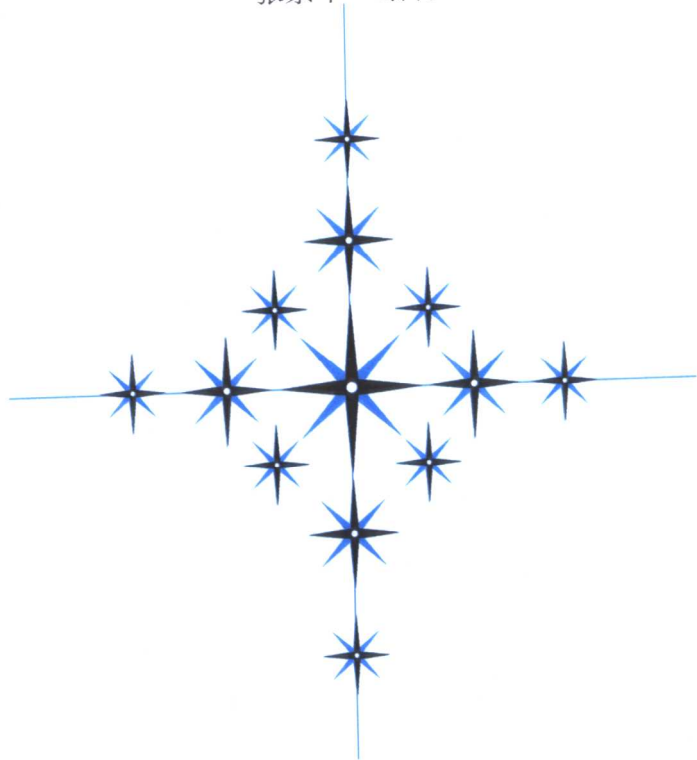


数学传奇

张景中 编著



SA479/0702

目 录

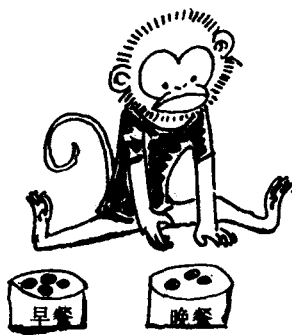
猴子吃栗子	1
交换和条件	4
口令的计算	7
有趣的变换	10
钟表和星期	14
在放大镜下	17
炸馒头和桶	20
云雾和下雨	22
动物的大小	25
看起来简单	29
宽度和直径	32
常宽度图形	35
扩大养鱼塘	37
用机器证题	42
聪明的邻居	46
我们来试试	48

列方程求解	50
其实并不难	53
先想想再看	56
这不算麻烦	58
啤酒瓶换酒	61
西瓜子换瓜	64
回收破胶鞋	67
字母代替数	69
该怎么办呢	72
再前进一步	74
猴子分桃子	75
动脑又动手	77
方法靠人找	79
问个为什么	82
巧用加和减	85
二次变一次	87
0 这个圈圈	89
有名的怪题	92

猴子吃栗子

有一位少年养了一只猴子。

每天早晨,他给猴子4个栗子吃,它十分高兴地吃了。到了晚上,再给它3个,猴子就大吵大闹起来。它想不通:为什么晚上比早晨少了一个呢?



这位爱动物的少年,当然希望猴子愉快一点,不要天天吵闹。可他又没有更多的栗子。于是,改为早上给3个,晚上给4个。

说也奇怪,猴子高兴了。它发现:每天晚上,都比早晨吃到了更多的栗子。

$3+4=4+3$ 。猴子到底是猴子。它不懂得交换



律,所以早3晚4和早4晚3,收到了不同的效果。

算术里还有结合律、分配律和别的律。我们用惯了,往往认为那是理所当然的事,并不觉得“律”有什么宝贵,就像不觉得空气的宝贵一样。

想一想,要是这些律不成立,做起题来该多麻烦。你得按次序算,许多简便的方法也没有了。比如:

$$4 \times 73 \times 25 = 73 \times (4 \times 25) = 7300$$

$$23 \times 68 + 32 \times 23 = 23(68 + 32) = 2300$$

这些简便的方法,就是用交换律、结合律和分配律得到的。

不过,也不是什么运算都能交换、结合和分配的。初学代数的时候,我常在作业本上写:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2; \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$(3a)^2 = 3a^2; \frac{2x+1}{4} = \frac{x+1}{2}$$

那结果,是红色的“ $\times$ ”子很多。后来,逐步吸取教训,知道了什么运算可以用什么律,“ $\times$ ”子才少起来。

为什么不同的运算有不同的律呢?要是所有运算用一样的律,岂不方便吗?

