双重丛书

线性代数

重点内容重点题

编著　杨泮池　赵彦晖　褚维盘
主审　崔荣泉

西安交通大学出版社

双重丛书

线性代数
重点内容重点题

编著　杨泮池　赵彦晖　褚维盘
主审　崔荣泉

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是学习“线性代数”课程的辅导书，突出本课程的重点内容和重点习题是本书的特点。本书的宗旨是，用较短的篇幅总结全面的内容，用较少的时间掌握核心的知识。

本书主要由：重点内容提要、重点例题分析和精选考研试题解析，三部分组成。在各章重点内容部分，系统地归纳了本章所涉及的基本概念、基本理论和基本方法；在重点例题分析部分，选择了能巩固本课程内容的重点例题；在精选考研试题解析部分，挑选了历年硕士研究生入学考试的各种类型的试题。

本书适合学习“线性代数”课程的本、专科生使用。

图书在版编目(CIP)数据
线性代数重点内容重点题 / 杨泮池等编 .—西安：西安交通大学出版社，2004.4
(双重丛书)
ISBN 7-5605-1773-0

Ⅰ.线...　Ⅱ.杨...　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 098807 号

书　　名　线性代数重点内容重点题
编　　著　杨泮池　赵彦晖　褚维盘
出版发行　西安交通大学出版社
地　　址　西安市兴庆南路 25 号(邮编：710049)
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷　陕西省轻工印刷厂
字　　数　289 千字
开　　本　890mm×1240mm　1/32
印　　张　9.625
版　　次　2004 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 1 次印刷
印　　数　0 001～5 000
书　　号　ISBN 7-5605-1773-0 / O·202
定　　价　13.00 元

前言

《线性代数》是高等学校理工及经济等各种专业大学生的必修课程.由于大学《线性代数》课程受课内学时的限制,只能讲述这门学科最基本的理论和方法,因此,初学者要想弄懂这些抽象的理论比较困难,更不易掌握这些概念与理论的内在规律性,学生们普遍感到不能灵活地运用基本理论和方法推证与计算变化万千的线性代数问题.

为此,作者根据原国家教委批准的《线性代数课程教学基本要求》,并参照国内外多种相关教材及历年来考研的试题,以作者多年的教学经验写就此书.书中注意到重点和难点,并照顾到不同层次读者的需求,叙述和解析过程尽可能详细,因此我们相信本书对各类读者都有所裨益.

全书共6章,每章都由如下部分组成:

(1) **基本要求**:依据《线性代数课程教学基本要求》,指出本章纲领,即本章应深入理解的基本内容和应重点掌握的方法.

(2) **重点内容提要**:归纳和简述本章的基本概念、基本理论和基本方法及其内在的联系和规律性,并指出应注意的问题.

(3) **重点例题分析**:这里精选了一定数量的典型题目,这部分是每章的重点.对于这些重点例题不仅给出题前的分析,而且给出题后的注释,以启发和引导读者对问题的深入思考,期望达到举一反三的效果.

(4) **精选考研试题解析**:精选了部分近年来考研中线性代数的相关试题,并详加解析.这将有益于希望得到进一步提高和有志于考研的读者.

(5) **自测题**:这些题目用于读者自我检测,题目中的部分题目源自大学《线性代数》课程的考试题及考研题.每章的自测题都给出了提示或答案.

限于作者水平,错漏和不妥之处在所难免,恳望读者指正.

作者

2004年3月

目 录

第1章　行列式

1.1　基本要求

1. 了解行列式的定义及性质.
2. **熟练掌握行列式的计算**.
3. 掌握应用克莱姆(Cramer)法则求解线性方程组.

1.2　重点内容提要

1.2.1　行列式

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的定义有两种方式.

定义 1.1　$n = 1$ 时,定义一阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = |a_{11}| = a_{11}$$

n 为大于 1 的正整数时,定义 n 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} = \sum_{j=1}^{n}a_{1j}D_{1j}$$

其中 M_{1j} 为 a_{1j} 对应的**余子式**,$D_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$ 为 a_{1j} 对应的**代数余子式**.

这个递推式的定义提供了行列式的一种计算方法 —— 按行列式第一行展开计算.如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由此定义和行列式性质可得到 n 阶行列式按任一行(列)展开计算的定理:

按第 i 行展开

$$|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

按第 j 列展开

$$|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}a_{ij}D_{ij}, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

其中 M_{ij} 和 D_{ij} 分别为 a_{ij} 的余子式与代数余子式.

