

中學叢書

新三角學誦義

朱鳳豪編著

龍門聯合書局出版

中 學 叢 書

新 三 角 學 講 義

朱 鳳 豪 編 著

本編爲高中三角補充教材。作爲
複習教本、升學準備及參考用書
均極適合。

龍 門 聯 合 書 局 出 版

新三角學講義

朱鳳豪編著

★版權所有★

龍門聯合書局出版

上海市書刊出版業營業許可證出 029 號

上海茂名北路 300 弄 3 號

新華書店總經售

新光明記印刷所印刷

上海康定路 162 號

開本：787×1092 1/32	印數：34,501—38,500 冊
印張：11 14/32	1940 年 3 月 第 一 版
字數：195,000	1955 年 7 月 第 廿 三 次 印 刷
定價：(8) 一元	

目 錄

	頁 數
I 章 角之度量法	<u>1—8</u>
1. 角之意義.....	1
2. 角之量法.....	1
3. 任意象限內之角.....	3
習題一.....	6
II 章 角之八函數	<u>8—23</u>
4. 角之八函數.....	8
5. 銳角之八函數.....	9
習題二.....	12
6. 線表函數法.....	12
7. 函數之變跡.....	14
習題三.....	17
8. 八函數之關係公式.....	18
習題四.....	22
III 章 三角恆等式(簡易)	<u>23—43</u>
9. 三角恆等式.....	23
10. 證題術.....	25
11. 關於證題時其他應注意之點.....	27

習題五.....	34
12. 特別角之函數.....	36
習題六.....	37
13. 直角三角形之解法.....	38
習題七.....	42
IV 章 簡易測量題(關於直角三角形者)	<u>43—57</u>
14. 簡易測量題	43
習題八.....	53
V 章 任意象限角函數化為銳角函數法	<u>57—68</u>
15. 兩角相差為 90° 之倍數時其函數間之關係.....	58
習題九.....	63
VI 章 複角之函數	<u>68—94</u>
16. 和差角之函數.....	68
習題十.....	74
17. 倍角半角函數.....	77
習題十一.....	84
18. 函數和差公式.....	87
習題十二.....	91
VII 章 證題雜例(恒等式續)	<u>94—155</u>
19. 證題術研究.....	94
20. $\sin mx$ 與 $\sin^m x$ 之互化法.....	100
21. 特種角之函數.....	102

22. ‡關於三個或三個以上角之問題.....	106
23. ‡有限級數及有限積式等問題.....	113
24. ‡無限級數及無限積式等問題.....	117
25. ‡關於 A.P., G.P., H.P. 各問題.....	120
26. ‡雜題.....	122
習題十三.....	127
27. 關於 $A+B+C+\dots$ 爲定值時之恆等式...	138
習題十四.....	150

VIII 章 反三角函數

155—183

28. 反三角函數之意義.....	155
29. 同函數角.....	156
習題十五.....	165
30. 關於反三角函數之公式(反函數恆等式).....	167
習題十六.....	178

IX 章 三角方程式

183—238

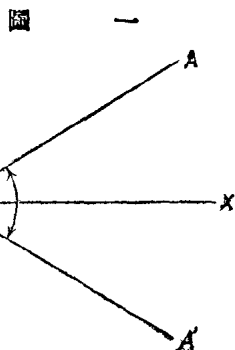
31. 三角方程式.....	183
32. 一元三角方程式.....	185
33. ‡關於不等式問題.....	204
習題十七.....	210
34. 反三角函數方程式.....	219
習題十八.....	226
35. 三角聯立方程式.....	228

習題十九	236
X 章 任意三角形	<u>239—282</u>
36. 三角形中邊角之關係	239
37. 任意三角形之解法	242
習題二十	249
38. 三角形之面積	251
39. 雜例(關於數值的各問題)	253
習題二十一	261
40. 關於三角形中邊角之恆等式	263
習題二十二	279
XI 章 測量題續	<u>283—317</u>
41. 解題注意	283
習題二十三	307
XII 章 消去法	<u>317—332</u>
42. 消去式之意義	317
習題二十四	329
附錄一. 重要三角公式彙錄	
附錄二. 與本編有關之幾何及代數上重要命題	
答案 (附一部分解法提示)	

