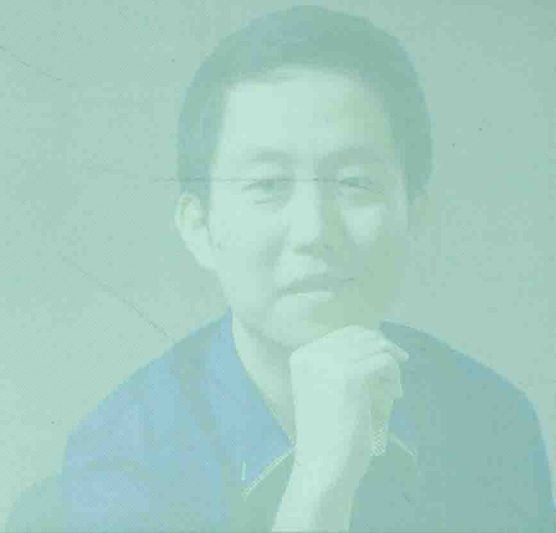
[张宇带你学系列丛书]



张宇带你学

高等数学·同济七版

（上册）

张宇◎主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世纪云图

理工社®

张宇带你学

高等数学·同济七版

（上册）

张宇◎主编 | 朱杰 高昆轮◎副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

张宇带你学高等数学：同济7版. 上册/张宇主编. — 北京：北京理工大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5682-0941-0

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第183748号

出版发行/北京理工大学出版社有限责任公司
社 址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮 编/100081
电 话/(010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网 址/http://www.bitpress.com.cn
经 销/全国各地新华书店
印 刷/三河市文阁印刷有限公司
开 本/787毫米×1092毫米 1/16
印 张/20.5
字 数/510千字
版 次/2015年8月第1版 2015年8月第1次印刷
定 价/42.80元

责任编辑/陈莉华
文案编辑/陈莉华
责任校对/周瑞红
责任印制/边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前言
PREFACE

刚开始准备考研数学复习的同学通常都会面对两个重要问题,基础复习阶段看什么教材?怎么看?

先说第一个问题——看什么教材?虽然考研数学没有指定教材,全国各高校的大学教材又是五花八门,百家争鸣,但特别值得关注的一套教材是:同济大学数学系编写的《高等数学(第七版)》《线性代数(第六版)》、浙江大学编写的《概率论与数理统计(第四版)》.这套教材是全国首批示范性教材,是众多高校教学专家集体智慧的结晶,我建议同学们把这套教材作为考研基础复习阶段的资料.

再说第二个问题——怎么看这套教材?看什么,一句话就能说清楚;怎么看,才是学问.这里有两个关键.

第一,这套教材是按照教育部的《本科教学大纲》编写的,而考研试题是按照教育部的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》命制的,这两个大纲不完全一样.比如说高等数学第一章用极限的定义求函数极限可能在本科阶段就是同学们首先遇到的一个难以理解的问题,甚至很多人看到那里就已经在心里深深地埋下了一种可怕的恐惧感,但事实上,这个问题于考研是基本不作要求的;再如斜渐近线的问题在本科阶段基本不作为重点内容考查,但在考研大纲里却是命题人手里的香饽饽,类似问题还有很多;第二,针对考研,这套教材里的例题与习题有重点、非重点,也有难点、非难点;有些知识点配备的例题与习题重复了,有些知识点配备的例题与习题还不够.

这套"张宇带你学系列丛书"就是为了让同学们读好这套教材而编写的.细致说来,本书有如下四个特点:

第一,章节同步导学.本书在每一章开篇给同学们列出了此章每一节的教材内容与相应的考研要求,用以体现本科教学要求与考研要求的差异,同时精要地指出每一节及章末必做的例题和习题,可针对性地增强重点内容的复习.

第二,知识结构网图.本部分列出了本章学习的知识体系,宏观上把握各知识点的内容与联系,同时简明扼要地指出了本章学习的重点与难点等.

第三,课后习题全解.这一部分主要是为同学们做习题提供一个参照与提示,本部分给出了课后习题的全面解析,其中有的解答方法是我们众多老师在辅导过程中自己总结归纳的灵活与新颖性解法.但我还是建议同学们先自己认真独立思考习题再去翻看解答以作对比或提示之用.

