中學叢書

新三角學講義

朱鳳豪編著

龍門聯合書局出版

中 學 叢 書

新三角學講義

朱鳳豪編著

本編爲高中三角補充教材。作爲複習教本、升學準備及參考用書均極適合。

龍門聯合書局出版

新 三 角 學 講 義

朱 鳳 豪 編 著

龍 門 聯 合 書 局 出 版

上海市書刊出版業營業許可證出 029 號

上海茂名北路 300 弄 3 號

新 華 書 店 總 經 售

新光明記印刷所印刷

上海康定路 162 號

開本：787×1092 1/32　　印數：34,501—38,500 冊

印張：11 14/32　　1940 年 3 月 第 一 版

字數：195,000　　1955 年 7 月第廿三次印刷

定價：(8) 一元

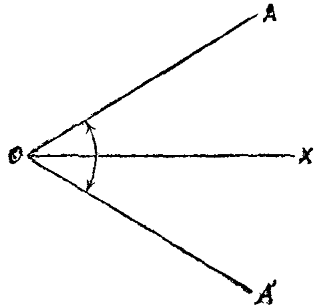
目　錄

新三角學講義

I 角之度量法(Measurement of Angle)

1. 角之意義 一半直線OX之位置一定，又一半直線OA初與OX相重，以O為樞紐，OA繞O而轉動，所轉之多少，即角之大小. OX 謂初線(initial line)，OA謂末線(terminal line). 設OA轉動之方向與鐘針轉動方向相反（向左轉）則為正角，如與鐘針相同(向右轉)則為負角（如圖一).

圖 一



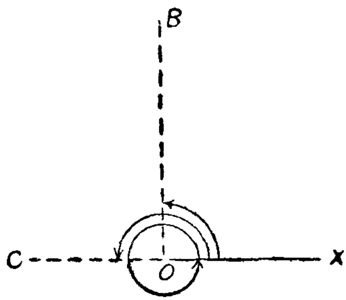
OA始與OX合，逐漸向左轉動，則∠XOA之量次第加大至合於OB之位置，即垂直于OX時，則∠XOB為直角(right angle). 又OA轉至OC之位置，即與OX相反時則∠XOC為一平角(straight angle)，當OA再左轉至與OX相重則為一周角(perigon)，OA尚可繼續向左轉動，故角之量可大至無限.(圖二)

2. 角之量法 量角之大小通常有三種單位：

(一)六十分法 (Sexagesimal System)

此為實用單位．設一直角為90度 (degree)，一度分為60分(minute)，一分分為60秒(second) 設一角為67度35分42秒，通常記為$67^\circ 35' 42''$．一周角等于四個直角，故一周角為360°，同理平角為180°．

圖 二

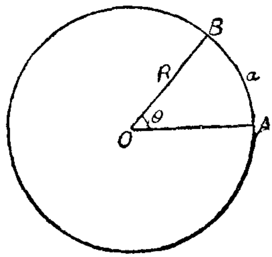


(二)弧度法(Circular System)

取圓 O 之弧 $\overset{\frown}{AB}$，設$\overset{\frown}{AB}$等於半徑OA之長，則∠AOB 為角之單位，稱為一本位弧 (或稱弧度 radian)．今如以本位弧為角之單位，設一圓之中心角為 θ，所對之弧為 a，又半徑為R

則 $$\theta=\frac{a}{R}$$

圖 三



故一點周圍之角為$\frac{2\pi R}{R}=2\pi$ rad．即 6.283rad，今設一角為D度或Rrad，其D與R之關係為

$$2\pi : R = 360^\circ : D$$

$$\text{故 } R=\frac{\pi}{180}\cdot D \quad \text{.................... (1)}$$

$$D=\frac{180}{\pi}\cdot R \quad \text{.................... (2)}$$

由六十分度化本位弧用 (1)式，由本位弧化爲六十分度用 (2)式.重要角度之D與R之相當値列表如下：

表 1.

