inese Research on Elementary Mathematics

No. 6 2015

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

nese Research on Elementary Mathematics No. 6 2015

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

中国初等数学研究. 第6辑/杨学枝主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.6

ISBN 978-7-5603-5430-9

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①初等数学-文集
Ⅳ. ①O12-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第127032号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　王勇钢　刘春雷　钱辰琛　刘家琳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　880mm×1230mm　1/16　印张15.5　字数502千字
版　　次　2015年6月第1版　2015年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5430-9
定　　价　68.00元

中国初等數學研究

陳省身

1995年5月20日

已故国际著名数学大师陈省身先生生前为本文集所题写的书名

目　录

· 初数专题

· 拓展延伸

· 解题探秘

·教学恳谈

·信息指南

关于四面体的一些不等式的初等证明

杨学枝

(福建省福州第二十四中学　福建福州　350015)

摘　要:本文给出了四面体中棱长、外接球半径、内切球半径、体积、表面积等之间关系的不等式.

关键词:球　四面体　外接球半径　内切球半径　体积　二面角　不等式

本文将给出关于四面体的一些不等式,有一些是笔者提出的.关于四面体的不等式的证明往往涉及高等数学知识,在本文中,笔者用初等方法证明了这些不等式,这些方法富有启发性.

本文约定:四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点 A_1,A_2,A_3,A_4 所对的面的三角形的面积分别为 S_1,S_2,S_3,S_4,其体积为 V,外接球球心是 O,半径为 R,四面体 $OA_2A_3A_4$,$A_1OA_3A_4$,$A_1A_2OA_4$,$A_1A_2A_3O$ 的有向体积(右手定则)分别为 V_1,V_2,V_3,V_4,内切球球心为 I,半径为 r.四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $A_iA_j=a_{ij}(i,j=1,2,3,4,i<j)$,以 $A_iA_j(i,j=1,2,3,4,i<j)$ 为棱的二面角为 $\alpha_{ij}(i,j=1,2,3,4,i<j)$.

定理 1　定球中的内接四面体以正四面体的体积为最大.

证明　先证明以下引理 1.

引理 1　从空间一点 P 出发的四条定线段 $PA_i=R_i(i=1,2,3,4)$,则当点 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的垂心时,由 R_1,R_2,R_3,R_4 所张开的四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积最大.

证明　假设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 体积最大时,P 不是四面体的垂心,不妨设 PA_1 不垂直平面 $A_2A_3A_4$,于是,经过 P 向平面 $A_2A_3A_4$ 作垂线,并将垂线反向延长至 A_1',使得 $PA_1'=PA_1$,这时,显然四面体 $A_1'A_2A_3A_4$ 的体积大于四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积,这与假设矛盾.PA_2,PA_3,PA_4 不与其所对的底面垂直时的证明过程与此相同,从而得到点 P 必为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的垂心.

注　点 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的垂心的充要条件是 $a^2+a'^2=b^2+b'^2=c^2+c'^2$.

下面证明定理 1.

设 $PA_1=PA_2=PA_3=PA_4=R$,则点 P 为四面体外心,易知这时点 P 在四面体各面的正投影点是各面三角形的外心;另外,由引理 1 知,若 $PA_1=PA_2=PA_3=PA_4=R$,且使得四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 体积最大,则点 P 必为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的垂心,易知这时点 P 在四面体各面的正投影点是各面三角形的垂心,四面体各面三角形的外心与垂心重合,则各面三角形都为正三角形,故这时四面体 $ABCD$ 为正四面体,由此可知,定球中的内接四面体以正四面体的体积为最大.

定理 2　记 $P=a_{12}a_{34}a_{13}a_{24}a_{14}a_{23}$,则

$$P\geqslant 8\sqrt{(a_{12}a_{34})^2+(a_{13}a_{24})^2+(a_{14}a_{23})^2}\,RV$$

当且仅当 $a_{12}a_{34}=a_{13}a_{24}=a_{14}a_{23}$ 时取等号.

证明　先证明以下引理 2.

引理 2　以 $a_{12}a_{34},a_{13}a_{24},a_{14}a_{23}$ 为边可以组成一个三角形,若其面积为 Δ,则

$$4\Delta=\sqrt{(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})(-a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})}\cdot\sqrt{(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23})}$$

证明　如图 1,分别在棱 A_1A_4,A_2A_4,A_3A_4(或其延长线)上取点 K,L,M,使得

$$A_4K=a_{24}a_{34},A_4L=a_{34}a_{14},A_4M=a_{14}a_{24}$$

则

$$\frac{A_4L}{A_4M}=\frac{a_{34}}{a_{24}}=\frac{A_3A_4}{A_2A_4}$$

又由 $\angle MA_4L=\angle A_2A_4A_3$，可知 $\triangle MA_4L\backsim\triangle A_2A_4A_3$，由此得到

$$\frac{LM}{A_2A_3}=\frac{A_4L}{A_3A_4}$$

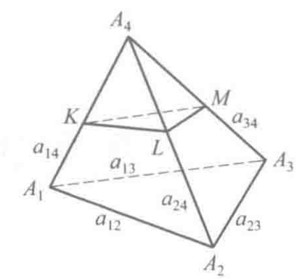

图 1

即有 $LM=\frac{A_4L\cdot A_2A_3}{A_3A_4}=\frac{a_{34}a_{14}a_{23}}{a_{34}}=a_{14}a_{23}$，同理可得 $NK=a_{13}a_{24}$，$KL=a_{12}a_{34}$，由此可知以 $a_{12}a_{34}$，$a_{13}a_{24}$，$a_{14}a_{23}$ 为边可以组成 $\triangle KLM$，记此三角形面积为 Δ，则

$$4\Delta=\sqrt{(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})(-a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})}\cdot\sqrt{(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23})}$$

