高等数学

主 编 孙旭东 胡桂荣 易同贸

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等数学

主　编　孙旭东　胡桂荣　易同贸
副主编　付中华　吴超华　贺彰雄
　　　　陈　婷　王晓萍
主　审　向健极

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书结合编者多年教学经验，按照“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则编写而成. 全书共分 7 章，整体结构合理，语言叙述通俗. 主要内容包括函数、极限与连续，导数、微分及其应用，不定积分、定积分及其应用，微分方程及其应用，多元函数的微积分及其应用，傅立叶变换与拉普拉斯变换，行列式、矩阵与线性方程组.

本书可作为高等职业院校，高等专科学校，成人高等院校工科、经济管理类各专业高等数学或经济数学课程教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 孙旭东，胡桂荣，易同贸主编. -- 上海：同济大学出版社，2014. 7

ISBN 978-7-5608-5596-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孙…②胡…③易… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 188911 号

高等数学

主编 孙旭东 胡桂荣 易同贸 **副主编** 付中华 吴超华 贺彰雄 陈 婷 王晓萍

责任编辑 李小敏 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www. tongjipress. com. cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 启东市人民印刷有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 19. 25

字 数 480 000

版 次 2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5596-7

定 价 39. 00 元

前　言

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学.作为各门科学的重要基础,作为人类文明的重要支柱,数学科学在很多重要的领域中已起到关键性甚至决定性的作用.发展数学科学,是推进我国科学研究和技术发展,保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要.高等学校作为人才培养的摇篮和基地,对大学生的数学教育,是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面,而教材建设是课程建设的重要内容,是教学思想与教学内容的重要载体,因此显得尤为重要.

本书根据教育部制定的"高职高专教育高等数学课程基本要求",贯彻"以应用为目的,以够用为度"的原则编写而成,以"培养能力,强化应用"为出发点,满足专业对数学的基本要求并体现了高等职业教育的特点.着重培养学生以下四方面的能力:一是用数学思维分析解决实际问题的能力;二是把实际问题转化为数学模型的能力;三是求解数学模型的能力;四是用数学知识解决所学专业上的一些问题.

本书具有四大特点:一是体现以必需、够用为度的原则,对于所涉及的若干定理、推论、命题等,既不追求详细的证明,又不失数学理论的严谨,适度淡化了难度较大的数学理论,加强了应用较强的数学方法;二是突出了能力培养,注重将数学建模思想融入到教学中,结合数学软件,培养处理数据以及求解数学模型的能力;三是突出数学知识与专业知识的衔接,增强针对性和实用性,提高学生学习数学的目的性;四是增强了可读性,每章节实行"案例驱动",从实际问题出发,引出概念,并讲清概念,每章末都配有复习题供学生练习,以利于复习和巩固,同时提高学生学习数学的积极性和应用性.

本书内容包括一元微积分、多元微积分、微分方程、傅立叶变换与拉普拉斯变换、线性代数.每节后有习题,书后附有参考答案.打"*"号的内容供选学.本书可以供高职高专各专业选用.

全书由孙旭东、胡桂荣、易同贸担任主编,其中孙旭东编写了第1,2,3,4章、附录和附表并统稿;胡桂荣编写了第5,6,7章;付中华编写了数学实验部分.易同贸、吴超华、贺彰雄、陈婷、王晓萍等人参加了教材的修订工作.本书由武汉城市职业学院向健极教授主审.

本书的编写得到了武汉城市职业学院、长江工程职业技术学院、湖北生物科技职业学院、武汉理工大学等多所学院的大力支持与帮助,本书还参考吸收了有关教材及著作的成果,在此一并致谢!

由于编者水平所限,且时间紧迫,书中难免存在疏漏之处,恳请广大读者不吝赐教,提出批评建议,以便再版时修正.

编　者

2014年6月

目 录

第 1 章
函数、极限与连续

初等数学主要研究事物相对静止状态的数量关系，而高等数学主要研究事物运动、变化过程中的数量关系. 函数是对变量的变化关系最基本的数学描述，是高等数学研究的主要对象，而极限理论是微积分的基础，极限方法是研究变量的一种重要的基本方法，它在其他学科中也有着广泛的应用. 本章将在复习有关函数知识的基础上，讨论函数极限与连续性问题.

1.1 函　数

1.1.1　函数及其性质

1. 函数的概念

在自然科学、经济学和现代管理科学中，会经常遇到变量之间的关系问题. 先看下面一些实例.