D	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
R	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
D	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
R	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

(三)百分法 (Centesimal System)

以一直角分成百等份，每份曰百分度 (grade)，每百分度又等分爲百份，每份曰分 (minute)，每分等分百份，每份曰秒 (second)；如一角爲九十四度二十三分八十七秒，記之爲 $94^g\,23'\,87''$今設 G 代百分度，其與D，R 之關係如次：

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}=\frac{G}{200}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

關于R，D，G之重要相當値，列表如下：

表 2.

D°	$.9^\circ$	1°	$\frac{180}{\pi}=\begin{matrix}57.2957795^\circ\\(57^\circ17'44.8'')\end{matrix}$	180°
R rad	.0157098 rad.	$\frac{\pi}{180}=.017453$rad.	1 rad.	3.14159rad.
G^g	1^g	$1^g.11111$	$63^g.661972$	200^g

3. 任意象限內之角

設一角之初線合于 x軸，

角頂在原點，末線在第一象限者，如角 XOP，謂之第一象限角在第二象限者，如角 XOQ，謂之第二象限角.同理角 XOR 爲第三象限角，XOS 爲第四象限角.

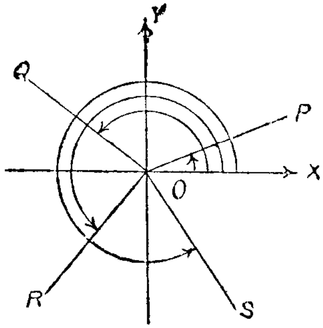


圖 四

各象限中角之量如下表　　　　表 3.

第一象限角	第二象限角	第三象限角	第四象限角
0° —— 90°	90°——180°	180°——270°	270°——360°
360°——450°	…………	…………	…………
…………	…………		
-270°—-360°	-180°—-270°	-90°—-180°	0°—— -90°
…………	…………	…………	…………

例一： 135°相當本位弧若干，百分度若干?

[解] 從 (1)得 $R=\frac{135}{180}\pi=\frac{3}{4}\pi$，

註：(a) 用 π 記本位弧時 radian 一字通常可略去不寫.

(b) $\pi=3.1415926\cdots\cdots$ 又 $\frac{1}{\pi}=0.318309886\cdots\cdots$

(c) 如30°之本位弧數即寫爲 $\frac{\pi}{6}$，不必化爲 $\frac{3.1416}{6}$ 或0.51995

(d) π之第一近似值爲 $\frac{22}{7}$，準確至小數點後兩位. π之第二近似值爲 $\frac{355}{113}$，準確至五位小數

(e) 在高等數學中角之單位採用弧度法，但在實用上爲便于觀察及計算起見均用六十分法，至於百分法，通常都不用也.

(f) 57.29578°亦可寫爲57°.29578

卽 $R=\frac{3}{4}\times 3.1416=2.356$ rad.

又從 (3)得 $\frac{G}{200}=\frac{135}{180}$,

故$G=200\cdot\frac{3}{4}=150^g$.

例二： 用度分秒(六十分法)表一本位弧之大小.

[解] 一本位弧$=\frac{180}{\pi}=\frac{180}{3.1416}=57.29578^0=57^017'44.8''$

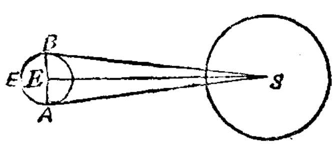
例三： 於十二點十五分之時求鐘面時分兩針所夾之角（用六十分法表之）

[解] 分針于 12 點鐘行過鐘面 15 格，但時針之速爲分針之$\frac{1}{12}$.故時針行過$15\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{4}$格.故兩針中隔$15-\frac{5}{4}=\frac{55}{4}$格，今鐘面每格表 6 度，故兩針成 $\frac{55}{4}\cdot 6=82\frac{1}{2}^0=82^030'$之角.

例四： 地球之直徑（7900哩）向太陽所張之角爲17.8''，太陽光線達于地球需時間8分13.3 秒，問光線每秒之速度.

