



◎ 陈效师 编著 ◎

解几何图形 趣题



XIAO XUE SHENG QIAO XUE QIAO JI CONG SHU

◎ 同心出版社

小学生巧学巧记丛书

小学生巧学巧记丛书

主编 京夫 江燕

巧解几何图形趣题

陈效师 编著



同心出版社

图书在版编目(CIP)数据

巧解几何图形趣题/陈效师编著. —北京:同心出版社,
1996.12

ISBN 7-80593-196-8

I. 巧… II. 陈… III. 几何课-小学-习题 IV. G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 11251 号

同心出版社出版、发行

(100734 北京市东单西裱糊胡同 34 号)

天津市蓟县印刷厂印刷 新华书店经销

1996 年 11 月第 1 版 1998 年 3 月第 4 次印刷

787×1092 毫米 32 开本 4.75 印张

字数:79 千字 印数 30000—36000 册

定价:5.60 元

编者的话

我们既当过教师，又是学生的家长，我们常常看到学校课堂上出现这样的状况：老师在讲台前滔滔不绝满堂灌，小学生们强打精神拼命学；下课后，老师批阅着一摞摞的作业练习，机械地重复劳动——判定对错、打分，排出优劣。小学生孜孜不倦地在家长认真地督促下奋力完成老师当天布置的作业，并期待着得个高分。

在当前，小学生课程作业负担愈来愈重的情况下，哪一位老师抓得不紧，全班学生的成绩就要下降，哪一位家长督促不勤，他的孩子就可能跟不上。形势是那么严峻，而面对激烈的竞争，似乎只有一条路：努力+拼命，没有什么捷径可走。

其实学习是有捷径的，而且路也很多。“巧学、巧记”就是一条极为近便的路。很多人走了这条路，学习、娱乐两不误，乃至成为栋梁之材。

那么，为什么不让更多的学生也都走这条

近路呢？

于是，我们便萌发了编辑这套丛书的想法，后来与几位同志一说，大家一拍即合，不久，就编写出了这套书。

当然，任何事物大都是仁者见仁，智者见智，更何况我们的水平有限，所拿出来的东西并不成熟，错误也在所难免。那么，它究竟怎么样，只有请广大读者去评判。

书中的谬误，敬请广大读者批评指正。

1996年2月

目 录

数学“大风车”

——旋转变换..... (1)

神奇的船闸

——平移变换..... (9)

由将军饮马说起

——对称变换 (16)

有头无尾的小鱼

——剪剪拼拼 (23)

方石块的启示

——等分图形 (33)

谁能数出 12 亿人?

——数数技巧 (40)

寻找两个“与众不同”的

——等积变换 (48)

到底放着几只碗?

——空间想象 (56)

巧移硬币的游戏

- 重叠问题 (64)

镜中电子表

- 多角度思维 (73)

林肯巧断冤案

- 合情合理 (82)

由断臂维纳斯说开去

- 追寻复原 (91)

鲁班立柱

- 巧添辅助线 (102)

请把帽子摘下来

- 逆向思维 (110)

数学“大气球”

- 扩大、缩小 (118)

赵爽的勾股图说

- 等量关系 (124)

车过太平湖

- 数学“摆渡” (130)

旧题新做话接、割

- 拼接、截割 (136)

数学“大风车”

——旋转变换

学校决定王老师为课外数学小组讲几何初步知识课。一下子，校园里便传开了，大家奔走相告，盼着早日开课。

今天上的是第一节课。王老师和同学们闲聊起来。他说：“过春节的时候，你们都逛过庙会，买过风车吧？”

这时，同学们的一双双眼睛顿时亮了起来。从这闪闪的目光中能看出，老师的一句话勾起了他们多少美好的回忆。



王老师说：“今天，我不是讲风车，而是考考你们的观察力。请问风车为什么能旋转起来？”

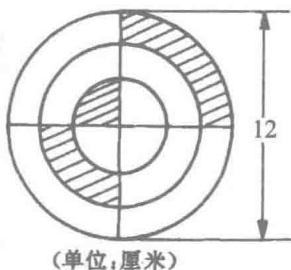
同学们觉得这问题太简单了，于是叽叽喳喳地议论起来：“嗨！谁不知道，风车的中心有个轴，风一吹它就转呗！”还是老师耳朵尖，他一本正经地说：“说得对！可是，今天，我们要研究的不是普通的风车，而是‘数学风车’。恐怕到时候，同学们看到的这种风车就什么风也吹不转了。”

接着，王老师把事先画在小黑板上的一幅图展示在同学面前。

“谁来求求这个图中阴影部分的面积？”王老师说。

由于有了老师的引导，同学们都有思想准备，可是数学图能转动吗？

赵聪抢先发言，他说：“我们让中间的小扇形不动，让右上角的阴影部分连同它所在的大扇形围绕圆心逆时针旋转 90° ，再让左下角的阴影部分连同它所在的中扇形围绕圆心顺时针旋转 90° ，就把三块阴影部分合成了一个四分之一大圆啦。它的面积是：