新三角學講義

I 角之度量法 (Measurement of Angle)

1. 角之意義 一半直線OX之位置一定，又一半直線OA初與OX相重，以O為樞紐，OA繞O而轉動，所轉之多少，即角之大小。OX 謂初線 (initial line)，OA謂末線 (terminal line)。
設OA轉動之方向與鐘針轉動方向相反（向左轉）則為正角，如與鐘針相同（向右轉）則為負角（如圖一）。

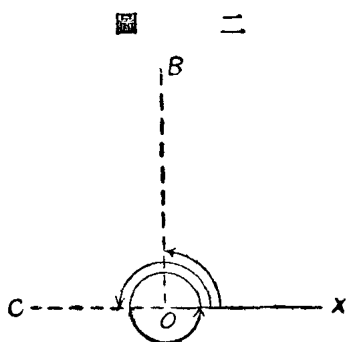


OA始與OX合，逐漸向左轉動，則 $\angle XOA$ 之量次第加大至合於OB之位置，即垂直于OX時，則 $\angle XOB$ 為直角 (right angle)。又OA轉至OC之位置，即與OX相反時則 $\angle XOC$ 為一平角 (straight angle)，當OA再左轉至與OX相重則為一周角 (perigon)，OA尚可繼續向左轉動，故角之量可大至無限。(圖二)

2. 角之量法 量角之大小通常有三種單位：

(一) 六十分法 (Sexagesimal System)

此為實用單位。設一直
角為90度 (degree)，一度分為
60分 (minute)，一分分為60秒
(second) 設一角為67度35分
42秒，通常記為 $67^{\circ}35'42''$ 。一
周角等于四個直角，故一周角
為 360° ，同理平角為 180° 。

(二) 弧度法 (Circular System)

取圓 O 之弧 $\widehat{AB}$ ，設 $\widehat{AB}$ 等於半
徑 OA 之長，則 $\angle AOB$ 為角之單位，
稱爲一本位弧 (或稱弧度 radian)。今
如以本位弧爲角之單位，設一圓之中
心角爲 θ ，所對之弧爲 a ，又半徑爲 R
則

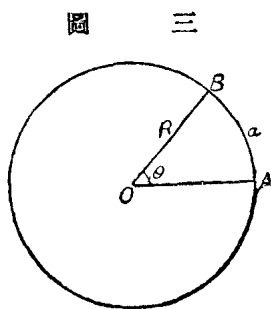
$$\theta = \frac{a}{R}$$

故一點周圍之角爲 $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}$ 。即 6.283rad ，今設一角爲
D度或 Rrad，其 D 與 R 之關係爲

$$2\pi : R = 360^{\circ} : D$$

$$\text{故 } R = \frac{\pi}{180} \cdot D \dots\dots\dots (1)$$

$$D = \frac{180}{\pi} \cdot R \dots\dots\dots (2)$$



由六十分度化本位弧用 (1) 式，由本位弧化為六十分度用 (2) 式。重要角度之 D 與 R 之相當值列表如下：

表 1.

D	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
R	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
D	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
R	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

(三) 百分法 (Centesimal System)

以一直角分成百等份，每份曰百分度 (grade)，每百分度又等分為百份，每份曰分 (minute)，每分等分百份，每份曰秒 (second)，如一角為九十四度二十三分八十七秒，記之為 $94^{\circ} 23' 87''$ 今設 G 代百分度，其與 D, R 之關係如次：

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \dots\dots\dots (3)$$

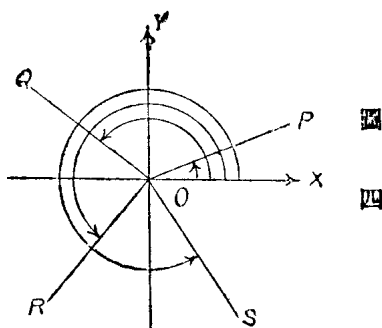
關於 R, D, G 之重要相當值，列表如下：

表 2.