引例 1　球的体积 V 与球的半径 r 的相互关系为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^{3}.$$

当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个确定的数值时，球的体积 V 的值也就随之确定了.

引例 2(汽车租赁)　某汽车租赁公司出租某种型号汽车的收费标准：每天的基本租金 200 元，另外，每行驶 1 km 收费 1.2 元. 租用该种汽车一天，行车 x km 时的租车费(元)：

$$y=200+1.2x.$$

当 x 的取值范围是数集 $D=\{x\mid x\geqslant 0\}$，对每一个 $x\in D$，按照 $y=200+1.2x$ 所示规则，都有唯一确定的 y 与之对应.

通过上面两个例子所涉及的变量的实际意义，可以看到，它们都反映了两个变量之间的依赖关系，这种对应关系就是函数关系.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空实数集. 如果对任何 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f，都有确定的实数值与之对应，则称 y 为 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 叫作**自变量**，y 叫作**因变量**，f 为**对应法则**，数集 D 称为函数的**定义域**.

函数 $y=f(x)$ 中，表示对应法则的记号"f"也可改用其他的英文字母或希腊字母，如"g"，"F"，"φ"等. 相应地，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 在同一个问题中，对不同的函数需用不同的记号以表示区别.

例 1 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(2)$，$f(x^2)$，$f[f(x)]$.

解 $f(2)=\dfrac{1}{1-2}=-1$，

$$f(x^2)=\frac{1}{1-x^2},\ \{x \mid x\neq\pm1,\ x\in\mathbf{R}\},$$

$$f[f(x)]=f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x},\ \{x \mid x\neq 0,\ 1,\ x\in\mathbf{R}\}.$$

2. 函数的定义域

函数的定义域通常按下面的两种情况考虑：

(1) 用解析式表示的函数，函数的定义域就是使函数表达式有意义的一切实数组成的集合.

(2) 对于实际问题，根据问题的实际意义具体确定.

使函数 $y=f(x)$ 有定义或有实际意义的自变量 x 的全体取值范围称为函数的定义域，记为 D，通常用不等式、区间或集合表示定义域.

与自变量 x_0 相对应的数值 y_0，称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $y_0=f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$. 所有函数值的集合，称为函数的**值域**，记为 W.

$$W=\{y \mid y=f(x_0),\ x\in D\}.$$

显然一个函数的值域由定义域及对应法则完全确定.

构成函数有两个要素：定义域和对应法则. 所以，两个函数相同的充分必要条件是两个函数的定义域和对应法则对应相同.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$； (2) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\ln(x^2-2x-3)$； (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-10)$.

解 (1) 为使表达式有意义，必须有 $4-x^2\neq0$，解得 $x\neq\pm2$，即定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 要使 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有意义，必须有 $1-x^2\geqslant0$，即 $-1\leqslant x\leqslant1$. 因此，函数的定义域为 $[-1,1]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以 $x^2-2x-3>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>3$，即定义域为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

(4) 两函数和(差)的定义域，应是两函数定义域的公共部分，所以要使函数有意义，必

须 $\begin{cases} x^2-x-6>0, \\ 3x-10>0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x<-2 \text{ 或 } x>3, \\ x>\dfrac{10}{3}. \end{cases}$ 即定义域为 $\left(\dfrac{10}{3},+\infty\right)$.

例 3 判断函数 $f(x)=x-1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 是否为同一函数?

解 当 $x\neq-1$ 时,函数值 $f(x)=g(x)$,但是 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. 由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同,所以它们不是同一个函数.

3. 函数的表示方法

表示函数的主要方法有解析法(公式法)、表格法、图示法三种.

解析法 用解析表达式表示函数的方法叫做解析法,也叫做公式法. 例如,$s=vt$,$y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 都是解析法表示的函数.

用解析法表示函数不一定总是用一个数学式子表示,可能需要用几个式子来表示. 把由用两个或两个以上表达式定义的函数称为**分段函数**.

表格法 就是以表格形式表示函数关系的方法. 这种方法在设计工作中常用,如三角函数表、对数表、火车站列车时刻表、某厂某月份每天生产某种产品的产量表等. 它的优点是简单明了,便于应用;缺点是数据有限,不便于分析研究.

图示法 以图形表示函数的方法叫做函数的图示法. 这种方法在工程技术上应用较普遍,例如,生产的进度表、仪器的记录等. 它的优点是直观性强并可观察函数的变化趋势,缺点是不便于分析研究.