第四,经典例题选讲.每一章最后部分都配有不同数量的经典例题,这部分例题较之书后习题不

论综合性还是灵活性都有所提高，目的也正如上面所谈让同学们慢慢接触考研类试题的特点与深度，逐步走向考研的要求，本部分例题及部分理论的说明等内容希望同学们认真体会并化为己有.

需要指出的是，考研大纲和本科教学大纲均不作要求的章节，本书也未收录.

总之，本书作为“张宇考研数学系列丛书”的基础篇，既可作为大学本科学习的一个重要参考，也是架起教材与《张宇高等数学 18 讲》《张宇线性代数 9 讲》《张宇概率论与数理统计 9 讲》及后续书籍的一座重要桥梁. 我深信，认真研读学习本书的同学在基础阶段的复习必会事半功倍.

张宇

2015 年 8 月于北京

目录
CONTENTS

第六章　定积分的应用

第七章　微分方程

第一章　函数与极限

章节同步导学

章节	教材内容	考纲要求	必做例题	必做习题
§1.1 映射与函数	映射	考研不作要求		P16 习题 1—1：1(3)(5)(7)，2(3)，3，4(2)，6(2)，12，13
	函数、复合函数及分段函数的概念	理解	例 5～10	
	函数的表示法	掌握		
	函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性，反函数、初等函数的概念	了解		
	基本初等函数的性质及其图形	掌握		
	建立应用问题的函数关系	会		
§1.2 数列的极限	数列极限的定义	理解(数一数二) 了解(数三)【难点】		P26 习题 1—2：1(2)(6)(8)
	收敛数列的性质	了解		
§1.3 函数的极限	单侧极限以及左、右极限与极限存在的关系	理解(数一数二) 了解(数三)【难点】	例 6	P33 习题 1—3：1(2)，2，3(1)，4
	函数极限的性质	掌握(数一数二) 了解(数三)		
§1.4 无穷小与无穷大	无穷小的概念	理解		P37 习题 1—4：4，6
	无穷大的概念	理解(数一数二) 了解(数三)		
§1.5 极限运算法则	无穷小的基本性质	理解	例 1～8	P45 习题 1—5：1(3)(5)(11)(13)，2(1)，3，4，5
	极限的性质	掌握(数一数二) 了解(数三)		
	极限的四则运算法则	掌握		

续表

章节	教材内容	考纲要求	必做例题	必做习题
§1.6 极限存在准则 两个重要极限	极限存在的两个准则(夹逼准则、单调有界数列必有极限)	掌握(数一数二) 了解(数三)		P52 习题 1—6: 1(4)(6),2,4
	利用两个重要极限求极限的方法	掌握【重点】	例 1～4	
	柯西审敛原理	考研不作要求		
§1.7 无穷小的比较	无穷小阶的定义及无穷小量的比较方法	掌握【重点】	例 1～5 (熟记例 1,2 的结论)	P55 习题 1—7: 1,3,4(1),5
	一些重要的等价无穷小及其性质			
§1.8 函数的连续性与间断点	函数连续性的概念(含左连续与右连续)	理解【重点】		P61 习题 1—8: 3(1),4,5
	函数间断点的分类与判别(第一类间断点与第二类间断点)	会【重点】	例 1～5	
§1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性	连续函数的和、差、积、商的连续性	了解(会利用连续性求极限)	例 1	P65 习题 1—9: 3(3)(5)(7)(8), 4(4)(5)(6)(7)(8), 5,6
	反函数与复合函数的连续性		例 2～4	
	初等函数的连续性		例 5～8	
§1.10 闭区间上连续函数的性质	有界性与最大值最小值定理,零点定理与介值定理	理解【重点】(会灵活应用这些性质)	例 1	P70 习题 1—10: 1,2,3,4,5
	一致连续性	考研不作要求		
总习题一	总结归纳本章的基本概念、基本定理、基本公式、基本方法			P70 总习题一: 3,5,9(2)(4)(6)(7)(8),10,11,12,13,14