引理 3 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为

$$V^2=\frac{1}{288}\begin{vmatrix}0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & 1\\ a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & 1\\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & 0 & a_{34}^2 & 1\\ a_{14}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{288}\left[\begin{vmatrix}a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & 1\\ 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & 1\\ a_{23}^2 & 0 & a_{34}^2 & 1\\ a_{24}^2 & a_{34}^2 & 0 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & 1\\ a_{12}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & 1\\ a_{13}^2 & 0 & a_{34}^2 & 1\\ a_{14}^2 & a_{34}^2 & 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & a_{12}^2 & a_{14}^2 & 1\\ a_{12}^2 & 0 & a_{24}^2 & 1\\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & a_{34}^2 & 1\\ a_{14}^2 & a_{34}^2 & 0 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 1\\ a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & 1\\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & 0 & 1\\ a_{14}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 & 1\end{vmatrix}\right]$$

证明 这不难由 $(6V)^2=|(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3})\cdot\overrightarrow{A_1A_4}|^2$ 得到(证略).

引理 4 设以 $a_{12}a_{34}$，$a_{13}a_{24}$，$a_{14}a_{23}$ 为边的三角形面积为 Δ，则有 $6RV=\Delta$.

证明 若 P 为空间任意一点，易知有以下向量式

$$V_1\overrightarrow{PA_1}+V_2\overrightarrow{PA_2}+V_3\overrightarrow{PA_3}+V_4\overrightarrow{PA_4}=V\overrightarrow{PO}\tag{1}$$

在式(1)中，令 $P=A_1$，得到

$$V_2\overrightarrow{A_1A_2}+V_3\overrightarrow{A_1A_3}+V_4\overrightarrow{A_1A_4}=V\overrightarrow{A_1O}$$

上式两边同时点乘(内积运算) $\overrightarrow{A_1O}$，得到

$$V_2\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1O}+V_3\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1O}+V_4\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\overrightarrow{A_1O}=V|\overrightarrow{A_1O}|^2$$

即

$$V_2a_{12}^2+V_3a_{13}^2+V_4a_{14}^2=2VR^2\tag{2}$$

同理可得

$$V_1a_{12}^2+V_3a_{23}^2+V_4a_{24}^2=2VR^2\tag{3}$$

$$V_1a_{13}^2+V_2a_{23}^2+V_4a_{24}^2=2VR^2\tag{4}$$

$$V_1a_{13}^2+V_2a_{24}^2+V_3a_{34}^2=2VR^2\tag{5}$$

由(2)，(3)，(4)，(5)组成的方程组，解得

$$V_1=\frac{2VR^2D_1}{D},V_2=\frac{2VR^2D_2}{D},V_3=\frac{2VR^2D_3}{D},V_4=\frac{2VR^2D_4}{D}$$

其中 $D=\begin{vmatrix}0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2\\ a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2\\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & 0 & a_{34}^2\\ a_{14}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 & 0\end{vmatrix}=-16\Delta^2$，$D_i(i=1,2,3,4)$ 分别为将行列式 D 中的第 i 列各元素都换成 1 后

所得到的行列式. 于是

$$\begin{aligned}V&=V_1+V_2+V_3+V_4=\frac{2VR^2D_1}{D}+\frac{2VR^2D_2}{D}+\frac{2VR^2D_3}{D}+\frac{2VR^2D_4}{D}\\&=\frac{2VR^2(D_1+D_2+D_3+D_4)}{-16\Delta^2}\\&=\frac{2VR^2(-288V^2)}{-16\Delta^2}=\frac{36R^2V^3}{\Delta^2}\end{aligned}$$

(注意应用引理 3),即得 $6RV=\Delta$.

下面证明定理 2.

我们知道,在三角形中,有以下命题:若 $\triangle ABC$ 三边长为 a,b,c,面积为 Δ,则

$$abc\geqslant\frac{4}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\Delta$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号(证略).

此不等式与 $\triangle ABC$ 中的不等式 $\sin^2A+\sin^2A+\sin^2A\leqslant\frac{3}{4}$ 等价(详证略).

若应用上述三角形中的不等式以及引理 4,即得到

$$\begin{aligned}P&=a_{12}a_{34}a_{13}a_{24}a_{14}a_{23}\geqslant\frac{4}{3}\sqrt{(a_{12}a_{34})^2+(a_{13}a_{24})^2+(a_{14}a_{23})^2}\,\Delta\\&=8\sqrt{(a_{12}a_{34})^2+(a_{13}a_{24})^2+(a_{14}a_{23})^2}\,RV\end{aligned}$$

当且仅当 $a_{12}a_{34}=a_{13}a_{24}=a_{14}a_{23}$ 时取等号.

定理 3 $16R^2\geqslant a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2$,当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为等面四面体(对棱长相等的四面体)时取等号.

证明 先证明以下引理 5.