(单位：厘米)

图 1

$$3.14 \times \left(\frac{12}{2}\right)^2 \div 4 = 3.14 \times 36 \div 4 = 28.26 \text{ (平方厘米)}$$

米)。”

图 2，就是赵聪所说的旋转过程。

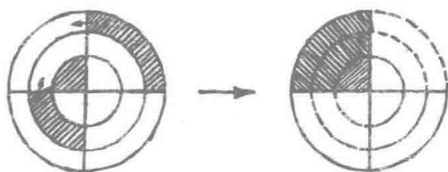


图 2

“非常正确”，王老师说，“赵聪通过想象，让静止的图形动起来，这是一个很大的进步。我想，在座的同学也许都想到了，就是没有勇气，让这个‘数学风车’转起来。”

大家都笑了，个个跃跃欲试，希望老师再出些题考考自己。

王老师在出题之前对旋转图形问题做了总结。

在数学的图形变换中，旋转是一种常用的方法。有些几何问题条件分散。如果能设法把图形绕一个定点，在平面内旋转一个定角，使图形的某部分移到一个新的位置，往往能使分散的条件集中，使问题化难为易。

在旋转过程中，图形上任何两点的距离不变，任何两直线间的夹角不变。因此，一个图形从一个位置旋转到另一个位置，它的形状、大小不会改变。旋转是用运动的观点研究数学问题的重要思想方法。

1. 旋转成定角

图形中某一部分到底要旋转多少度角，要因题而异。我们可以根据需把部分图形转到有利于我们进行计算的最佳位置上。

例如，在图3中，半径为6厘米的圆的内、外各有一个正方形，圆内正方形的四个角的顶点都在圆周上，圆外正方形的四条边与圆都只有一个接触点。问大正方形的面积比小正方形大多少？

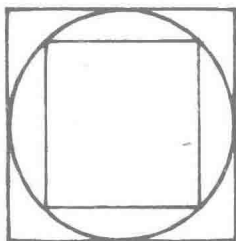


图3

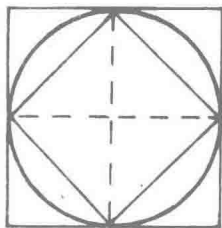


图4

这道题按一般方法就得先求出大正方形面积，再求小正方形面积，然后用大正方形面积减去小正方形面积。这时，如果把小正方形绕圆的圆心旋转 45° ，那么小正方形的四个顶点正好落在大正方形和圆的接触点上（即大正方形边上的中点处）。图4就是旋转后的情形。容易看出：小正方形正好是大正方形面积的一半。两正方形的面积差就是：

$$(6 \times 2)^2 \div 2 = 144 \div 2 = 72 \text{ (平方厘米)}。$$

和这个题目类似，我们再看一个题：

例如图5，当最小正方形面积为1平方厘米时，最

大正方形的面积是多少平方厘米？

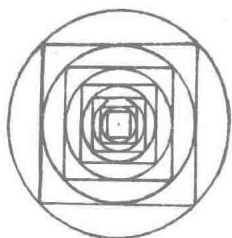


图 5

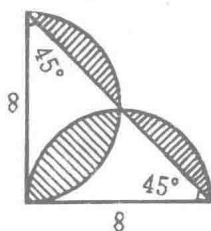


图 6

显然，这个图中共有 6 个大小正方形。

从上题中我们得知，第二个正方形的面积是第一个正方形面积的 2 倍。同理，第三个正方形面积是第二个正方形面积的 2 倍。依此类推，第六个正方形的面积为：

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \text{ (平方厘米)}。$$

再如图 6，求阴影部分的面积（单位：厘米）。

如果根据这个图形直接计算，难度很大。如果从虚线处把图形一分为二（如图 7 左），把原图看成是两个半圆图形的重叠，那么把下面的半圆图形绕等腰直角三角形的直角顶旋转 270° ，就会得到图 7 的右图。

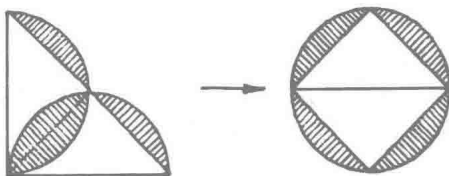


图 7

这时，阴影部分的面积等于大圆与正方形面积的差。解答如下：

$$\begin{aligned} & 3.14 \times (8 \div 2)^2 - 8 \times (8 \div 2) \\ &= 50.24 - 32 \\ &= 18.24 (\text{平方厘米}). \end{aligned}$$