例 4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

例 5 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

例 6 已知分段函数 $y=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 1+x, & x>1. \end{cases}$

试求:(1)函数的定义域和值域;(2) $f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$,$f(2)$;(3)画出函数的图形.

解 (1) 函数的定义域为 $D=[0,+\infty)$,值域为 $W=[0,+\infty)$.

(2) $f(0)=2\sqrt{0}=0$;$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=2\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1$;$f(2)=1+2=3$.

(3) 根据函数的定义,在 $[0,1]$ 上,函数的图形为曲线 $y=2\sqrt{x}$;在 $(1,+\infty)$ 上,函数的图形为直线 $y=1+x$,该函数的图形如图 1-1-1 所示.

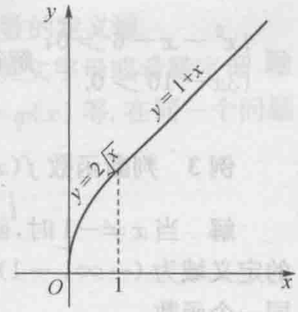

图 1-1-1

4. 函数的特性

(1) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；对于任意 $x\in D$ 都有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，$f(x)=\sin x$ 是奇函数；$f(x)=\cos x$ 是偶函数；$f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数，称为**非奇非偶函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点对称.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调增区间**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**，区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调减区间**. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

(3) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in I$，有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**. 如果这样的正数 M 不存在，否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如，$y=\cos x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 内是有界函数，因为 $|\cos x|\leqslant 1$；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 内是无界的.

(4) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对于任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$ 且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为函数 $f(x)$ 的**周期**. 如果 $T>0$，并且它是 $f(x)$ 的所有正的周期中最小的，则称 T 为 $f(x)$ 的**最小正周期**. 通常所说的周期函数的周期都是指其最小正周期. 例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，

$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

1.1.2 初等函数

1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为**基本初等函数**. 这些函数的性质、图像在中学已经学过,熟记基本初等函数的图像及性质是十分重要的,今后会经常用到它们. 为了帮助读者复习,将基本初等函数的定义和性质分别列举如下.

(1) 常数函数 $y=C$ (C 为常数)

定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

常数函数是偶函数、有界函数.

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)

定义域因 α 取值不同而不同,但在 $x\in(0, +\infty)$ 内都有定义.

无论 α 区何值,图形都经过点$(1, 1)$.

在 $(0, +\infty)$ 内,当 $\alpha>0$ 时,x^{α} 为增函数,当 $\alpha<0$ 时,x^{α} 为减函数.

(3) 指数函数 $y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq 1$)

定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $(0, +\infty)$.

图像在 X 轴上方,都通过点$(0, 1)$.

当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 是增函数;当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 是减函数.

(4) 对数函数 $y=\log_{a}x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

对数函数与指数函数互为反函数.

定义域为 $(0, +\infty)$,值域为 $(-\infty, +\infty)$.

图像在 Y 轴右边,都通过点$(1, 0)$.

当 $a>1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是增函数;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是减函数.

(5) 三角函数

① 正弦函数 $y=\sin x$

定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $[-1, 1]$.

有界函数,奇函数,周期为 2π.

② 余弦函数 $y=\cos x$

定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $[-1, 1]$.

有界函数,偶函数,周期为 2π.

③ 正切函数 $y=\tan x$

定义域为 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$,值域为 $(-\infty, +\infty)$.

奇函数,周期为 π,在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 是增函数.

④ 余切函数 $y=\cot x$

定义域为 $(k\pi, (k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$,值域为 $(-\infty, +\infty)$.

奇函数,周期为 π,在 $(0, \pi)$ 是减函数.

在微积分中还会遇到正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数

① 反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；

② 反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$；

③ 反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$；

④ 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, \pi)$.

在中学数学里已经详细介绍了上述函数的主要特性和图形，这里不再重复.

2. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $\mathbf{Z}$. 若对每一个 $y\in\mathbf{Z}$，D 中只有一个 x 值，使得 $f(x)=y$ 成立，于是，以 $\mathbf{Z}$ 为定义域确定了一个新的函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in\mathbf{Z}.$$

通常把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数，而称 $x=f^{-1}(y)$ 是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数.

由函数定义与反函数的定义可知，反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域. 直接函数与反函数互为反函数. 在同一直角坐标系下，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形相同.