知识结构网图

- 函数
  - 定义：三要素
  - 函数的运算
    - 四则运算
    - 复合函数
    - 反函数
  - 函数的性质
    - 单调性
    - 周期性
    - 奇偶性
    - 有界性
  - 初等函数
- 极限
  - 定义
    - 数列极限
    - 函数极限
    - 无穷小与无穷大
  - 性质
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 保号性
  - 重要公式、定理
    - 极限的四则运算
    - 两个重要极限
    - 两个收敛准则
      - 夹逼定理
      - 单调有界收敛定理
  - 无穷小的比较
- 连续
  - 连续性
    - 函数在一点连续
    - 函数在一个开区间上连续
    - 函数在一个闭区间上连续
  - 间断点
    - 定义
    - 分类
      - 第一类
        - 可去间断点
        - 跳跃间断点
      - 第二类
        - 无穷间断点
        - 振荡间断点
  - 闭区间上连续函数的性质
    - 有界性
    - 最值定理
    - 介值定理(零点存在定理)

本章讲解高等数学中最基本的概念——函数以及极限的相关概念，是整个学科的基础. 其中，函数是高等数学的研究对象，其重要性不言而喻. 这一部分主要是对中学期间初等数学相关内容的复习和回顾，难度不大. 高等数学是一门关于极限的学科，学科中的所有主要概念(导数、积分、级数)本质上都是特殊形式的极限. 因此正确理解极限的概念，掌握极限的相关运算法则就成了学好整个学科的关键. 极限分为函数极限与数列极限，其中函数极限又分为左极限、右极限等多种特殊形式，它们有相似的定义和性质，同学们要把握其中规律，学会举一反三. 学习极限的核心任务是极限的计算，同学们要多加练习，掌握常用的计算方法，同时要注意遵循基本的运算法则，在学习之初就养成

良好的思维习惯.函数的连续性是通过极限定义的,讨论函数的连续性也就是计算函数的极限.对间断点的分类要记住分类标准,并能进行简单的判断.最后,闭区间上连续函数具有一些良好的性质,同学们要记住相关的定理,并学会用它们进行简单的分析证明.

课后习题全解

习题 1-1 映射与函数

1.求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$; (2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y=\sin\sqrt{x}$; (6) $y=\tan(x+1)$;

(7) $y=\arcsin(x-3)$; (8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

(9) $y=\ln(x+1)$; (10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

【解析】(1) $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$,即定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$,即定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$,即定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0\Rightarrow |x|<2$,即定义域为$(-2,2)$.

(5) $x\geqslant 0$,即定义域为$[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7) $|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$,即定义域为$[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$,即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0\Rightarrow x>-1$,即定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$,即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

【注】本题是求函数的自然定义域,一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域,再求出这些定义域的交集,即得所求定义域.下列简单函数及其定义域是经常用到的:

$y=\dfrac{Q(x)}{P(x)},P(x)\neq 0$;

$y=\sqrt[2n]{x},x\geqslant 0$;

$y=\log_a x,x>0$;

$y=\tan x,x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi,k\in\mathbf{Z}$;

$y=\cot x,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$;

$y=\arcsin x,|x|\leqslant 1$;

$y=\arccos x,|x|\leqslant 1$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

【解析】(1)不同，因为 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$，$g(x)$ 的定义域为 $x>0$.

(2)不同，因为对应法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(3)相同，因为定义域、对应法则均相同.

(4)不同，因为 $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x=\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$ 分母不能为 0，要求 $x\neq k\pi+\dfrac{1}{2}\pi$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不同.

3. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

【解析】可用直接代入法来求.

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2)=0.$$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

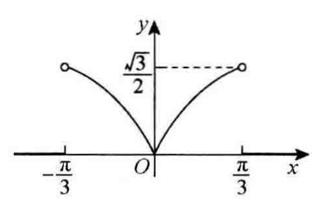


图 1-1

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$　$(-\infty,1)$；

(2) $y=x+\ln x$　$(0,+\infty)$.

【证明】(1)对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2<1$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}>0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2)对 $\forall x_2>x_1>0$，有 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$，$x_2-x_1>0$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2+\ln x_2)-(x_1+\ln x_1)=(x_2-x_1)+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

【证明】设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，则必有 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，且 $-x_2<-x_1$.

由 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,可得 $f(-x_2)<f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数,所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$, $f(-x_1)=-f(x_1)$,即 $-f(x_2)<-f(x_1)$,因此 $f(x_1)<f(x_2)$.

这就证明了对于 $(-l,0)$ 内任取的 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$. 因此,$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

【证明】(1)设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 都是偶函数, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 都是奇函数.

令
$$F(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad G(x)=g_1(x)+g_2(x),$$
则
$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$
所以 $F(x)$ 为偶函数.
$$\begin{aligned}G(-x)&=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)+[-g_2(x)]\\&=-[g_1(x)+g_2(x)]=-G(x),\end{aligned}$$
所以 $G(x)$ 为奇函数.