[解] 設 S 爲太陽中心；E 爲地球中心，AB 爲地球之直徑，$\angle ASB=17.8''$ 因 AB 比較甚小，故可視作以 S 爲中心，SE爲半徑，所作圓上之一弧，設SE＝x，則$\angle$ ASB(rad)$=\frac{AB}{SE}$

圖 五



卽 $$\frac{17.8\pi}{3600\cdot 180}=\frac{7900}{x}$$

$$\therefore\ x=\frac{3600\cdot 180\cdot 7900}{17.8\pi}$$

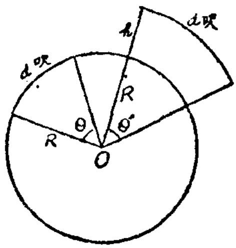
又 8分13.3秒＝8·60＋13.3秒＝493.3秒

> 凡用公式
> $$角=\frac{弧}{半徑}$$
> 角之單位必須爲本位弧

故光線每秒速度爲 $$\frac{x}{493\cdot 3}=\frac{3600\cdot 180\cdot 7900}{17.80\cdot 3.1416\cdot 493.3}$$
$$=185,575 哩。$$

例五： 相隔 d 呎距離之兩點，在地面下二鉛錘線，其交角爲 m″，於高 h 哩之處，其交角爲 n″，則地球半徑爲 $\frac{nh}{m-n}$ 哩，試證之。

圖 六



［證］ 設地球半徑爲 R 哩，因 d 呎與地球半徑比較爲甚小，故可視作一弧，今

$$d=R\theta=(R+h)\theta'$$

卽 $$R\cdot\frac{m\pi}{180\cdot 60^2}=(R+h)\cdot\frac{n\pi}{180\cdot 60^2}$$

$$Rm=n(R+h)$$

$$\therefore R=\frac{nh}{m-n}$$

卽地球半徑爲 $\frac{nh}{m-n}$ 哩也。

習 題 一

1. 下列諸角，用六十分度單位表之：—

$\frac{3}{8}\pi$; $\frac{\pi+1}{6}$; 2.8

2. 下列諸角,以本位弧表之:—

$990°$; $22\frac{1°}{2}$; $125°23'19''$

3. 一圓之半徑爲 4 尺,中心角 80°,所對之弧長若干?

4. 一輪每秒轉十次,則轉過2本位弧時,需時若干?($\pi=\frac{22}{7}$)

5. 距塔 1 哩之遠,對塔之視角爲 1°,問塔高若干?

6. 高 6 呎之人,視角爲 1°,其距離若何?

7. 地球之直徑約爲 7900 哩,則地球中心角 1′ 所對之弧長若干?

8. 月之直徑向地球之角度爲 1868″,月與地球之距離爲 238793 哩,求月之直徑。

9. 一鐵道轉灣之處恰成一圓弧,半徑爲半哩.一列車以一時 20 哩之速度行駛其上,問在10 秒間轉過幾度?

10. 在三點半時,鐘面長短兩針成何角,以本位弧單位表之。

11. 分圓周成五段恰成 A.P. (等差級數),最大者爲最小者之 6 倍,問最小弧對中心角爲幾本位弧?

(提示:令中間一段爲 x, 則由小至大順次爲 $x-2y$, $x-y$, x, $x+y$, $x+2y$ ………………………………………………)

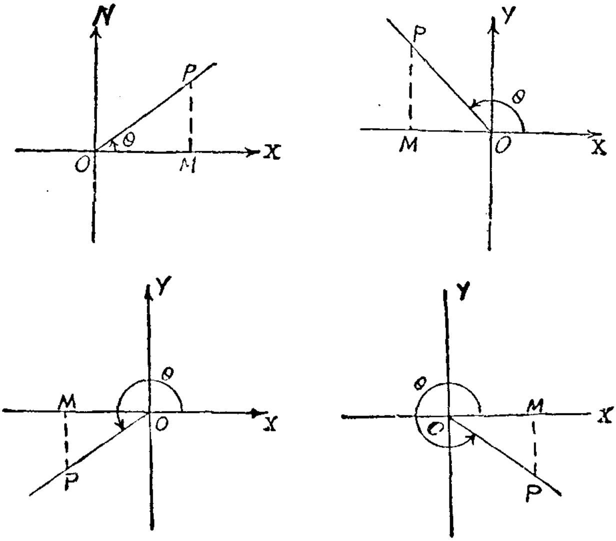
12, 求正五邊形,正六邊形,正八邊形,正十二邊形之各一內角之本位弧單位數。

13. 一三角形之一角爲 x 本位弧,第二角爲 x 百分度,第三角爲 x 度,求最小角,以度表之.(六十分度)