D°	.9°	1°	$\frac{180}{\pi} = 57.2957795^{\circ}$ (57°17'44.8'')	180°
R rad	.0157098 rad.	$\frac{\pi}{180} = .017453 \text{ rad.}$	1 rad.	3.14159 rad.
G°	1°	1°, 11111	63°, 661972	200°

3. 任意象限內之角 設一角之初線合于 x 軸，

角頂在原點，末線在第一象限者，如角 XOP ，謂之第一象限角；在第二象限者，如角 XOQ ，謂之第二象限角；同理角 XOR 為第三象限角， XOS 為第四象限角。



各象限中角之量如下表

表 3.

第一象限角	第二象限角	第三象限角	第四象限角
$0^\circ \text{——} 90^\circ$	$90^\circ \text{——} 180^\circ$	$180^\circ \text{——} 270^\circ$	$270^\circ \text{——} 360^\circ$
$360^\circ \text{——} 450^\circ$			
$-270^\circ \text{——} -360^\circ$	$-180^\circ \text{——} -270^\circ$	$-90^\circ \text{——} -180^\circ$	$0^\circ \text{——} -90^\circ$
.....			

例一： 135° 相當本位弧若干，百分度若干？

[解] 從 (1) 得 $R = \frac{135}{180} \pi = \frac{3}{4} \pi$,

註：(a) 用 π 記本位弧時，radian 一字通常可略去不寫。

(b) $\pi = 3.1415926 \dots$ 又 $\frac{1}{\pi} = 0.318309886 \dots$

(c) 如 30° 之本位弧數即寫為 $\frac{\pi}{6}$ ，不必化為 $\frac{3.1416}{6}$ 或 0.51935

(d) π 之第一近似值為 $\frac{22}{7}$ ，準確至小數點後兩位， π 之第二近似值為 $\frac{355}{113}$ ，準確至五位小數

(e) 在高等數學中角之單位採用弧度法，但在實用上為便于觀察及計算起見均用六十分法，至於百分法，通常都不用也。

(f) 57.29578° 亦可寫為 $57^\circ.29578$

即 $R = \frac{3}{4} \times 3.1416 = 2.356 \text{ rad.}$

又從 (3) 得 $\frac{G}{200} = \frac{135}{180},$

故 $G = 200 \cdot \frac{3}{4} = 150^\circ.$

例二： 用度分秒(六十分法)表一本位弧之大小。

[解] 一本位弧 $= \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3.1416} = 57.29578^\circ = 57^\circ 17' 44.8''$

例三： 於十二點十五分之時求鐘面時分兩針所夾之角(用六十分法表之)

[解] 分針于 12 點鐘行過鐘面 15 格，但時針之速為分針之 $\frac{1}{12}$ ，故時針行過 $15 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{4}$ 格，故兩針中隔 $15 - \frac{5}{4} = \frac{55}{4}$ 格，今鐘面每格表 6 度，故兩針成 $\frac{55}{4} \cdot 6 = 82\frac{3}{4}^\circ = 82^\circ 30'$ 之角。

例四： 地球之直徑(7900哩)向太陽所張之角為 $17.8''$ ，太陽光線達于地球需時間 8 分 13.3 秒，問光線每秒之速度。

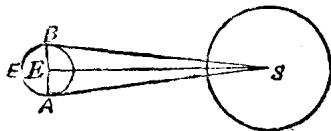
[解] 設 S 為太陽中心，E

圖 五

為地球中心，AB 為

地球之直徑， $\angle ASB$

$= 17.8''$ 因 AB 比較



甚小，故可視作以 S 為中心，SE 為半徑，所作圓上之

弧，設 $SE = x$ ，則 $\angle ASB(\text{rad}) = \frac{AB}{SE}$

$$\text{即 } \frac{17.8\pi}{3600 \cdot 180} = \frac{7900}{x}$$

$$\therefore x = \frac{3600 \cdot 180 \cdot 7900}{17.8\pi}$$

$$\text{又 } 8\text{分}13.3\text{秒} = 8 \cdot 60 + 13.3\text{秒} = 493.3\text{秒}$$

$$\text{故光線每秒速度爲 } \frac{x}{493.3} = \frac{3600 \cdot 180 \cdot 7900}{17.80 \cdot 3.1416 \cdot 493.3} \\ = 185,575 \text{哩.}$$