习惯上，总是用 x 表示自变量、y 表示因变量，因此，互换反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的变量 x 和 y，有反函数 $y=f^{-1}(x)$. 但此时直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像不再相同，它们将关于直线 $y=x$ 对称. 于是，求反函数的步骤是：先由 $y=f(x)$ 解出 x，得 $x=f^{-1}(y)$；再互换 x 与 y，得 $y=f^{-1}(x)$.

最后指出，只有单调函数(单调增加或单调减少函数)才有唯一的反函数.

例 7 求函数 $y=3x-5$ 的反函数.

解 先解出 x，得 $x=\frac{1}{3}(y+5)$；再互换 x 与 y，得 $y=\frac{1}{3}(x+5)$. 所以，函数 $y=3x-5$ 的反函数是 $y=\frac{1}{3}(x+5)$.

3. 复合函数

实际问题中建立变量之间的函数关系往往是很复杂的，自变量与函数之间不一定有直接的依赖关系，因而常常借助于中间变量来建立所需要的函数关系.

定义 3 设变量 y 是变量 u 的函数，即 $y=f(u)$，而变量 u 又是变量 x 的函数，即 $u=\varphi(x)$，如果变量 x 在区间 I 内任取一数值时，对应的 u 值可使变量 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称这个函数为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记为 $y=f[\varphi(x)]$.

若 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 D_1，则 $D_1\subseteq D$.

注意 为了使 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 有意义，$u=\varphi(x)$ 在点 x 必须有定义，同时 $y=f(u)$ 在对应点 u 有定义.

所以不是任何两个函数都可以复合成一个函数. 例如,函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数,因为函数 $u=x^2+2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 不在函数 $y=\arcsin u$ 的定义域内.

复合函数的中间变量可以是两个或两个以上. 建立或分析复合函数的复合过程对于今后掌握微积分的运算是很重要的.

例 8　指出下列各函数的复合过程.

(1) $y=e^{\sin x}$；　　　(2) $y=\ln\cos\sqrt{x}$.

解　(1) 函数 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$, $u=\sin x$ 复合而成的;

(2) 函数 $y=\ln\cos\sqrt{x}$ 是由 $y=\ln u$, $u=\cos v$, $v=\sqrt{x}$ 复合而成的.

例 9　设 $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=[g(x)]^2=[2^x]^2=4^x$, $g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

4. *初等函数*

由基本初等函数经过有限次的四则运算、有限次的复合运算所构成的、能用一个解析式子表示的函数,统称为**初等函数**. 否则,称为**非初等函数**.

例如, $y=2x+\sin^2 x+\dfrac{1}{x}$, $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$,绝对值函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 以及我们见过的很多函数都是初等函数. 高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数. 但需要注意的是,分段函数一般不是初等函数. 例如,函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1+x, & x>1\end{cases}$ 和狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数};\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 以及符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$ 等都是非初等函数.

1.1.3　建立函数关系举例

利用数学方法解决实际问题,往往要建立相应的数学模型,即先要把问题中变量之间的函数关系用式子表示出来. 下面举例说明建立函数关系式的大致过程.

例 10　有一边长为 a 的正方形铁皮,将它的四角剪去适当的大小相等的小正方形,制成一只无盖盒子. 如图 1-1-2 所示. 求盒子的容积与小正方形边长之间的函数关系.

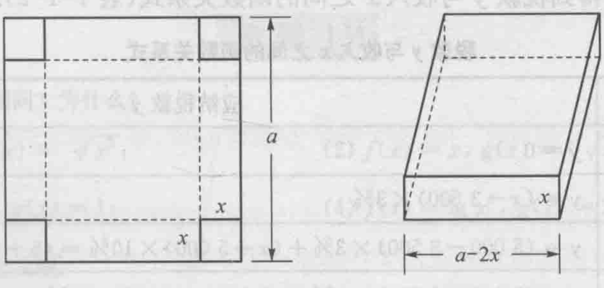

图 1-1-2

解 设剪去的小正方形的边长为x，由题知$0<x<\frac{a}{2}$，盒子的底面是边长为$a-2x$的正方形，深度为x，所以盒子的容积V与小正方形的边长x之间的关系式：

$$V=(a-2x)^2x,\quad 0<x<\frac{a}{2}.$$

例 11(纳税问题) 根据《中华人民共和国个人所得税法(2012年)》规定：公民的个人收入应依法缴纳个人所得税.所得税的计算办法：在每个人的月收入中，超过3 500元以上的部分应该纳税，这部分收入称为应纳税所得额.就纳税所得额实行分段累积税率，按表1-1-1计算.