(2)设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 都是偶函数, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 都是奇函数.

令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$, $\quad G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$, $\quad H(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$,

则
$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x),$$
所以 $F(x)$ 为偶函数.
$$\begin{aligned}G(-x)&=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]\\&=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),\end{aligned}$$
所以 $G(x)$ 为偶函数.
$$\begin{aligned}H(-x)&=f_1(-x)\cdot g_1(-x)=f_1(x)\cdot[-g_1(x)]\\&=-f_1(x)\cdot g_1(x)=-H(x),\end{aligned}$$
所以 $H(x)$ 为奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$; (2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; (4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$; (6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

【解析】(1) $y=f(x)=x^2(1-x^2)$,因为
$$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x),$$
所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y=f(x)=3x^2-x^3$,因为
$$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3,$$
$$f(-x)\neq f(x),\text{且 } f(-x)\neq -f(x),$$
所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,因为
$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$，因为

$$f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$，因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1,$$

$$f(-x)\neq f(x)，且\ f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，因为

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；

(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；

(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

【解析】(1)是周期函数，周期 $l=2\pi$.

(2)是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3)是周期函数，周期 $l=2$.

(4)不是周期函数.

(5)是周期函数，周期 $l=\pi$.

9. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0)$；

(4) $y=2\sin 3x\quad\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；

(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【分析】函数 f 存在反函数的前提条件为：$f:D\to f(D)$ 是单射. 本题中所给出的各函数易证均为单射，特别是(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数，故都存在反函数.

【解析】(1)将 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 改写为 $x=\sqrt[3]{y+1}$，再解出得 $y=x^3-1$.

(2)将 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 改写为 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，再解出得 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3)将 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 改写为 $x=\dfrac{ay+b}{cy+d}$，再解出得 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4)将 $y=2\sin 3x$ 改写为 $x=2\sin 3y$，再解出得 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5)将 $y=1+\ln(x+2)$ 改写为 $x=1+\ln(y+2)$，再解出得 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(6)将 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 改写为 $x=\dfrac{2^y}{2^y+1}$，再解出得 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证明】 充分性：若 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则存在 k_1,k_2 使对 $\forall x\in X$ 有

$$f(x)\leqslant k_1 \text{ 且 } f(x)\geqslant k_2,\text{即 } k_2\leqslant f(x)\leqslant k_1.$$

取 $M=\max\{|k_1|,|k_2|\}$，显然 $\forall x\in X,|f(x)|\leqslant M$，故 $f(x)$ 在 X 上有界.

必要性：若 $f(x)$ 在 X 上有界，则存在 $M>0$，使对 $\forall x\in X$ 有

$$|f(x)|\leqslant M,\text{即} -M\leqslant f(x)\leqslant M,$$

故 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

11. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$；

(4) $y=\mathrm{e}^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$；

(5) $y=u^2,u=\mathrm{e}^x,x_1=1,x_2=-1$.

【解析】 (1) $y=\sin^2 x,y_1=\dfrac{1}{4},y_2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x,y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_2=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{2},y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=\mathrm{e}^{x^2},y_1=1,y_2=\mathrm{e}$.

(5) $y=\mathrm{e}^{2x},y_1=\mathrm{e}^2,y_2=\mathrm{e}^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$；

(2) $f(x+a)\quad(a>0)$；　　(4) $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$.

【解析】 (1) 由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(2) 由 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$.

(3) 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$，故 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-a,1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$ 注意到 $a>0$，只可能有两种情形：

当 $1-a<a$ 时，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，上面不等式组无解；

当 $1-a\geqslant a$ 时，即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，上面不等式组的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$.

故 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是 $[a,1-a]\quad(0<a\leqslant\dfrac{1}{2})$.

13. 设
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1.\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$
求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

【解析】
$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$
$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$
$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形分别如图 1－2(1)，图 1－2(2)所示.