引理 5 设 G 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心,则

$$|OG|=\frac{\sqrt{16R^2-(a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2)}}{4}$$

证明 设 $\triangle A_1A_2A_4$, $\triangle A_1A_3A_2$, $\triangle A_1A_2A_4$, $\triangle A_1A_3A_2$ 的重心分别为 G_1,G_2,G_3,G_4,则 $\overrightarrow{GA_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{G_1A_1}$, $\overrightarrow{GA_2}=\frac{3}{4}\overrightarrow{G_1A_2}$, $\overrightarrow{GA_3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{G_1A_3}$, $\overrightarrow{GA_4}=\frac{3}{4}\overrightarrow{G_1A_4}$,于是

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GA_1}|^2&=\frac{9}{16}|\overrightarrow{G_1A_1}|^2=\frac{1}{16}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4})^2\\&=\frac{1}{16}(|\overrightarrow{A_1A_2}|^2+|\overrightarrow{A_1A_3}|^2+|\overrightarrow{A_1A_4}|^2+2\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}+2\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}+2\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4})\\&=\frac{1}{16}(3|\overrightarrow{A_1A_2}|^2+3|\overrightarrow{A_1A_3}|^2+3|\overrightarrow{A_1A_4}|^2-|\overrightarrow{A_2A_3}|^2-|\overrightarrow{A_2A_4}|^2-|\overrightarrow{A_3A_4}|^2)\end{aligned}$$

类似还有三式. 因此得到

$$\begin{aligned}4R^2&=OA_1^2+OA_2^2+OA_3^2+OA_4^2\\&=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_1})^2+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_2})^2+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_3})^2+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_4})^2\\&=4|\overrightarrow{OG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2+|\overrightarrow{GD}|^2+2\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\overrightarrow{GA_4})\\&=4|\overrightarrow{OG}|^2+|\overrightarrow{GA_1}|^2+|\overrightarrow{GA_2}|^2+|\overrightarrow{GA_3}|^2+|\overrightarrow{GA_4}|^2\\&\quad(\text{注意到}\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\overrightarrow{GA_4}=\mathbf{0})\\&=4|\overrightarrow{OG}|^2+\frac{1}{4}(a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2)\end{aligned}$$

即得

$$|OG|=\frac{\sqrt{16R^2-(a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2)}}{4}$$

下面证明定理 3.

注意到 $|OG|\geqslant 0$,由此便得到

$$16R^2\geqslant a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2$$

当且仅当 $OG=0$,即四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为等面四面体(对棱长相等的四面体)时取等号.

定理 4 $64R^5\geqslant 27\sqrt{(a_{12}a_{34})^2+(a_{13}a_{24})^2+(a_{14}a_{23})^2}V$,当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 由定理 3 和定理 2 得到

$$\begin{aligned}16R^2&\geqslant a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2\\&\geqslant 6\sqrt[3]{a_{12}a_{34}a_{13}a_{24}a_{14}a_{23}}=6\sqrt[3]{P}\\&\geqslant 6\sqrt[3]{8\sqrt{(a_{12}a_{34})^2+(a_{13}a_{24})^2+(a_{14}a_{23})^2}RV}\end{aligned}$$

将以上两边各三次方后化简即得,易知当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

若再应用定理 2 中的不等式便可得到 $R^3\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}V$,这再一次证明了半径为 R 的定球中以内接正四面体的体积为最大.

定理 5(四面体的欧拉不等式) $R\geqslant 3r$,当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 如下两个图,四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外接球球心为 O,图 2 球心 O 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内或边界上,图 3 球心 O 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外,设外心 O 到 $\triangle A_2A_3A_4$,$\triangle A_1A_3A_4$,$\triangle A_1A_2A_4$,$\triangle A_1A_2A_3$ 所在的平面的距离分别为 r_1,r_2,r_3,r_4,从顶点 A_1,A_2,A_3,A_4 分别作四面体的高,其高线分别为 h_1,h_2,h_3,h_4.

从 O,A_1 分别向 $\triangle A_2A_3A_4$ 所在的平面作垂线,垂足分别为 E,H,从 O 向 A_1H(或其延长线)作垂线,垂足为 F,得到 $FH=OE$.

如图 2,有

$$R=A_1O\geqslant A_1F=A_1F+FH-OE=A_1H-OE$$

即 $R\geqslant h_1-r_1$,类似有 $R\geqslant h_2-r_2$,$R\geqslant h_3-r_3$,$R\geqslant h_4-r_4$,又由于

$$S_1h_1+S_2h_2+S_3h_3+S_4h_4=12V,\ S_1r_1+S_2r_2+S_3r_3+S_4r_4=3V$$

于是,得到

$$\begin{aligned}(S_1+S_2+S_3+S_4)R&=S_1R+S_2R+S_3R+S_4R\\&\geqslant(h_1-r_1)S_1+(h_2-r_2)S_2+(h_3-r_3)S_3+(h_4-r_4)S_4\\&=(S_1h_1+S_2h_2+S_3h_3+S_4h_4)-(S_1r_1+S_2r_2+S_3r_3+S_4r_4)\\&=12V-3V=9V\\&=3(S_1+S_2+S_3+S_4)r\end{aligned}$$

因此得到 $R\geqslant 3r$.

如图 3,不妨设外心 O 与顶点分别位于平面 $A_2A_3A_4$ 两侧,用同上方法,有 $R\geqslant h_1+r_1$,$R\geqslant h_2-r_2$,$R\geqslant h_3-r_3$,$R\geqslant h_4-r_4$,又由于

$$\begin{gathered}S_1h_1+S_2h_2+S_3h_3+S_4h_4=12V\\-S_1r_1+S_2r_2+S_3r_3+S_4r_4=3V\end{gathered}$$

于是,得到

$$\begin{aligned}(S_1+S_2+S_3+S_4)R&=S_1R+S_2R+S_3R+S_4R\\&\geqslant(h_1+r_1)S_1+(h_2-r_2)S_2+(h_3-r_3)S_3+(h_4-r_4)S_4\\&=(S_1h_1+S_2h_2+S_3h_3+S_4h_4)-(-S_1r_1+S_2r_2+S_3r_3+S_4r_4)\\&=12V-3V=9V\\&=3(S_1+S_2+S_3+S_4)r\end{aligned}$$

因此得到 $R\geqslant 3r$.

综上,即证得 $R\geqslant 3r$,由以上证明过程可知,当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时取等号.

