積　分

◉ 無窮數列的極限(題號1～16)

1. 數列極限之定義

若對任一$\varepsilon>0$，存在一正整數n_0，使得$n>n_0$時，

$$|a_n-L|<\varepsilon$$

恆成立，則稱L爲數列$\{a_n\}$之極限，或稱$\{a_n\}$收斂於L，以$\lim_{n\to\infty} a_n=L$表之。

2. 極限定理

(1) 設$\{a_n\}$, $\{b_n\}$爲二收斂數列，且

$\lim_{n\to\infty} a_n=A$, $\lim_{n\to\infty} b_n=B$，則

① $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\pm\lim_{n\to\infty} b_n=A\pm B$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=A\cdot B$

③ 若$k\in R$，則$\lim_{n\to\infty}(ka_n)=k\lim_{n\to\infty} a_n=kA$

④ 若$B\neq 0$，則$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{A}{B}$

⑤ 挾擊定理(三明治定理)：

設$a_n\leq c_n\leq b_n$且$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$，

則$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots\cdots+a_1n+a_0}{b_mn^m+b_{m-1}n^{m-1}+\cdots\cdots+b_1n+b_0}$

$$=\begin{cases}\pm\infty,\ k>m\\ \dfrac{a_k}{b_m},\ k=m\\ 0\ ,\ k<m\end{cases}$$

3. 收斂數列與發散數列

(1) 收斂數列

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha\,(\alpha\in R)$，則稱此無窮數列爲收斂數列。

(2) 發散數列

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在，則稱此無窮數列爲發散數列。

4. 若存在一實數S，使$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，則稱無窮級數$\Sigma a_n$的部分和數列$S_1$, S_2, ⋯⋯ , S_n, ⋯⋯收斂，且稱S爲其和。

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，則稱此級數發散，發散級數不能求和。

5. 若無窮級數Σa_n收斂，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$(其逆不眞)。

6. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$，則無窮級數$\Sigma a_n$發散。

◉ 區間求面積法 (題號17～26)

1. 要計算曲線$y=f(x)\geq0$，直線$x=a,\ x=b,\ y=0$所圍成的區域面積，可由以下三步驟加以處理：

(1) 將閉區間$[a,b]$ n等分，其分割點依序爲a , $a+\dfrac{b-a}{n}$,

$$a+\frac{2(b-a)}{n},\ \cdots\cdots,\ a+\frac{(n-1)(b-a)}{n},\ a+\frac{n(b-a)}{n}=b。$$

(2) 對於每一個$i,\ i=1,2,\cdots\cdots,n$，選取m_i和M_i，

使得閉區間$\left[a+\dfrac{(i-1)(b-a)}{n},\ a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right]$

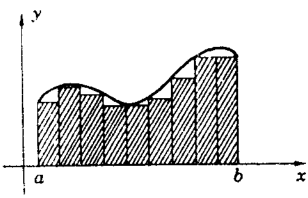
上的每個x都滿足$m_i\leq f(x)\leq M_i$，令

$$下和=L_n=\frac{b-a}{n}(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n)$$

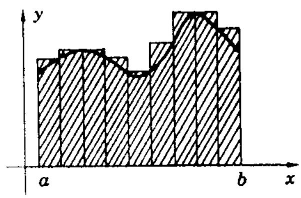
$$上和=U_n=\frac{b-a}{n}(M_1+M_2+\cdots\cdots+M_n)$$

(3) 計算 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$。

2. 假定 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n=\lim\limits_{n\to\infty} U_n=S$，則 S 稱爲函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上的定積分，以 $\int_a^b f(x)dx$ 表示。a, b 分別稱爲積分的下限與上限。



(上　和)



(下　和)

◉ 定積分及反導函數 (題號27～100)

1. 定積分的定義

設 $f(x)$ 爲定義在區間 $[a, b]$ 中之函數，將區間 $[a, b]$ 分成 n 等分，分點坐標爲 $x_0(=a), x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n(=b)$，則定義

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$其中\ \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

2. 定積分的性質

(1) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$

(2) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (其中 k爲常數)

(3) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (其中 $a<c<b$)

(5) $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

(6) $\int_a^a f(x)dx=0$

(7) 若對任一 $x\in[a,\ b]$, $f(x)\geq 0$，則$\int_a^b f(x)dx\geq 0$

(8) 若對任一 $x\in[a,\ b]$, $f(x)\leq 0$，則$\int_a^b f(x)dx\leq 0$

(9) 若對任一 $x\in[a,\ b]$, $f(x)\leq g(x)$，則

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

(10) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|\ dx$。

(11) 設$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，則$F'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

(12) 若 $f(x)$ 於區間$[a,\ b]$內爲增函數，則對任一$x\in[a,\ b]$,

$(b-a)f(a)\leq(b-a)f(x)\leq(b-a)f(b)$

(13) 積分均值定理

設 $f(x)$ 於區間 $[a,\ b]$ 內連續，則存在一數 c, $c\in(a,\ b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$$

3. 重要的定積分

(1) 設 α, β 為方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，$\alpha<\beta$，則

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) 無理函數·分數函數

① $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2,\ a>0$

② $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4a},\ a>0$

(3) 三角函數

① $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \sin kx\,dx=0$, $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \cos kx\,dx=0$