表 1-1-1 **分段累积税率**

等级	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过3 500元的部分	0
2	超过3 500元，不超过5 000元	3
3	超过5 000元，不超过8 000元	10
4	超过8 000元，不超过12 500元	20
5	超过12 500元，不超过38 500元	25
6	超过38 500元，不超过58 500元	30
7	超过58 500元，不超过83 500元	35
8	超过83 500元的部分	45

若某人的月工资收入为x元，列出他(她)应交纳的税款y与收入x之间的函数关系.

解 (1) 按纳税规定，当$0\leqslant x\leqslant 3\,500$时，不必纳税，此时$y=0$.

(2) 当$3\,500<x\leqslant 5\,000$时，纳税部分是$x-3\,500$，税率是3%，所以

$$y=(x-3\,500)\times 3\%.$$

(3) 当$5\,000<x\leqslant 8\,000$时，有3 500元不必纳税，有1 500元税率是3%，应纳税45元，再多出的部分是$x-5\,000$，税率是10%，所以

$$y=45+(x-5\,000)\times 10\%.$$

(4) 依此类推，得到税款y与收入x之间的函数关系式(表1-1-2).

表 1-1-2 **税款 y 与收入 x 之间的函数关系式**

月收入 x	应纳税款 y
$0\leqslant x\leqslant 3\,500$	$y=0$
$3\,500<x\leqslant 5\,000$	$y=(x-3\,500)\times 3\%$
$5\,000<x\leqslant 8\,000$	$y=(5\,000-3\,500)\times 3\%+(x-5\,000)\times 10\%=45+(x-5\,000)\times 10\%$
$8\,000<x\leqslant 12\,500$	$y=(5\,000-3\,500)\times 3\%+(8\,000-5\,000)\times 10\%+(x-8\,000)\times 20\%$ $=45+300+(x-8\,000)\times 20\%=345+(x-8\,000)\times 20\%$

续表

月收入 x	应纳税款 y
$12\,500 < x \leqslant 38\,500$	$y = 345 + (12\,500 - 8\,000) \times 20\% + (x - 12\,500) \times 25\%$ $= 1\,245 + (x - 12\,500) \times 25\%$
$38\,500 < x \leqslant 58\,500$	$y = 1\,245 + (38\,500 - 12\,500) \times 25\% + (x - 38\,500) \times 30\%$ $= 7\,745 + (x - 38\,500) \times 30\%$
$5\,8500 < x \leqslant 83\,500$	$y = 7\,745 + (58\,500 - 38\,500) \times 30\% + (x - 58\,500) \times 35\%$ $= 13\,745 + (x - 58\,500) \times 35\%$
$x > 83\,500$	$y = 13\,745 + (83\,500 - 58\,500) \times 35\% + (x - 83\,500) \times 45\%$ $= 22\,495 + (x - 83\,500) \times 45\%$

例 12 电脉冲发生器发出一个三角形的脉冲波，如图1-1-3所示. 试求电压 u 和时间 t 之间的函数关系.

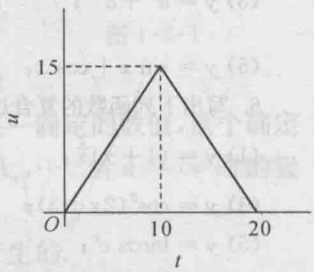

图 1-1-3

解 由图看出，u 随时间 t 变化的规律在时间 $0 \leqslant t < 10$，$10 \leqslant t < 20$，$t \geqslant 20$ 内是各不相同的，所以需进行分段考察.

当 $0 \leqslant t < 10$ 时，电压 u 由 0 直接上升到 15，直线方程为 $u = \dfrac{15}{10}t$，即 $u = \dfrac{3}{2}t$.

当 $10 \leqslant t < 20$ 时，电压 u 由 15 直接下降到 0，其方程为 $u = -\dfrac{15}{10}t + 30$，即 $u = -\dfrac{3}{2}t + 30$.

当 $t \geqslant 20$ 时，$u = 0$.

综上分析，u 与 t 之间的函数关系式是：

$$u = \begin{cases} \dfrac{3}{2}t, & 0 \leqslant t < 10; \\ -\dfrac{3}{2}t + 30, & 10 \leqslant t < 20; \\ 0, & t \geqslant 20. \end{cases}$$

这是一个分段表示的函数.