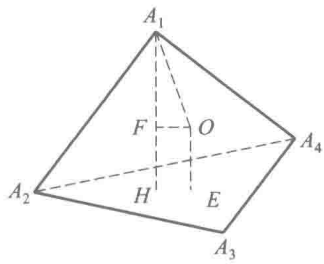

图 2

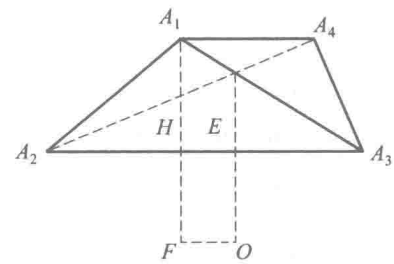

图 3

另一证法见下面定理 10.

定理 6 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 四个顶点 A_1, A_2, A_3, A_4 所对的面的三角形的内切圆半径分别为 r_1, r_2, r_3, r_4，则

$$(S_1+S_2+S_3+S_4)(-S_1+S_2+S_3+S_4) \geqslant \left(\frac{3V}{r_1}\right)^2$$

当且仅当二面角 $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ 都相等时取等号.

类似还有三式.

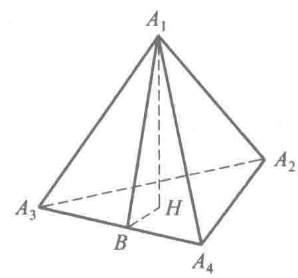

图 4

证明 如图 4，从 A_1 作 $A_1H \perp$ 平面 $A_2A_3A_4$，垂足为 H，再从 A_1 作 $A_1B \perp A_3A_4$，垂足为 B，连 BH，则 $A_1H \perp A_3A_4$（三垂线定理），于是得到

$$A_1H \cdot a_{34} = 2S_2\sin\alpha_{34} = 2\sqrt{(S_2+S_2\cos\alpha_{34})(S_2-S_2\cos\alpha_{34})}$$

同理有

$$A_1H \cdot a_{24} = 2\sqrt{(S_3+S_3\cos\alpha_{24})(S_3-S_3\cos\alpha_{24})}$$
$$A_1H \cdot a_{23} = 2\sqrt{(S_4+S_4\cos\alpha_{23})(S_4-S_4\cos\alpha_{23})}$$

将上述三式左右两边分别相加，并注意到 $A_1H = \dfrac{3V}{S_1}$，$a_{34}+a_{24}+a_{23} = \dfrac{2S_1}{r_1}$，以及四面体中的射影定理，同时再应用柯西不等式，得到

$$\begin{aligned}\frac{3V}{r_1} &= \sqrt{(S_2+S_2\cos\alpha_{34})(S_2-S_2\cos\alpha_{34})} + \sqrt{(S_3+S_3\cos\alpha_{24})(S_3-S_3\cos\alpha_{24})} + \\ &\quad \sqrt{(S_4+S_4\cos\alpha_{23})(S_4-S_4\cos\alpha_{23})} \\ &\leqslant \sqrt{S_2+S_2\cos\alpha_{34}+S_3+S_3\cos\alpha_{24}+S_4+S_4\cos\alpha_{23}} \cdot \\ &\quad \sqrt{S_2-S_2\cos\alpha_{34}+S_3-S_3\cos\alpha_{24}+S_4-S_4\cos\alpha_{23}} \quad \text{（应用柯西不等式）} \\ &= \sqrt{(S_1+S_2+S_3+S_4+S_4)(-S_1+S_2+S_3+S_4+S_4)} \quad \text{（应用射影定理）}\end{aligned}$$

即得所要证的不等式，易知当且仅当二面角 $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ 都相等时取等号.

若注意到三角形中的不等式 $S_1 \geqslant 3\sqrt{3}r_1^2$，便得到以下

定理 7(自创题，2005.06.10) $(S_1+S_2+S_3+S_4)(-S_1+S_2+S_3+S_4) \geqslant \dfrac{27\sqrt{3}V^2}{S_1}$，当且仅当 $\triangle A_2A_3A_4$ 为正三角形，且 $a_{12}=a_{13}=a_{14}$ 时取等号.

类似还有三式.

定理 8(自创题，2005.06.10) $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\dfrac{1}{S_4} \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{9r^2}$，当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 将定理 7 中的四式左右两边相加后得到

$$2(S_1+S_2+S_3+S_4)^2 \geqslant 27\sqrt{3}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4}\right)V^2$$

注意到 $3V=(S_1+S_2+S_3+S_4)r$，因此有

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4}\leqslant\frac{2\,(S_1+S_2+S_3+S_4)^2}{27\sqrt{3}\,V^2}=\frac{2\sqrt{3}}{9r^2}$$

易知当且仅当 $\triangle A_2A_3A_4$ 为正三角形，且 $a_{12}=a_{13}=a_{14}$ 时取等号.

定理 9(自创题,2005.06.10) 记 $P=a_{12}a_{34}a_{13}a_{24}a_{14}a_{23}$，则

$$S_1(-S_1+S_2+S_3+S_4)+S_2(S_1-S_2+S_3+S_4)+S_3(S_1+S_2-S_3+S_4)+S_4(S_1+S_2+S_3-S_4)$$

$$\geqslant\left[\frac{3(a_{12}+a_{34}+a_{13}+a_{24}+a_{14}+a_{23})V}{S_1+S_2+S_3+S_4}\right]^2$$

$$=(a_{12}+a_{34}+a_{13}+a_{24}+a_{14}+a_{23})^2r^2$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 由定理 6 中的不等式，有

$$3(a_{23}+a_{24}+a_{34})V\leqslant 2\sqrt{(S_1+S_2+S_3+S_4)\cdot S_1\cdot S_1\cdot(-S_1+S_2+S_3+S_4)}$$

类似还有三式，将这四式左右两边分别相加，同时应用柯西不等式，即可得到原不等式，易知当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

定理 7，定理 8，定理 9 可参见文[1]. 文[1] 末还提出了如下两个猜想：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{4}S_i(-S_1+S_2+S_3+S_4)\geqslant\frac{6r}{R}\sum\limits_{i=1}^{4}S_i^2$；

(2) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}S_i}{3\sqrt{3}\,r^2}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{-S_1+S_2+S_3+S_4}{S_1}$.