定义 1.2 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 定义为

$$|\boldsymbol{A}| = \sum(-1)^{t(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

它是 n!项的代数和,符号为$(-1)^{t(j_1,\cdots,j_n)}$,$(j_1,\cdots,j_n)$ 为自然数的一个排列,$t(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 为这个排列的逆序数.

注 (1) 这两种定义一致,知道其一即可.

(2) 方阵 A 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 也常记作 $\det\boldsymbol{A}$

(3) $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{kj} = 0\ (i \neq k)$,即某一行的元素与另一行元素的代数余子式的乘积之和为 0. 对列亦然.

1.2.2 行列式的性质

1. 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 与其转置行列式 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 相等,即 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

2. 对调行列式的两行(或两列),仅改变行列式的符号,如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3. 行列式某行(列)的所有元素乘以 k,等于该行列式乘以 k.

4. 行列式某行(列)各元素均为两元素之和时,可将此行列式分为两个行列式之和,即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

5. 行列式某行(列)各元素乘以同一个数 k,再加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

6. (行列式相乘法则)对于 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}| = |a_{ij}|$ 与 $|\boldsymbol{B}| = |b_{ij}|$ 相乘,有法则

$$
|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{C}| = |c_{ij}|
$$

n 阶行列式 $|\boldsymbol{C}| = |c_{ij}|$ 的元素 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}(i,j = 1,2,\cdots,n)$.

1.2.3 几个特殊行列式及其结果

1. 上三角行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
$$

2. 下三角行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
$$

3. 对角行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
$$

注　对角行列式可视为上三角行列式或下三角行列式.

4. 对称行列式：主对角线两侧对称位置元素相等的行列式，即 $a_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$.

5. 反对称行列式：主对角线两侧对称位置元素为相反数的行列式，即 $a_{ij} = -a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$.

由此不难得到反对称行列式的主对角元素皆为0，即 $a_{ii} = 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$.

6. n 阶**范德蒙**(Vandermonde) **行列式**($n \geqslant 2$)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (a_i - a_j)$$

7. 分块对角阵行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{A}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_1| \cdot |\boldsymbol{A}_2| \cdots |\boldsymbol{A}_n|$$

其中各子块 $\boldsymbol{A}_i$ 皆为方阵. $|\boldsymbol{A}_i|$ 称为该行列式的子行列式，简称**子式**.

1.2.4 克莱姆(cramer)法则

对于 n 阶线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，即含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若其系数行列式 $D = |\boldsymbol{A}| \neq 0$，则该线性方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

其中 D_j 是行列式 D 中第 j 列元素换以常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后所得的 n 阶

行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注　当方程组的右端项全为 0,即 $b_i = 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 时,称方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 为**齐次线性方程组**,若 $D = |\boldsymbol{A}| \neq 0$,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0$$

1.2.5　行列式计算

行列式的计算是本章的重点.行列式虽然可以按定义进行降阶计算,但这样计算的计算量太大(计算一个 n 阶行列式要进行 $n!(n-1)$ 次乘法运算).对于高阶行列式,应当将其化简为形式简单的或特殊的行列式以简化计算,常用的方法有以下几种:

1. 利用行列式的性质,将行列式对角化、三角化,其结果是其对角元素的乘积.

2. 利用行列式的性质,使行列式出现尽量多的零元素,成为稀疏行列式,然后按零元素最多的行或列展开.

3. 将行列式化为分块对角状或三角状,应用公式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{A}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_n|$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2 \times 15 = -30$$

4. 拆行列式为几个行列式的和.

5. 递推法.这种方法是建立所求的行列式 D_n 与低阶行列式 D_i($i <$

n）的关系式，再由这个关系式解出所求的行列式 D_n. 它特别适用于各行（列）所含元素的基本形式相同，如行和相等或列和相等，如例 1.3.

6. 升降法(加边法). 虽然降阶法是由定义导出的一种化繁为简的方法，具有一般性，但采用升降法使行列式借助某种特殊的行列式求解，亦可起到化繁为简的作用，如例 1.9.

7. 应用范德蒙行列式.

8. 应用数学归纳法.