凡用公式

$$\text{角} = \frac{\text{弧}}{\text{半徑}}$$

角之單位必須
爲本位弧

例五： 相隔 d 呎距離之兩點，在地面下二鉛垂線，其交角爲 m'' ，於高 h 哩之處，其交角爲 n'' ，則地球半徑爲 $\frac{nh}{m-n}$ 哩，試證之。

圖 六

[證] 設地球半徑爲 R 哩，因 d 呎與地球半徑比較爲甚小，故可視作一弧，今

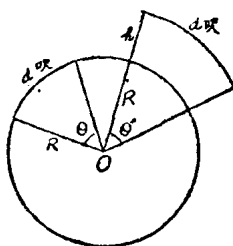
$$d = R\theta = (R+h)\theta'$$

$$\text{即 } R \cdot \frac{m\pi}{180 \cdot 60^2} = (R+h) \cdot \frac{n\pi}{180 \cdot 60^2}$$

$$Rm = n(R+h)$$

$$\therefore R = \frac{nh}{m-n}$$

即地球半徑爲 $\frac{nh}{m-n}$ 哩也。



習 題 一

1. 下列諸角，用六十分度單位表之：=

$$\frac{3}{8}\pi; \frac{\pi+1}{6}; 2.8$$

2. 下列諸角，以本位弧表之：—

$$990^\circ; 22\frac{1}{2}^\circ; 125^\circ 23' 19''$$

3. 一圓之半徑為 4 尺，中心角 80° ，所對之弧長若干？

4. 一輪每秒轉十次，則轉過 2 本位弧時，需時若干？ $(\pi = \frac{22}{7})$

5. 距塔 1 哩之遠，對塔之視角為 1° ，問塔高若干？

6. 高 6 呎之人，視角為 1° ，其距離若何？

7. 地球之直徑約為 7900 哩，則地球中心角 $1'$ 所對之弧長若干？

8. 月之直徑向地球之角度為 $1868''$ ，月與地球之距離為 238793 哩，求月之直徑。

9. 一鐵道轉灣之處恰成一圓弧，半徑為半哩。一列車以一時 20 哩之速度行駛其上，問在 10 秒間轉過幾度？

10. 在三點半時，鐘面長短兩針成何角，以本位弧單位表之。

11. 分圓周成五段恰成 A.P. (等差級數)，最大者為最小者之 6 倍，問最小弧對中心角為幾本位弧？

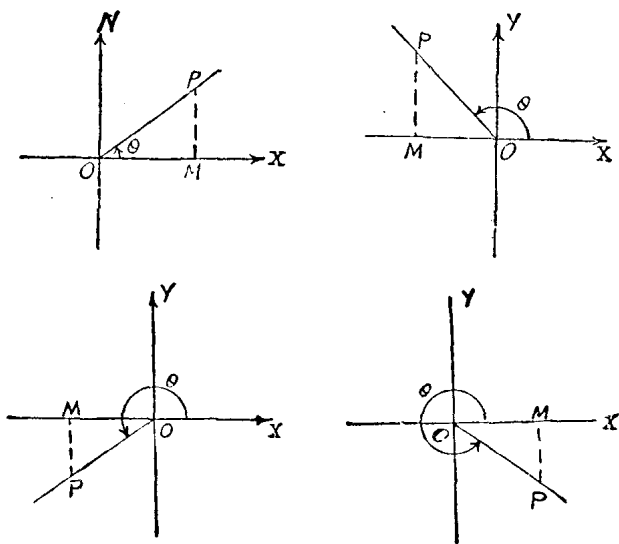
(提示：令中間一段為 x ，則由小至大順次為 $x-2y, x-y, x, x+y, x+2y, \dots$)

12. 求正五邊形，正六邊形，正八邊形，正十二邊形之各一內角之本位弧單位數。

13. 一三角形之一角爲 x 本位弧, 第二角爲 x 百分度, 第三角爲 x 度, 求最小角, 以度表之. (六十分度)
14. 某鐵路之一灣曲爲兩反向圓弧相接而成, 一弧爲 $18^\circ 30'$, 半徑 2100 尺, 一弧爲 21° , 半徑 2800 尺, 問此灣曲共長若干?