以上两个猜想笔者早已在 1994 年 3 月就提出，但至今未见有人解决.

定理 10 $R^3\geqslant\frac{\sqrt{108}}{32}(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}V\geqslant 27r^3$，当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时，以上各式均取等号.

证明 根据三角形中边长与面积关系不等式 $a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S_1$ 等以及定理 3，得到

$$\begin{aligned}16R^2&\geqslant a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2\\&\geqslant\frac{1}{2}[(a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2)+(a_{13}^2+a_{14}^2+a_{34}^2)+\\&\quad(a_{12}^2+a_{14}^2+a_{24}^2)+(a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2)]\\&\geqslant 2\sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4)\end{aligned}$$

即得

$$R^3\geqslant\frac{\sqrt{108}}{32}(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{3}{2}}$$

应用定理 6 中的不等式

$$(S_1+S_2+S_3+S_4)(-S_1+S_2+S_3+S_4)\geqslant\left(\frac{3V}{r_A}\right)^2$$

得到

$$(S_1+S_2+S_3+S_4)(-S_1+S_2+S_3+S_4)\geqslant\frac{27\sqrt{3}\,V^2}{S_A}$$

类似还有四式，将所得四式左右两边分别相加，便得到

$$2\,(S_1+S_2+S_3+S_4)^2\geqslant 27\sqrt{3}\,V^2\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4}\right)$$

于是，再应用柯西不等式，有

$$\begin{aligned}2\,(S_1+S_2+S_3+S_4)^2&\geqslant 27\sqrt{3}\,V^2\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4}\right)(S_A+S_B+S_C+S_D)\\&\geqslant 16\cdot 27\sqrt{3}\,V^2\end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{\sqrt{108}}{32}(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}V$$

由于 $S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{3V}{r}$,代入上式,并经整理,即得

$$\frac{9\sqrt{3}}{8}V\geqslant 27r^3$$

综上,有 $R^3\geqslant\frac{\sqrt{108}}{32}(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}V\geqslant 27r^3$,并由上证明过程易知当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时,各式均取等号.

由 $R^3\geqslant\frac{\sqrt{108}}{32}(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}V\geqslant 27r^3$,便得到 $R\geqslant 3r$. 在《中学数学》(湖北)1993 年第 7 期,杨学枝文"关联四面体体积与外接球半径的一个不等式的加强"中加强了 $R\geqslant 3r$,得到 $R\sin\theta\geqslant 3r$,其中 θ 为棱 A_1A_2 与 A_3A_4 所成的角.

由 $R^3\geqslant\frac{\sqrt{108}}{32}(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}V\geqslant 27r^3$ 可知,有以下定理 11.

定理 11 在定球内接四面体中,以正四面体表面积最大,且体积也最大.

定理 12(自创题,1989.11.26) 设 x_1,x_2,x_3,x_4 为任意正数,则:

(1)$x_1S_1^2+x_2S_2^2+x_3S_3^2+x_4S_4^2\geqslant\frac{18\sqrt[3]{6}}{4}(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3)^{\frac{1}{3}}\cdot V^{\frac{4}{3}}$;

(2)$S_1S_2S_3S_4\geqslant\frac{27\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x_2x_3x_4S_1^2+x_1x_3x_4S_2^2+x_1x_2x_4S_3^2+x_1x_2x_3S_4^2}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}\right]^{\frac{1}{2}}V^2$;

(3)$S_1S_2S_3S_4\geqslant 54\sqrt{3}\cdot\frac{x_2x_3x_4S_1+x_1x_3x_4S_2+x_1x_2x_4S_3+x_1x_2x_3S_4}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}V^2$.

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$,且四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时以上三式均取等号.

证明 记 $\boldsymbol{s}_1=\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3}$,$\boldsymbol{s}_2=\overrightarrow{A_4A_3}\times\overrightarrow{A_4A_1}$,$\boldsymbol{s}_3=\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2}$,$\boldsymbol{s}_4=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}_4&=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=(\overrightarrow{A_4A_2}-\overrightarrow{A_4A_1})\times(\overrightarrow{A_4A_3}-\overrightarrow{A_4A_1})\\&=\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3}+\overrightarrow{A_4A_3}\times\overrightarrow{A_4A_1}+\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2}\\&=\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{s}_3\end{aligned}$$

设参数 $\lambda\geqslant 0$,一方面由于

$$\begin{aligned}&(\sqrt{x_1}\,\boldsymbol{s}_1-\sqrt{\lambda x_2x_3}\,\boldsymbol{s}_4)^2+(\sqrt{x_2}\,\boldsymbol{s}_2-\sqrt{\lambda x_3x_1}\,\boldsymbol{s}_4)^2+(\sqrt{x_3}\,\boldsymbol{s}_3-\sqrt{\lambda x_1x_2}\,\boldsymbol{s}_4)^2\\&=x_1(\boldsymbol{s}_1)^2+x_2(\boldsymbol{s}_2)^2+x_3(\boldsymbol{s}_3)^2+[\lambda(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)-2\sqrt{\lambda x_1x_2x_3}](\boldsymbol{s}_4)^2\end{aligned}\tag{6}$$

另一方面,根据算术-几何平均值不等式及向量不等式

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\geqslant|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$$