偏偏不行。世界上的事是复杂的。不同的事,各有自己的特点和规律。



交换和条件

算术里的交换律，在日常生活中一样有用。不过，你也一样不能乱用。

猴子吃栗子的故事，当然是人编出来的，并非确有其事。可是，喂猪的饲养员知道：给猪开饭的时候，要先喂粗饲料，后加精饲料，让它越吃越香，才能吃得饱，睡得好，长得快。交换律在这里不成立。



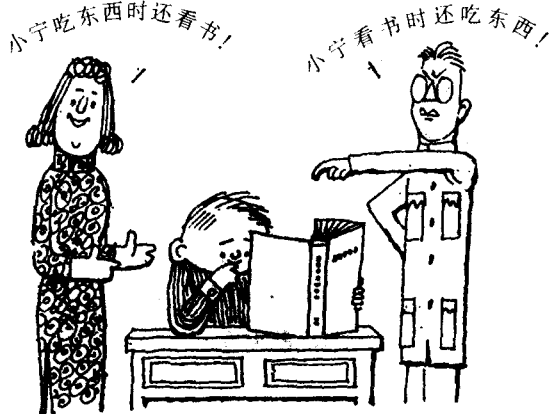
还有一些事，它们的顺序是根本不能交换的。先穿袜子，后穿鞋，很对。反过来，先穿鞋，后穿袜子，还像什么样子呢？拧开钢笔帽，灌上墨水，再写字，很

对。反过来,就不可能了。

也有这样的情况:两件事交换之后,照样讲得通,只是含意不同了。

说“小宁吃东西的时候还在看书”,马上给人一个印象:小宁太爱学习了。你看,吃东西的时候还在看书。要注意身体,别得了胃病。

交换一下,说“小宁看书的时候还在吃东西”,这就会使人觉得他馋嘴,看书的时候还在吃零食。



体育老师喊的口令,有的时候是可以交换的,有的时候又不可以随便交换。

要是把“向前5步走”和“向前3步走”交换一下,结果就一样。反正总共是向前走了8步。

要是把“向前5步走”和“向后转”交换一下,那

就不同了。先向后转,再向前 5 步走,结果,和刚才的位置正好相差 10 步。

所以,做事、说话和做题一样,得讲究顺序,不能随便交换。

算术里的别的律,也有类似的情况。

用水和米煮饭,用酱油、姜、蒜烧鱼,然后一起吃。要是应用结合律,把米和酱油、姜、蒜放在一起煮饭,把水和鱼放在一起烧鱼,这怎么做、又怎么吃呢?



口令的计算

在算术里,任何两个数可以相加。

要是我们把两个口令连续执行的结果,叫做这两个口令相加所得到的和,那么,任何两个口令就可以相加了。相加之后,可能得到一个新口令,也可能得到一个老口令。

这“新”和“老”是什么意思呢?

你看:

向左转 + 向后转 = 向右转

向前 1 步走 + 向前 3 步走 = 向前 4 步走

前一个式子的结果——向右转,是一个老口令;而后一个式子的结果——向前 4 步走,便是一个新口令。不信去问体育老师,他从来不会叫你们“向前 4 步走”。体育课上的口令,是不兴叫 4 步或者 6 步走的,因为最后的一步,不许落在左脚上。

不过,我们可以把思想解放一下:走 4 步就走 4 步,又有什么不可以的呢?好在我们这里说的是数学,允许推广,也允许产生新的数。

在算术里,只要有了 1, $1+1=2$, $1+2=3$, ……

所有的正整数就都出来了。

在口令的算术里,要产生出多种多样的口令,只有一个口令可不够了。

要是只有一个“向前 1 步走”,那就只能向前走,想转一个弯都不行。

要是只有一个“向左转”,那就只能原地转来转去,想走 1 步都不行。

不过,只要有了一个“向前 1 步走”和一个“向左转”,便可以组成多种多样的口令了。不信?你可以试试。

算术里有个 0,任何数加 0,等于本数。

口令里也可以有个 0。我们不妨把“立正”叫做 0。要是不考虑“稍息”、“向右看齐”之类的话,任何口令加上立正,都不会影响执行的结果。

在口令中,也可以有相反的口令。这好比代数里的相反数。

3 和 -3 互为相反数。因为

$$3 + (-3) = 0$$

向左转的“相反数”是向右转。因为

$$\text{向左转} + \text{向右转} = \text{立正} = 0$$

向前 5 步走的相反数是什么呢?难道是后退 5 步吗?