习 题 1.1

1. 下列函数是否相同？为什么？

(1) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$； (2) $f(x) = x$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$；

(3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $g(x) = 1$； (4) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2\lg x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$； (2) $y = \lg(x^2 - 4x + 3)$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+3}$; (4) $y=\arccos(2x-1)$.

3. 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求 $f(0)$, $f(-2)$, $f(2t)$, $f(x_0+h)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & 1\leqslant x<2;\\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

(1) 画出函数 $f(x)$ 的图形,并求其定义域;

(2) 求 $f(0)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $f(2)$, $f(3)$.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x^3(1-x^2)$; (2) $y=x^3\sin x$;

(3) $y=a^x+a^{-x}$; (4) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$;

(5) $y=\sin x+\cos x$; (6) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

6. 写出下列函数的复合过程.

(1) $y=(1+x)^{\frac{2}{3}}$; (2) $y=\sin 2x$;

(3) $y=\cos^2(2x+3)$; (4) $y=e^{\sin^2 x}$;

(5) $y=\ln\cos e^x$; (6) $y=2\arctan[\ln(1+4x^2)]$.

7. 在半径为 r 的球内嵌入一个内接圆柱体,试建立圆柱体体积 V 与其高 h 的函数关系.

8. 某淘宝商店出售某件衣服,零售价 98 元/件,若买 10 件及以上可打 9.5 折;若买 50 件及以上可打 8 折,试建立售价 Q 与衣服件数 x 之间的函数关系.

1.2 极　限

极限是高等数学的最基本概念. 微积分中的重要概念,都以极限为基础,如导数、积分、级数的敛散性等都是用极限来定义的,因此,在高等数学中极限有着非常重要的作用. 极限方法也是高等数学中的一个基本方法,是区别于初等数学的主要标志.

1.2.1 数列的极限

数列是大家熟知的概念,所谓**数列**,是自变量为正整数的函数 $x_n=f(n)$(即整变量函数),其函数值按自变量 n 由小到大顺序排列成的一列数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,$$

记作 $\{x_n\}$ 或 $\{f(n)\}$, 数列中的每一个数叫做数列的项,第 n 项 x_n 叫做数列的**通项**或**一般项**.

先从古代例子来分析数列的变化趋势,并由此引出数列极限的概念.

引例 1 极限思想的萌芽在我国古代很早就有记载.《庄子·天下篇》中有:"一尺之棰,日取其半,万世不竭."意思是:一尺长的杆每天截取一半,剩余部分的长度可用数列 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$,

$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…. 当天数无限增大时，对应的截取量 $\frac{1}{2^n}$ 就无限接近于零，但又永远不等于零.

引例 2　早在公元 263 年，我国古代数学家刘徽在计算圆周率的过程中创立并使用了极限方法. 即"割圆术"，利用圆内接正多边形来推算圆面积.

设有一圆，首先作内接正六边形，记面积为 A_1；再作内接正十二边形，记面积为 A_2；再作内接正二十四边形，记面积为 A_3；用同样的方法，继续作内接正四十八边形、内接正九十六边形；等等(图 1-2-1). 一般把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n(n\in\mathbf{N})$. 这样就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$$

当 n 越大，内接正多边形与圆的差别就越小，刘徽说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣."

图 1-2-1

可以设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$)，即内接正多边形的边数无限增加，内接正多边形就无限接近于圆，同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值，这个确定的数值就理解为圆的面积. 在数学上称为数列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$，当 $n\to\infty$ 时的极限，精确地表达了圆的面积.

由此可见，数列极限的概念是从求某些实际问题的精确值而产生的.

定义 1　对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时(记作 $n\to\infty$)，x_n 的取值无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的**极限**，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或\ x_n\to A(n\to\infty).$$

这时称 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

如果当 $n\to\infty$ 时，x_n 不趋近于一个确定的常数，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限或数列 $\{x_n\}$ 是**发散的**.

例 1　分析下面数列的变化趋势，并判断其收敛性.

(1) $\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$：　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$；

(2) $\left\{x_n=\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$：　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$；

(3) $\left\{x_n=\frac{n}{n+1}\right\}$：　$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$；

(4) $\{x_n=2^n\}$：　$2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots$；

(5) $\left\{x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}$：　$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1+(-1)^n}{n}, \cdots$；

(6) $\{x_n=(-1)^n\}$：　$-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$.

观察上面的几个数列，可以看出，当 n 无限增大时，x_n 的变化趋势有区别，一种是无限趋近于某个确定的常数，一种是不趋近于任何一个常数. 上面数列(1)，(2)，(3)，(5)是收