有

$$\begin{aligned}&(\sqrt{x_1}\,\boldsymbol{s}_1-\sqrt{\lambda x_2x_3}\,\boldsymbol{s}_4)^2+(\sqrt{x_2}\,\boldsymbol{s}_2-\sqrt{\lambda x_3x_1}\,\boldsymbol{s}_4)^2+(\sqrt{x_3}\,\boldsymbol{s}_3-\sqrt{\lambda x_1x_2}\,\boldsymbol{s}_4)^2\\&\geqslant 3[(\sqrt{x_1}\,\boldsymbol{s}_1-\sqrt{\lambda x_2x_3}\,\boldsymbol{s}_4)^2\cdot(\sqrt{x_2}\,\boldsymbol{s}_2-\sqrt{\lambda x_3x_1}\,\boldsymbol{s}_4)^2\cdot(\sqrt{x_3}\,\boldsymbol{s}_3-\sqrt{\lambda x_1x_2}\,\boldsymbol{s}_4)^2]^{\frac{1}{3}}\\&\geqslant 3[|(\sqrt{x_1}\,\boldsymbol{s}_1-\sqrt{\lambda x_2x_3}\,\boldsymbol{s}_4)\times(\sqrt{x_2}\,\boldsymbol{s}_2-\sqrt{\lambda x_3x_1}\,\boldsymbol{s}_4)\cdot(\sqrt{x_3}\,\boldsymbol{s}_3-\sqrt{\lambda x_1x_2}\,\boldsymbol{s}_4)|]^{\frac{2}{3}}\\&=3[|\sqrt{x_1x_2x_3}-\sqrt{\lambda}(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)|]^{\frac{2}{3}}\cdot[|(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\boldsymbol{s}_3|]^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\tag{7}$$

由(6),(7)两式可以得到

$$\begin{aligned}&x_1(\boldsymbol{s}_1)^2+x_2(\boldsymbol{s}_2)^2+x_3(\boldsymbol{s}_3)^2+[\lambda(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)-2\sqrt{\lambda x_1x_2x_3}](\boldsymbol{s}_4)^2\\&\geqslant 3[|\sqrt{x_1x_2x_3}-\sqrt{\lambda}(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)|]^{\frac{2}{3}}\cdot[|(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\boldsymbol{s}_3|]^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\tag{8}$$

为了确定参数 λ 值，我们令

$$\lambda(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)-2\sqrt{\lambda x_1x_2x_3}=x_4$$

可求得

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\sqrt{x_1x_2x_3}+\sqrt{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}}{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}$$

代入式(8) 并整理，得到

$$\begin{aligned}&x_1(\boldsymbol{s}_1)^2+x_2(\boldsymbol{s}_2)^2+x_3(\boldsymbol{s}_3)^2+x_4(\boldsymbol{s}_4)^2\\ \geqslant{}&3(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4)^{\frac{1}{3}}\cdot[|\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3|]^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

但由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3|&=|(\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3})\times(\overrightarrow{A_4A_3}\times\overrightarrow{A_4A_1})\cdot(\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2})|\\&=[|(\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2})\cdot\overrightarrow{A_4A_3}|]^2\\&=(6V)^2\end{aligned}$$

因此得到(1) 中不等式.

再用 $x_1s_2^2s_3^2s_4^2,x_2s_1^2s_3^2s_4^2,x_3s_1^2s_2^2s_4^2,x_4s_1^2s_2^2s_3^2$ 分别置换(1) 中不等式的 x_1,x_2,x_3,x_4，并整理便得到(2) 中不等式.

由(2) 的不等式，得到

$$\begin{aligned}S_1S_2S_3S_4&\geqslant\frac{27\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x_2x_3x_4S_1^2+x_1x_3x_4S_2^2+x_1x_2x_4S_3^2+x_1x_2x_3S_4^2}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}\right]^{\frac{1}{2}}V^2\\&=\frac{27\sqrt{3}}{2}\frac{[(x_1+x_2+x_3+x_4)^3(x_2x_3x_4S_1^2+x_1x_3x_4S_2^2+x_1x_2x_4S_3^2+x_1x_2x_3S_4^2)]^{\frac{1}{2}}}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}V^2\\&\geqslant\frac{27\sqrt{3}}{2}\frac{[16(\sum x_2x_3x_4)\cdot(\sum x_2x_3x_4S_1^2)]^{\frac{1}{2}}}{(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i)^3}V^2\\&=54\sqrt{3}\cdot\frac{x_2x_3x_4S_1+x_1x_3x_4S_2+x_1x_2x_4S_3+x_1x_2x_3S_4}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}V^2\end{aligned}$$

特例：$S_1S_2S_3S_4\geqslant\frac{27\sqrt{3}}{16}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4}S_i^2V^2}\geqslant\frac{81\sqrt[3]{9}}{16}V^{\frac{8}{3}}$，当且仅当四面体为正四面体时取等号.

本定理可参见文[3]，[4].

定理 13(自创题，1989.11.26) 若四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内一点 P 到四个面 $A_2A_3A_4,A_1A_3A_4,A_1A_2A_4,A_1A_2A_3$ 的距离分别为 r_1,r_2,r_3,r_4，则

$$V\geqslant 2\sqrt{3}(r_2r_3r_4+r_1r_3r_4+r_1r_2r_4+r_1r_2r_3)$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体，且 P 为其中心时取等号.

证明 在以上定理 12(3) 中，令 $x_i=S_ir_i(i=1,2,3,4)$，即得(详证略)[5].

特例：$V\geqslant 8\sqrt{3}r^3$.