不要紧。因为

向前 5 步走 + (向后转 + 向前 5 步走 + 向后转) = 0,
所以向前 5 步走的相反数,便是

向后转 + 向前 5 步走 + 向后转

这 3 个口令连在一起,效果相当于后退 5 步。



向后转 + 向前 5 步走 + 向后转 = 向后 5 步走

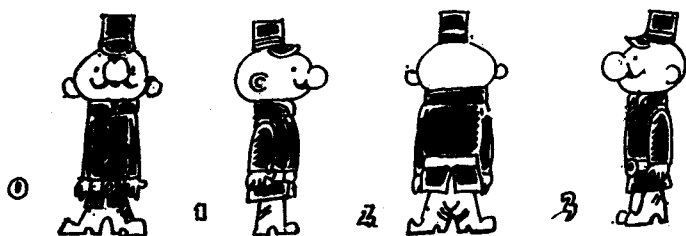
我们这样把许多口令放在一起,就形成了只有一个运算的系统。这个运算,就是两个口令相加——接连执行。这种只有一个代数运算的系统叫做“群”。

研究群的数学叫做群论。群论和几何、代数、物理……关系密切,非常有用,非常重要。它是 19 世纪的法国中学生伽罗华创立的。

有趣的变换

同一件事,用不同的看法和办法去对待,往往有不同的结果或者收获。

要是我们分别用 0、1、2、3 来代表立正、向左转、向后转和向右转:



那么,把

向左转 + 向后转 = 向右转

向右转 + 立正 = 向右转

表示成

$$1 + 2 = 3$$

$$3 + 0 = 3$$

这都是说得通的。

可是,把两个口令连起来,为什么非得叫做相加

不可呢?不叫相加,偏偏叫相乘,又有什么不可以呢?

你也许会说,那不像话。要是叫做相乘,那么,向右转 $\times$ 立正=向右转,岂不是 $3\times 0=3$ 。这和0的性质不是矛盾了吗?多别扭呀。

这好办。名字是我们取的。我们不会把立正叫做1吗?

对了。0在加法中所扮演的角色,和1在乘法里所扮演的角色十分相像。任何数加0不变,乘1也不变。把两个口令连起来叫做相乘,立正便可以叫做1。你看:

向右转 $\times$ 立正=向右转

向左转 $\times$ 立正=向左转

向后转 $\times$ 立正=向后转

正好,任何数乘1,仍然不变。

那另外3个口令取什么数作名字才恰当呢?

这也好办。

$\therefore$ 向后转 $\times$ 向后转=立正

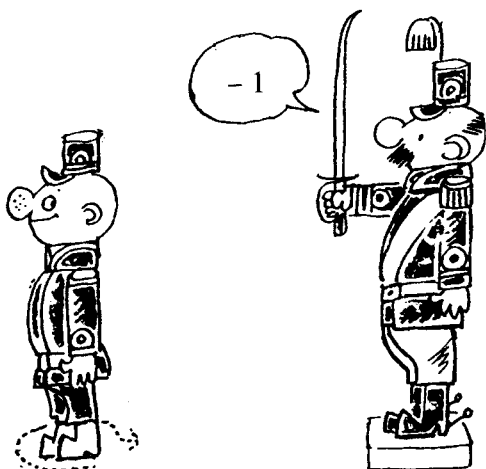
$\therefore$ 向后转 $^2=1$

把向后转叫做-1再恰当没有了。 $(-1)^2$,可不是等于1嘛。

这样

$\therefore$ 向左转 $\times$ 向左转=向后转

$\therefore$ 向左转 $^2=-1$



$\therefore$ 向右转 = 向后转 $\times$ 向左转

$\therefore$ 向右转 = $-1 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

你看,在这4个口令中,只要

立正 = 1

我们就可以用乘法的运算规律算出:

向后转 = -1

向左转 = $\sqrt{-1}$

向右转 = $-\sqrt{-1}$

真是妙得很。在这种算术里, -1 可以开平方了。 $\sqrt{-1}$ 并不是不可捉摸的“虚数”。它的含义,不过是“向左转”罢了。

许多日常生活里的事情，都可以设法转化成算术问题来运算处理。用考试得的分数计算学习成绩，就是一个例子。



钟表和星期

在钟表的算术里：

$$7+3=10$$

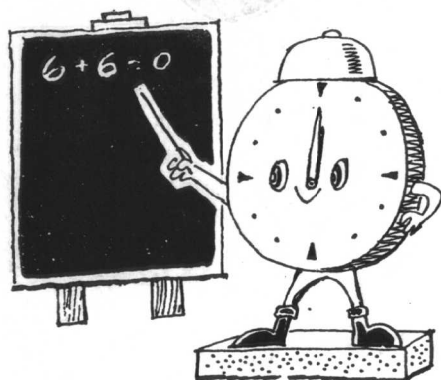
$$7+6=1$$

$$3-7=8$$

请你想一想，这些算式是什么意思呢？

因为钟表的 12 点就是 0 点，所以

$$6+6=12=0; 7+6=1; 3-7=8。$$



还可以有星期的算术。

在这种算术里，星期一到星期六，分别用 1 到 6