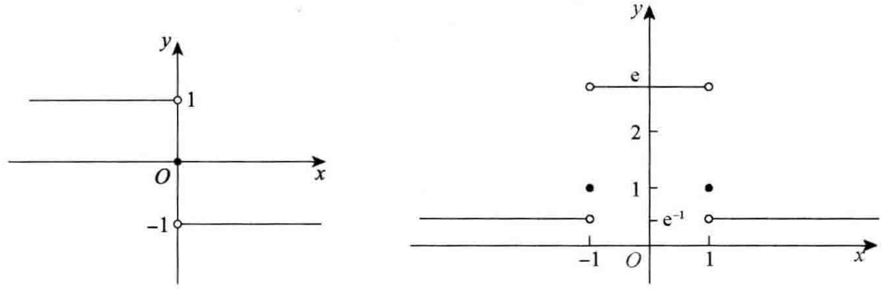


图 1－2

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$（如图 1－3 所示）. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

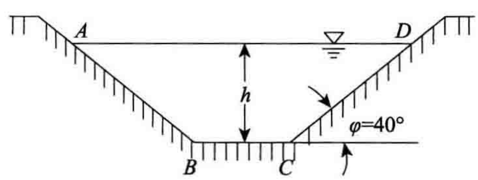


图 1－3

【解析】如图 1－3 所示，$AB=CD$，$S_0=\frac{1}{2}h(BC+AD)$，
$$h=CD\sin\varphi, BC=b, AD=b+2CD\cos\varphi,$$
从而
$$S_0=\frac{h}{2}\left(b+b+2\frac{h}{\sin\varphi}\cos\varphi\right)=h(b+h\cot\varphi). \qquad ①$$
又由于
$$L=AB+BC+CD=b+2CD=b+\frac{2h}{\sin\varphi}, \qquad ②$$
由①、②式消去 b 得
$$S_0=h\left(L-\frac{2h}{\sin\varphi}+h\cot\varphi\right),$$
从而有
$$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2h}{\sin\varphi}-h\cot\varphi,$$
即 $L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40°}{\sin 40°}h$ 为所求周长 L 与水深 h 之间的函数关系式.

由题意可知，其定义域由 $h>0$ 和 $b>0$ 所确定，由①式可知 $b=\frac{S_0}{h}-h\cot 40°>0$，从而 $h^2<S_0\tan 40°$，所以 $0<h<\sqrt{S_0\tan 40°}$，所求定义域为 $(0,\sqrt{S_0\tan 40°})$.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及直线 $l:x+y=t(t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表

示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

【解析】当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,$S(t)=\frac{1}{2}t^2$;

当 $1<t\leqslant 2$ 时,$S(t)=1-\frac{1}{2}(2-t)^2=-\frac{1}{2}t^2+2t-1$;

当 $t>2$ 时,$S(t)=1$.

故

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

16. 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式,并求

(1)90 ℉的等价摄氏温度和 -5 ℃的等价华氏温度;

(2)是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的?如果存在,那么该温度值是多少?

【解析】设 $F=mC+b$,其中 m,b 均为常数.

因为 $F=32°$ 相当于 $C=0°$,$F=212°$ 相当于 $C=100°$,所以

$$b=32,m=\frac{212-32}{100}=1.8.$$

故

$$F=1.8C+32 \text{ 或 } C=\frac{5}{9}(F-32).$$

(1)$F=90°$, $C=\frac{5}{9}(90-32)\approx 32.2°$.

$$C=-5°,\quad F=1.8\times(-5)+32=23°.$$

(2)设温度值 t 符合题意,则有

$$t=1.8t+32,\qquad t=-40.$$

即华氏 $-40°$ 恰好也是摄氏 $-40°$.

17. 已知 Rt△ABC 中,直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15,动点 P 从 C 出发,沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动;动点 Q 从 C 出发,沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动,移动到两动点相遇时为止,且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍.设动点 P 移动的距离为 x,△CPQ 的面积为 y,试求 y 与 x 之间的函数关系.

【解析】因为 $AC=20,BC=15$,所以,$AB=\sqrt{20^2+15^2}=25$.

由 $20<2\times 15<20+25$ 可知,点 P、Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x+2x=15+20+25$,得 $x=20$.即当 $x=20$ 时,点 P、Q 相遇.

因此,所求函数的定义域为 $(0,20)$.

(1)当 $0<x<10$ 时,点 P 在 CB 上,点 Q 在 CA 上(如图 1-4 所示).

由 $CP=x,CQ=2x$,得

$$y=x^2.$$

(2)当 $10\leqslant x\leqslant 15$ 时,点 P 在 CB 上,点 Q 在 AB 上(如图 1-5 所示).

$$CP=x,AQ=2x-20.$$

设点 Q 到 BC 的距离为 h,则