定理 14(自创题，1992.03.07) 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，设 α_{ij} 表示隶属于棱 $A_iA_j(i,j=1,2,3,4,i\neq j)$ 的二面角，x_1,x_2,x_3,x_4 是任意实数，则

$$\begin{aligned}&x_1x_2\cos\alpha_{34}+x_1x_3\cos\alpha_{24}+x_1x_4\cos\alpha_{23}+x_2x_3\cos\alpha_{14}+x_2x_4\cos\alpha_{13}+x_3x_4\cos\alpha_{12}\\ \leqslant{}&\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{x_1}{S_1}=\frac{x_2}{S_2}=\frac{x_3}{S_3}=\frac{x_4}{S_4}$ 时取等号.

证明 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球的半径为 1，球心 O 对应于零向量，内切球与顶点 $A_i(i=1,2,3,4)$ 所对的面分别切于点 $A_i'(i=1,2,3,4)$，则有

$$\overrightarrow{OA_1'}\cdot\overrightarrow{OA_2'}=\cos\angle A_1'OA_2'=-\cos\alpha_{34}$$

于是

$$0 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{4} x_i \overrightarrow{OA_i}'\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} x_i x_j (\overrightarrow{OA_i}' \cdot \overrightarrow{OA_j}')$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2\cos\alpha_{34} - 2x_1x_3\cos\alpha_{24} - 2x_1x_4\cos\alpha_{23} -$$
$$2x_2x_3\cos\alpha_{14} - 2x_2x_4\cos\alpha_{13} - 2x_3x_4\cos\alpha_{12}$$

即得原不等式.

由以上证明中可知,当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球球心 O 满足以下向量式

$$x_1\overrightarrow{OA_1}' + x_2\overrightarrow{OA_2}' + x_3\overrightarrow{OA_3}' + x_4\overrightarrow{OA_4}' = \mathbf{0} \tag{9}$$

这时原不等式取等号.

下面我们证明式(9) 与$\frac{x_1}{S_1}=\frac{x_2}{S_2}=\frac{x_3}{S_3}=\frac{x_4}{S_4}$ 等价.

事实上,由向量外积意义可知

$$S_1\overrightarrow{OA_1}' = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_3}\times\overrightarrow{A_2A_4},\ S_2\overrightarrow{OA_2}' = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A_1}\times\overrightarrow{A_3A_4}$$

$$S_3\overrightarrow{OA_3}' = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2},\ S_4\overrightarrow{OA_4}' = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_2}$$

另外,易知

$$\overrightarrow{A_2A_3}\times\overrightarrow{A_2A_4} + \overrightarrow{A_3A_1}\times\overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{0}$$

因此,得到

$$S_1\overrightarrow{OA_1}' + S_2\overrightarrow{OA_2}' + S_3\overrightarrow{OA_3}' + S_4\overrightarrow{OA_4}' = \mathbf{0} \tag{10}$$

比较(9),(10) 两式的向量式系数,即得$\frac{x_1}{S_1}=\frac{x_2}{S_2}=\frac{x_3}{S_3}=\frac{x_4}{S_4}$. 由此可知,定理 14 中的不等式当且仅当$\frac{x_1}{S_1}=\frac{x_2}{S_2}=\frac{x_3}{S_3}=\frac{x_4}{S_4}$ 时取等号.

以上证法很容易将定理 14 中的不等式向 n 维空间推广.

最后顺便指出,在文[6] 中,对于定理 14 中的不等式要求 x_1,x_2,x_3,x_4 为正数,我们已将它放宽为任意实数. 另外,文[6] 中,对于定理 14 中的不等式的取等号条件有误,这容易从文[6] 作者的证明中看出,应予以纠正.

定理 15(自创题,1990.08.04) 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,以 A_iA_j 为棱的二面角为 α_{ij},四面体 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 中,以 $A_i'A_j'$ 为棱的二面角为 α_{ij}',上述 $i,j=1,2,3,4,i\neq j$,x_1,x_2,x_3,x_4 是任意实数,则

$$x_1x_2\sin\alpha_{34}\sin\alpha_{34}' + x_1x_3\sin\alpha_{24}\sin\alpha_{24}' + x_1x_4\sin\alpha_{23}\sin\alpha_{23}' +$$
$$x_2x_3\sin\alpha_{14}\sin\alpha_{14}' + x_2x_4\sin\alpha_{13}\sin\alpha_{13}' + x_3x_4\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{12}'$$
$$\leqslant \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$$

当且仅当 $\alpha_{ij}=\alpha_{ij}'(i,j=1,2,3,4,i\neq j)$,且

$$\frac{S_1S_2\cos\alpha_{12}}{x_1x_2} = \frac{S_1S_3\cos\alpha_{13}}{x_1x_3} = \frac{S_1S_4\cos\alpha_{14}}{x_1x_4} = \frac{S_2S_3\cos\alpha_{23}}{x_2x_3} = \frac{S_2S_4\cos\alpha_{24}}{x_2x_4} = \frac{S_3S_4\cos\alpha_{34}}{x_3x_4}$$

时取等号.

证明 先证明以下引理 6.

引理 6 设 x_1,x_2,x_3,x_4 是任意实数,则

$$x_1x_2\sin^2\alpha_{34} + x_1x_3\sin^2\alpha_{24} + x_1x_4\sin^2\alpha_{23} + x_2x_3\sin^2\alpha_{14} + x_2x_4\sin^2\alpha_{13} + x_3x_4\sin^2\alpha_{12}$$
$$\leqslant \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$$

当且仅当

$$\frac{S_1S_2\cos\alpha_{12}}{x_1x_2} = \frac{S_1S_3\cos\alpha_{13}}{x_1x_3} = \frac{S_1S_4\cos\alpha_{14}}{x_1x_4} = \frac{S_2S_3\cos\alpha_{23}}{x_2x_3} = \frac{S_2S_4\cos\alpha_{24}}{x_2x_4} = \frac{S_3S_4\cos\alpha_{34}}{x_3x_4}$$

时取等号.

