东西，总共有c个东西。并且，我們可以想象把这些东西按次序編上号碼，首先把那 a 个东西編上号碼，然后把并入的b个东西連續的編上号碼，这样，最后一个东西的号碼，就是数c。这只就是說总共有 $a+b$ 个东西。

从数 a 与b，求出和数 $a+b$ 所进行的运算，叫做加法。按照上面所講的兩数的和的意义，用直接数数就可以求出已給定的兩数的和来。但是，更重要的，对于兩个用数碼表示的数，我們不用数的方法来求得它們的和，而是用加法的演算来求出它們的和。因为对于兩个比較大的数如1234与56467，如果只能用直接数的方法求它們的和，那就是一件非常困难的事了。

9.已經給定兩个数 a 与b，它們的和数是不是存在的？它們的和数是不是唯一的？这从和的定义以及自然数列的特性可以知道和是存在的，而且是唯一的。§22是說明这一个問題的。

同样的情形，在§23中比較严密地說明了：1）和的交換性質 $a+b$

$=b+a$；2）和的結合性質：$a+(b+c)=(a+b)+c$；3）和大于任一被加数 $a+b>a$，或 $a+b>b$。

10.数学归納法是数学推理的一个基本方法。它是以匹阿罗所提出的自然数公理系統的第四条所謂归納法公理作为依据的。（見§169序数理論）。这条公理是这样的：

"假定：若論断S对于任意自然数n为眞，則能証明S对于n的繼数（跟隨着的一个数）为眞。在这个情形之下，若S对于自然数1为眞，則S对于任何自然数为眞。"

譬如說，我們要証明某个定理，在这个定理中是含有自然数n的。（例如n个被加数的和在相鄰兩个被加数調換时不变）。于是，我們証明这个定理，首先証明n=1时成立，（在上面的例子中n=2时成立）。其次假定对于任意一个自然数 n 成立，从而証明对于n+1成立。这样一来，就可以得出結論，認为对于任何自然数n，定理都被証明了。因为定理对于任意一个自然数n成立，对于n+1被証明成立的，而定理对于自然数1成立，因此对于1的繼数2成立；定理对于自然数2成立的，因而推得对于2的繼数3成立。如此类推。認为对于任何自然数都成立了。

数学归納法在实际应用上是有好几种变体形式的。詳細情形，可参考索明斯基著高彻譯：数学归納法（中国青年出版社出版）。

11.加法的演算，依据兩个数的和的定义，容易用直接数的方法得出一位数的加法表。一位数的加法，用加法表来演算。多位数相加的演算，可归結到相同位上数碼的相加，这也就归結到一位数的加法的演算上去了。

12.在实际的問題中，有：兩个被加数的和c已知，并且已知道其中的一个被加数 a，需要找出另外一个被加数来。用x表示所要求的另一个被加数，由問題的意思表示为

$$a+x=c$$

由加法的性質，只要在$a \leqslant c$的条件下，x在自然数列中总是存在而且唯一的。

我們把x表示为$c-a$，叫做数c減去数a的差。已知数c与a，求出从数c減去数a的差的运算，叫做減法。很明显的，要求数c減去数a的差，就是說要求一个数x，使得$a+x=c$。

这样，从減法定义的本身就說明了它是加法的逆运算。由此，減法的演算以及运算的一些法則，都是从加法的演算和加法运算的法則逆推得来的。

13.加法和減法的驗算　对于加法的驗算，我們可以根据加法的交換性質，把兩个被加数的位置調換了进行演算，因为$a+b=b+a$。如果兩种順序不同加法的演算，所得結果是一样，那就是說演算所得的結果会是正确的。現在，有了減法的运算后，我們可以把加法演算所得的和数作为固定数，从这个和数里減去被加数中的一个，这样求得的差，看是否与另一个被加数相同，因为$a+b=c$，同时$a+x=c$，　应該有$x=b$。

同样，对于減法，可以进行兩种不同形式的驗算。

例如$c-a=b$，我們有$a+b=c$，这是一种，另一种是$c-b=a$。

練　習　二

1）說明和的唯一性以及差的唯一性。

2）証明运算法則Ⅰ）$d-(c-a)=(d+a)-c$

Ⅱ）$(a-b)+c=a-(b-c)$

Ⅲ）$(a+c)-(b+c)=a-b$

3）用減法演算解决的是哪种类型的問題？

14.对于乘法，我們首先定义：自然数a乘以自然数b，就是說求b个被加数的和，每一个被加数都等于a。在这一个定义之下，当$b=1$时，ab就是$a\cdot 1$，这是不能直接用相同数相加的意义來解釋的。因

此，我們再規定 $a\cdot 1=a$。使b为任何自然数时，乘积 ab都有意义，(§44)。其次，对于乘数有一个因数是零，或者二个因数都是零时，再补充定义：二数相乘，若其中一数等于零时，它們的积等于零。所以要采取这样的規定是为了使 $a\,b$ 不論 b 是任何自然数或零时，它們的解釋相一致。再看看当 $a=0$，b为自然数时：

$$0\cdot b=\overbrace{0+0+\cdots+0}^{b\text{个}}=0$$

这是很自然的。当 $b=1$ 时，和自然数乘以1的情形一样，我們規定 $0\cdot 1=0$。其次当b为零时，这是不容許直接来解釋的，我們規定 $a\cdot 0=0$，$0\cdot 0=0$。所以要采取这样規定的另一个理由，就因为在这样規定之下，对于乘积的唯一性，以及乘法运算的交換、結合，以及积的分配性質等等，都是被滿足的。也就是說，不会由于上面所采取的定义，而使这些論証产生例外的情形。