II. 角之八函數 (Eight Functions of an Angle)

圖 七



4. 角之八函數 在上圖中, 設 θ 角在任意一象限

內，此角之一邊合于 XO，今在 $\angle XOP$ 之邊 OP 上任意取一點 P，作 $MP \perp X$ 軸，則 MP 爲 P 之縱座標，OM 爲 P 點之橫座標。令 $\angle XOP = \theta$ ，則謂

$$\theta\text{之正弦} = \sin \theta = \frac{MP}{OP} = \frac{\text{縱座標}}{\text{斜線}}$$

$$\theta\text{之正切} = \tan \theta = \frac{MP}{OM} = \frac{\text{縱座標}}{\text{橫座標}}$$

$$\theta\text{之正割} = \sec \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{斜線}}{\text{橫座標}}$$

$$\theta\text{之餘弦} = \cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{橫座標}}{\text{斜線}}$$

$$\theta\text{之餘切} = \cot \theta = \frac{OM}{MP} = \frac{\text{橫座標}}{\text{縱座標}}$$

$$\theta\text{之餘割} = \csc \theta = \frac{OP}{MP} = \frac{\text{斜線}}{\text{縱座標}}$$

$$\theta\text{之正矢} = \text{vers } \theta = 1 - \cos \theta \text{ (versed Sine of } \theta \text{)}$$

$$\theta\text{之餘矢} = \text{covers } \theta = 1 - \sin \theta \text{ (covered Sine of } \theta \text{)}$$

斜線 OP 之長謂之絕對值，因不記其符號也。今縱橫座標在各象限內，正負不同，而 OP 又爲絕對值，故各象限內之角之函數正負不同，有如下表。

θ 之函數 θ 所在象限	$\sin$ csc	$\cos$ sec	$\tan$ cot
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

表 4.

5. 銳角之八函數

通常可作一直角三角形以其每兩邊之比表之，如右圖中直角三角形 ACB 之銳角 A 之函數爲

$$\sin A = \frac{a}{c} \left(= \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \right)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \left(= \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \right)$$

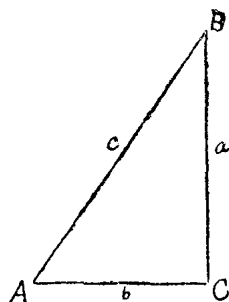
$$\tan A = \frac{a}{b} \left(= \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} \right)$$

$$\cot A = \frac{b}{a} \left(= \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} \right)$$

$$\sec A = \frac{c}{b} \left(= \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} \right)$$

$$\csc A = \frac{c}{a} \left(= \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \right)$$

圖 八



$$c^2 = a^2 + b^2$$

習慣上，a對
A角之邊，b對
B角之邊，c對
C角之邊。
直角頂常寫
為C

例一：設在上圖， $a = \sqrt{m^2 + mn}$ ， $c = m + n$ ，求A角六函數之值。

[解] $\because c^2 = a^2 + b^2$,

$$\begin{aligned} \therefore b^2 &= (m+n)^2 - (m^2 + mn) \\ &= n^2 + mn \end{aligned}$$

因A為銳角，其函數皆為正，故祇取正值

此種題目即使
無“設如上題
一句”，亦均
默認此為直角
三角形，c為
斜邊，A為銳角

註：函數在各象限中之正號，可由下法記憶之：

圖 九

Sin	Tan	Cos
Second	Third	Cyclic
二	三	四

第一象限內各函數俱為正，
其他正弦，正切，餘弦之正
號在上表中可推知。