1.3　重点例题解析

例 1.1　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{vmatrix}$$

分析　这是一个副对角线元素为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，而其它元素均为 0 的稀疏行列式，可依次按定义用第一行展开解之.

解
$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{1+n}\lambda_1 \begin{vmatrix} 0 & & \lambda_2 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+n}\lambda_1(-1)^{1+(n-1)}\lambda_2 \begin{vmatrix} 0 & & \lambda_3 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \\ &= (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \end{aligned}$$

注　本例亦可进行列交换使 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 位于主对线上，交换列的次数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{n^2-n}{2}$$

所以有同样的结果

$$D_n = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

根据本例的方法和结果,读者不难证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

例 1.2　计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

分析　行列式 D_5 的特点是有一个子式是零子式,可以交换行使 D_5 成分块对角状,再按行列式乘法计算.

解　进行行交换使 D_5 成分块对角行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$$

注　有一行(列)元素皆为 0 的行列式等于 0,所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$$

例 1.3 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

分析 这是一个行和相等的行列式,将第 2,3,4 列都加到第 1 列就得到各元素相等的一列.

解 $$D_4\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}x & -1 & 1 & x-1\\ x & -1 & x+1 & -1\\ x & x-1 & 1 & -1\\ x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3-c_1\\ c_4+c_1}]{c_2+c_1}x\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}0 & 0 & x\\ 0 & x & 0\\ x & 0 & 0\end{vmatrix}=x^4$$

注 **这种行和相等的做法具有普遍性,如**

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

的行和为 $x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$**,可用本例的解法.**

例 1.4 设

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 4^4 & 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}$$

求 $f(\lambda)=0$ 的实根.

分析　这是以行列式形式给出的多项式 $f(\lambda)$,首先将 $f(\lambda)$ 写为一般的代数式,然后求 $f(\lambda)=0$ 的实根.

解　应用行列式性质,按第 1 列展开

$$f(\lambda)=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}-4^4\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\end{vmatrix}=\lambda^4-4^4$$

那么 $f(\lambda)=\lambda^4-4^4=0$ 的实根为 $\lambda=\pm 4$.

注　读者应认识到,行列式是一个算式,是一个按行列式定义规定的方式构成的算式,人们可根据需要将行列式变为一般的代数式(如本例),也可以将代数式写作行列式形式表达,如向量积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\end{aligned}$$

显见,用行列式表达向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 比代数式更清晰.

例 1.5　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

分析　这是一个主对角线元素全为 2、两条次对角线元素全为 1 的三对角行列式,可采用递推的方法求之.

解　将 D_n 按第 1 行展开

$$D_n=2\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

由此

$$D_{n-1} = 2D_{n-2} - D_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$D_3 = 2D_2 - D_1$$

将这些等式相加并消去相同的项,得

$$D_n = D_{n-1} + D_2 - D_1$$

因为 $D_1 = 2, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$,则 $D_n = D_{n-1} + 1$.

因此,$D_3 = D_2 + 1 = 4, D_4 = 5, \cdots, D_n = n + 1$.

注 这种三对角行列式在求解方程组时常常见到.

例 1.6 当 $a \neq b$ 时,证明

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \tag{1}$$

分析 这和上例一样,也是一个三对角行列式,可用上例的递推法求证.

证 1 按第 1 列展开,得递推式

$$D_n = (a + b)D_{n-1} - abD_{n-2} \tag{2}$$

下面应用数学归纳法证明(1)式成立.

首先,$n = 1$ 时,$D_1 = a + b$,显见(1)式成立.

假设 $n \leqslant k$ 时(1)式成立,即有

$$D_k = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b}$$

由(2)式有

$$D_{k+1} = (a + b)D_k - abD_{k-1}$$

$$= (a+b)\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b} - ab\frac{a^k-b^k}{a-b}$$
$$= \frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}$$

根据数学归纳法原理,对一切自然数 n,(1) 式成立.

注　本例也可按上例那样求证,由(2) 式得到一系列递推关系式.

证 2　将 D_n 的第 1 列写作两列之和,即

$$D_n = D'_n + D''_n$$
$$= \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

分别求出D'_n、D''_n 的递推关系式

$$D'_n = a\begin{vmatrix} 1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$
$$= aD'_{n-1}$$

依此有

$$D'_n = aD'_{n-1} = a^2D'_{n-2} = \cdots = a^{n-2}D'_2$$