证明 应用三角等式$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$,则引理6中的不等式等价于

$$x_1x_2\cos^2\alpha_{34}+x_1x_3\cos^2\alpha_{24}+x_1x_4\cos^2\alpha_{23}+x_2x_3\cos^2\alpha_{14}+x_2x_4\cos^2\alpha_{13}+x_3x_4\cos^2\alpha_{12}$$
$$\geqslant\frac{1}{3}(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2)\tag{11}$$

应用四面体的射影定理以及柯西不等式,有

$$S_1^2=(S_2\cos\alpha_{34}+S_3\cos\alpha_{24}+S_4\cos\alpha_{23})^2$$
$$\leqslant(x_1x_2\cos\alpha_{34}+x_1x_3\cos\alpha_{24}+x_1x_4\cos\alpha_{23})\cdot\left(\frac{S_2^2}{x_1x_2}+\frac{S_3^2}{x_1x_3}+\frac{S_4^2}{x_1x_4}\right)$$

即

$$x_1x_2\cos\alpha_{34}+x_1x_3\cos\alpha_{24}+x_1x_4\cos\alpha_{23}\geqslant\frac{\frac{S_1^2}{x_1}}{\frac{S_2^2}{x_2}+\frac{S_3^2}{x_3}+\frac{S_4^2}{x_4}}\cdot x_1^2$$

当且仅当$\frac{S_2S_3\cos\alpha_{23}}{x_2x_3}=\frac{S_2S_4\cos\alpha_{24}}{x_2x_4}=\frac{S_3S_4\cos\alpha_{34}}{x_3x_4}$时取等号.

应用相同的方法,还可以得到类似的其他三个不等式,将所得到的四个不等式左右两边分别相加,并再一次应用柯西不等式,便得到

$$2(x_1x_2\cos^2\alpha_{34}+x_1x_3\cos^2\alpha_{24}+x_1x_4\cos^2\alpha_{23}+x_2x_3\cos^2\alpha_{14}+x_2x_4\cos^2\alpha_{13}+x_3x_4\cos^2\alpha_{12})$$
$$\geqslant\frac{\frac{S_1^2}{x_1}}{\frac{S_2^2}{x_2}+\frac{S_3^2}{x_3}+\frac{S_4^2}{x_4}}\cdot x_1^2+\frac{\frac{S_2^2}{x_2}}{\frac{S_1^2}{x_1}+\frac{S_3^2}{x_3}+\frac{S_4^2}{x_4}}\cdot x_1^2+\frac{\frac{S_3^2}{x_3}}{\frac{S_1^2}{x_1}+\frac{S_2^2}{x_2}+\frac{S_4^2}{x_4}}\cdot x_1^2+\frac{\frac{S_4^2}{x_4}}{\frac{S_1^2}{x_1}+\frac{S_2^2}{x_2}+\frac{S_3^2}{x_3}}\cdot x_1^2\tag{12}$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(p-\frac{S_1^2}{x_1}\right)+\left(p-\frac{S_2^2}{x_2}\right)+\left(p-\frac{S_3^2}{x_3}\right)+\left(p-\frac{S_4^2}{x_4}\right)\right]\cdot$$
$$\left[\frac{x_1^2}{p-\frac{S_1^2}{x_1}}+\frac{x_2^2}{p-\frac{S_2^2}{x_2}}+\frac{x_3^2}{p-\frac{S_3^2}{x_3}}+\frac{x_4^2}{p-\frac{S_4^2}{x_4}}\right]-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

(这里 $p=\frac{S_1^2}{x_1}+\frac{S_2^2}{x_2}+\frac{S_3^2}{x_3}+\frac{S_4^2}{x_4}$)

$$\geqslant\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\tag{13}$$
$$=\frac{2}{3}(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2)$$

即得式(11).

由以上证明过程可知,式(12)当且仅当

$$\frac{S_1S_2\cos\alpha_{12}}{x_1x_2}=\frac{S_1S_3\cos\alpha_{13}}{x_1x_3}=\frac{S_1S_4\cos\alpha_{14}}{x_1x_4}=\frac{S_2S_3\cos\alpha_{23}}{x_2x_3}=\frac{S_2S_4\cos\alpha_{24}}{x_2x_4}=\frac{S_3S_4\cos\alpha_{34}}{x_3x_4}\tag{14}$$

时取等号;式(13)当且仅当

$$\frac{1}{x_1}\left(p-\frac{S_1^2}{x_1}\right)=\frac{1}{x_2}\left(p-\frac{S_2^2}{x_2}\right)=\frac{1}{x_3}\left(p-\frac{S_3^2}{x_3}\right)=\frac{1}{x_4}\left(p-\frac{S_4^2}{x_4}\right)$$

即

$$\frac{S_2^2}{x_1x_2}+\frac{S_3^2}{x_1x_3}+\frac{S_4^2}{x_1x_4}=\frac{S_1^2}{x_1x_2}+\frac{S_3^2}{x_2x_3}+\frac{S_4^2}{x_2x_4}=\frac{S_1^2}{x_1x_3}+\frac{S_2^2}{x_2x_3}+\frac{S_4^2}{x_3x_4}=\frac{S_1^2}{x_1x_4}+\frac{S_2^2}{x_2x_4}+\frac{S_3^2}{x_3x_4}\tag{15}$$

时取等号.

下面证明式(15)可以由式(14)推得.

事实上,若设式(14)中诸式都等于λ,则有$\cos\alpha_{23}=\frac{x_2x_3}{S_2S_3}\lambda$,$\cos\alpha_{24}=\frac{x_2x_4}{S_2S_4}\lambda$,$\cos\alpha_{34}=\frac{x_3x_4}{S_3S_4}\lambda$,将它们分