15.乘法演算的理論依据可以这样来說明：Ⅰ）二个一位数的乘积，直接从乘法的定义，容易引导出乘法九九表，根据乘法表来求积。Ⅱ）多位数乘积的計算，归結为一位数乘积的計算上去。为了說明这一点，首先說明对于一个数用位率去乘它，就是向这个数的右边补上和位率里的零的个数一样多的零。其次，兩个数都是由首位数碼不是零而其余数碼都是零構成的(例如400,000)，它們的乘积等于这兩个不是零的数碼相乘，积的右端补上与被乘数、乘数中零的个数的和一样多的零。然后，对于任意二个多位数相乘，它們在表示为各个位上的数碼与位率乘积的和的形式下，归結为一位数乘积的計算上去。

16.除法是乘法的逆运算，这一点与减法是加法的逆运算的情形是一样的。但是减法对加法来說，只产生了一种特别的情形，就是必須被減数不小于減数，差才存在。而除法对乘法来說，情形要复杂一些：第一，对任意已給定的兩个数 a c，滿足 $ax=c$的x，不是常存在的

（在整数范圍来說的）。第二，零不能作为除数。因为当 $a=0$，若 $c\neq 0$，則滿足 $0\cdot x=c\neq 0$，这样的数 x 不存在；若 $c=0$，則滿足 $0\cdot x=c=0$，这样的数 x，任何整数都可以，这与商的唯一性要求不合。这就是在数学中零被禁止作为除数的緣故了。

17.有余数的除法，对于已給定的任意兩个数 c，a，（$a\neq 0$）必定有唯一的一对整数 q，r 存在，滿足下面的关系

$$c=qa+r\text{，而}0\leqslant r<a\text{。} \qquad (1)$$

首先，我們証明有这样的一对整数 q，r 存在。我們考察 c，a 的各种可能情形.

1）$c=0$，这时有 $q=0$，$r=0$，滿足（1）式。

2）$c<a$，这时有 $q=0$，$r=c$，滿足（1）式。

3）$c=a$，这时有 $q=1$，$r=0$，滿足（1）式。

4）$c>a$，我們写出下面的数列

$$1.a,2.a,3.a,\cdots\cdots,q\,a,(q+1)a,\cdots\cdots c\,a \qquad (2)$$

这些数是一个一个逐漸增大的，这里面 $1\cdot a$ 是小于 c 的，而 $c\,a$ 是大于 c 的。我們一个一个考察下去，必然能遇到第一个大于 c 的数，这个数設为（$q+1$）a，那么在这个数的前一个数 qa；$qa\leqslant c$，这样，就有

$$c=qa+r\text{，而}0\leqslant r<a\text{。}$$

我們証明 $r<a$。因为，若 $r\geqslant a$，則有 $r=a+r_1$，这里 $r_1\geqslant 0$，这使得 $c=qa+r=qa+(a+r_1)=(qa+a)+r_1=(q+1)a+r_1$；由和大于或等于任一被加数的性質，有（$q+1$）$a\leqslant c$。这与原来所設（$q+1$）$a>c$，矛盾。所以 $r<a$。

上面証明了 q，r 是存在的。

其次，我們証明滿足条件的 q，r 是唯一的。

設存在另一对 q'，r' 也滿足条件，卽有

$c=q'a+r'$，而$0\leqslant r'<a$　　　　（3）

比較（1）和（3），得$qa+r=q'a+r'$

移項得：$(q-q')a=r-r'$。

上式右边有：$0\leqslant r-r'<a$。

上式左边，只有在$q=q'$时，始有$(q-q')a=0<a$。

因此有　$q=q'$和$r=r'$，也就是q，r是唯一的。

不管c，a（$a\neq0$）是怎样的数，尽存在着一对整数q和r，有$c=qa+r$，此处$0\leqslant r<a$。当$r=0$，就有$c=qa$。这就是說c能被a除尽。当$r\neq0$时，我們說c被a除帶有余数。有余数的除法是永远可能的。

18．§67求商的方法，就是我們普遍求商数的演算方法。这里比較严密的、完善的說明各个步驟进行的根据，在閱讀时，应該用具体的数字例子，一边演算，一边对照着書上的一般式子来看，就比較容易理解了。

关于試商定理，在实际应用时，我們总是把除数的最高位上的数碼留下，把其余的数碼暫时舍掉，然后把被除数（这时的被除数就是u）也在末尾舍掉与除数中舍掉的同样个数的数碼。用这样得来的除数（一位数）去除删掉同样个数数碼的被除数(最多是二位数)。这样就很容易确定試商的范圍了。

19．乘法的驗算，第一种方法，应用乘积的交換性質，把被乘数与乘数交換了重新演算，看它們所得的結果是否一致。如果是一样的，那么演算所得的結果会是正确的。第二种方法，利用乘法与除法的关系，把所得的积作为固定数，用被乘数（或乘数）作为除数，进行除法演算，这样求得的商，如果与乘数（或被乘数）一样的，那么，所得的結果会是正确的。

除法的驗算也有兩种方法，第一种方法，把求得的商作为除数，用