2. 立体旋转

上面我们所做的旋转变换是在同一平面内进行的。其实，在空间的旋转变换也是十分重要的。

如图 8，已知大正方形的边长是 6 厘米，求阴影部分的面积。

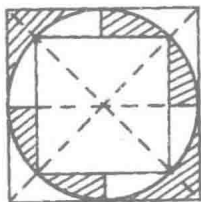


图 8

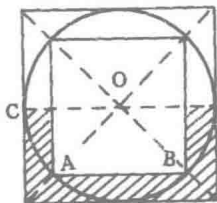


图 9

把这个图形以水平直径为轴对折，使它的上半部分合于下半部分，正好用上半部分的阴影部分填补了下半部分相应的空白部分，新形成的阴影部分正好是“凹”字形（如图 9）。

不难看出，大正方形的边长就是中间圆的直径。由于 $OA = OC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ （厘米），所以图形中小正方形面积是：

$$S_{\text{小正方形}} = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \right) = 18 (\text{平方厘米}).$$

$$\text{因此, } S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2} (S_{\text{大正方形}} - S_{\text{小正方形}})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (6^2 - 18)$$

$$= \frac{1}{2} \times 18$$

$$= 9 (\text{平方厘米}).$$

又如图 10, 求阴影部分的面积 (单位: 厘米)。

我们首先沿直径 (虚线) 将图形对折, 使上、下半圆重合, 这样上下半圆中的阴影部拼合成两个面积完全相等的三角形 (如图 11)。

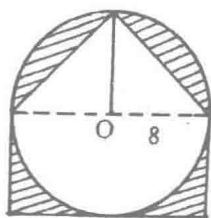


图 10

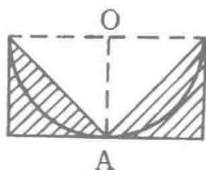


图 11

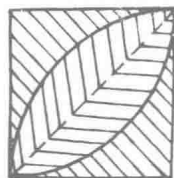


图 12

此时, 再将左边图形按顺时针方向围绕 A 点旋转 90° , 得到图 12。这样, 阴影部分最终拼成了一个小正方形, 它的边长是 $\frac{8}{2} = 4$ (厘米)。

因此，可得阴影部分的面积为：

$$\frac{8}{2} \times \frac{8}{2} = 4 \times 4 = 16 \text{ (平方厘米)}。$$

这种解法把以一条线为轴的对折旋转(180°)和平面内围绕某个点的旋转(此题是 90°)结合起来，非常巧妙。

在运用旋转变换时，必须兼顾空间旋转和平面旋转两个方面，这样才能得出完美的解法。

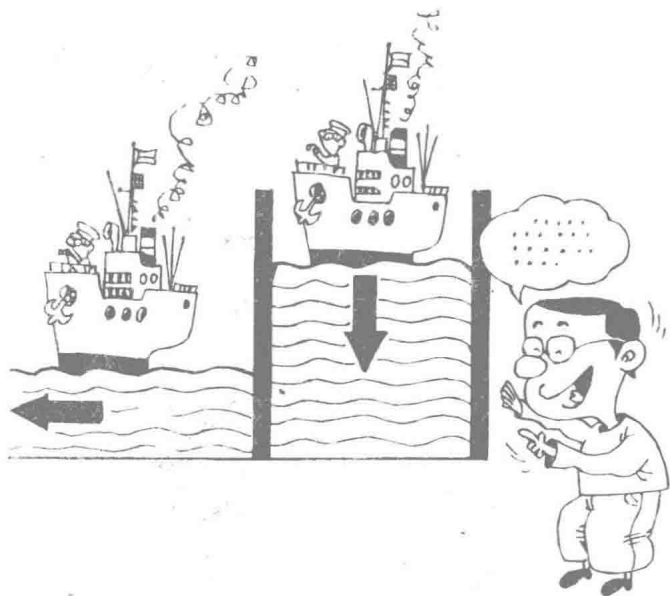
神奇的船闸

——平移变换

在今天的数学课上，王老师讲述了葛洲坝的故事。

王老师说：“凡是去过三峡的人都要经过长江第一坝——葛洲坝。葛洲坝全长 2561 米，高 70 米。如果你是逆水行船就面临着让轮船爬升几十米进入三峡的情景；如果你是顺水行船就面临着让轮船下降几十米进入滚滚长江的情景。这样高的水面差，怎么办呢？奇迹就出现在这里。

“工人师傅们在葛洲坝水利枢纽上修建了三座大型船闸。其中，一号船闸和二号船闸，大小相同，都是长 280 米，宽 34 米，深 35 米，三号船闸略小些。它们活像个特大号的超深水游泳池，但两头各有两扇能开闭的大门。当客船从上游驶入闸室时，闸室内的水位与坝上水位平齐，上闸门开着，让船进入闸室。然后，上闸门关闭，打开下面看不见的出水阀门。这时，闸室内水位逐渐下降，约一刻钟，闸室内水位与坝下水位平齐，下闸门开放，轮船便开出船闸向宜昌方向驶去。



“当人们回首仰视着大坝时，无不为中国是能工巧匠所折服。”

说到这里，王老师话锋一转，说：“这是一艘轮船的平移现象，在平移的过程中，船上所有的人和物都在沿着同一个方向平移，平移的距离相同。在数学中也有平移。在平移的过程中，图形上所有点的移动方向相同，移动的距离相等。”

然后，王老师指导全班同学对平移变换展开了热烈的讨论。

1. 线段的平移

我们观察一下，下面两个图形的周长是否相同？