14. 某鐵路之一灣曲爲兩反向圓弧相接而成,一弧爲 $18°30'$, 半徑 2100 尺,一弧爲 $21°$, 半徑 2800 尺,問此灣曲共長若干?

II. 角之八函數 (Eight Functions of an Angle)

圖 七



4. 角之八函數 在上圖中,設 θ 角在任意一象限

內，此角之一邊合于 XO，今在$\angle XOP$之邊 OP 上任意取一點 P，作 $MP\perp X$ 軸，則 MP 爲 P 之縱座標，OM 爲 P 點之橫座標.命$\angle XOP=\theta$，則謂

$$\theta\text{之正弦}=\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{\text{縱座標}}{\text{斜線}}$$

$$\theta\text{之正切}=\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{\text{縱座標}}{\text{橫座標}}$$

$$\theta\text{之正割}=\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{\text{斜線}}{\text{橫座標}}$$

$$\theta\text{之餘弦}=\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{\text{橫座標}}{\text{斜線}}$$

$$\theta\text{之餘切}=\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{\text{橫座標}}{\text{縱座標}}$$

$$\theta\text{之餘割}=\csc\theta=\frac{OP}{MP}=\frac{\text{斜線}}{\text{縱座標}}$$

θ之正矢 $=\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta$ (versed Sine of θ)

θ之餘矢 $=\operatorname{covers}\theta=1-\sin\theta$ (coversed Sine of θ)

斜線 OP 之長謂之絕對値，因不記其符號也.今縱橫座標在各象限內，正負不同，而 OP 又爲絕對値，故各象限內之角之函數正負不同，有如下表.

θ之函數 / θ所在象限	sin csc	cos sec	tan cot
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

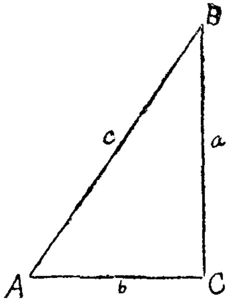
表 4.

5. 銳角之八函數

通常可作一直角三角形以其每兩邊之比表之，如右圖中直角三角形 ACB 之銳角A之函數爲

$$\sin A=\frac{a}{c}\left(=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\right)$$
$$\cos A=\frac{b}{c}\left(=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\right)$$
$$\tan A=\frac{a}{b}\left(=\frac{\text{對邊}}{\text{隣邊}}\right)$$
$$\cot A=\frac{b}{a}\left(=\frac{\text{隣邊}}{\text{對邊}}\right)$$
$$\sec A=\frac{c}{b}\left(=\frac{\text{斜邊}}{\text{隣邊}}\right)$$
$$\csc A=\frac{c}{a}\left(=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\right)$$

圖 八



$c^2=a^2+b^2$

習慣上，a對A角之邊，b對B角之邊，c對C角之邊。直角頂常寫爲C

例一：設在上圖，$a=\sqrt{m^2+mn}$，$c=m+n$，<u>求A角六函數之</u>值。

[解] $\because\ c^2=a^2+b^2,$

$\therefore\ b^2=(m+n)^2-(m^2+mn)$

$=n^2+mn$

因A爲銳角，其函數皆爲正，故祇取正值

此種題目卽使無"設如上題一句"，亦均默認此爲直角三角形，c爲斜邊，A爲銳角

註：函數在各象限中之正號，可由下法記憶之：

Sin	Tan	Cos
Second	Third	Cyclic
二	三	四

第一象限內各函數俱爲正，其他正弦，正切，餘弦之正號在上表中可推知。

圖 九