② $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx=0$$

4. 反導函數與不定積分

(1) 反導函數的定義

若在一區間中，$F'(x)=f(x)$，則函數 $F(x)$ 稱為函數 $f(x)$ 之反導函數。$f(x)$ 之反導函數，以符號 $\int f(x)\,dx$ 表之；又稱 $\int f(x)\,dx$ 為 $f(x)$ 之不定積分。

觀念分析：

① 一個函數之反導函數不是唯一的，因為 $\dfrac{d}{dx}(F(x)+c)=F'(x)=f(x)$ （c 為常數），所以，若函數 $F(x)$ 為函數 $f(x)$ 之反導函數，則 $F(x)+c$ 亦為 $f(x)$ 之反導函數。

② 若兩函數$F(x)$與$G(x)$均爲$f(x)$之反導函數，則$F(x)$與$G(x)$之差爲一常數，亦即$F(x)-G(x)=c$，因此
$\int f(x)\,dx=F(x)+c$

(2) 微積分基本定理

① 微積分第一基本定理：
若函數$f(x)$在區間$[a, b]$中連續，且令
$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in[a, b]$，則$F'(x)=f(x)$

② 微積分第二基本定理：
若函數$f(x)$在區間$[a, b]$中連續，且$F'(x)=f(x)$，
$x\in[a, b]$，則$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

(3) 微積分重要性質

① $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

② $\dfrac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)$

③ $\dfrac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$

◉ 不定積分及其基本性質（題號101～134）

1. 反導函數與積分常數

(1) 若$F'(x)=f(x)$爲函數$F(x)$的導函數，則函數$F(x)$稱爲$f(x)$的反導函數(anti-derivative)或不定積分(indefinite integral)。

(2) 若$\dfrac{dy}{dx}=f(x)$，則$y=\int f(x)\,dx+c$，其中 c爲任意常數，稱爲積分常數，而$F(x)+c$ 稱爲$f(x)$的不定積分。

2. 不定積分的基本性質

(1) $\int f(x)\,dx=F(x)+c$，若且唯若$F'(x)=f(x)$。

(2) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$

(3) $\int \dfrac{d}{dx}f(x)\,dx=f(x)+c$

(4) $\int [c_1f(x)+c_2g(x)]\,dx=c_1\int f(x)\,dx+c_2\int g(x)\,dx$

(5) $\int x^m\,dx=\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}+c,\ m\neq -1$

(6) 設$F(x)$與$G(x)$爲可微函數，若$F'(x)=G'(x)$，則存在一常數c，使得$F(x)=G(x)+c$。

(7) $\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$

3. 不定積分的基本公式

(1) $\int x^m\,dx=\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}+c$

(2) $\int \left(f(x)\right)^{\alpha} f'(x)\,dx=\dfrac{1}{\alpha+1}\left(f(x)\right)^{\alpha+1}+c,\ \alpha\neq -1$

(3) $\int \dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

(4) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$

(5) $\int \sin kx\,dx=-\dfrac{1}{k}\cos kx+c$

(6) $\int \cos kx\,dx=\dfrac{1}{k}\sin kx+c$

(7) $\int \tan kx\,dx=\dfrac{1}{k}\ln|\sec kx|+c=-\dfrac{1}{k}\ln|\cos kx|+c'$

(8) $\int \cot kx\,dx=-\dfrac{1}{k}\ln|\csc kx|+c=\dfrac{1}{k}\ln|\sin kx|+c'$

(9) $\int \sec kx\,dx=\dfrac{1}{k}\ln|\sec kx+\tan kx|+c$

(10) $\int \csc kx\,dx = \frac{1}{k}\ln|\csc kx - \cot kx| + c$

$$= -\frac{1}{k}\ln|\csc kx + \cot kx| + c'$$

(11) $\int \sec^2 kx\,dx = \frac{1}{k}\tan kx + c$

(12) $\int \csc^2 kx\,dx = -\frac{1}{k}\cot kx + c$

(13) $\int \sec kx \tan kx\,dx = \frac{1}{k}\sec kx + c$

(14) $\int \csc kx \cot kx\,dx = -\frac{1}{k}\csc kx + c$

(15) $\int e^x\,dx = e^x + c$

(16) $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$

(17) $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + c$

(18) $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(19) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

(20) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$

4. 不定積分的求法

(1) 變數代換法

設 $f(u)$ 及 $u = g(x)$，若 $g'(x)$ 與 $\int f(u)\,du$ 均存在，則

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

(2) 分部積分法

① 分部積分公式：

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)$$

【證明】 $\because \quad d(f(x)g(x))=g(x)df(x)+f(x)dg(x)$

$\Rightarrow \quad f(x)dg(x)=d(f(x)g(x))-g(x)df(x)$

兩邊同時積分

$\Rightarrow \quad \int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x)$

② 處理原則：

(i) $dg(x)$部分的選擇須易於積分。

(ii) $\int g(x)df(x)$ 要比$\int f(x)dg(x)$之積分簡單。

(3) 三角函數的積分

① 利用變數代換法變形爲適合之基本積分式，再積分之。

② $\int \sin^m u\cos^n u\,du$ 型：

(i) m, n 有一爲正奇數，若 m 爲正奇數(或 n 爲正奇數)，則提出 $\sin u\,du$(或提出 $\cos u\,du$)，然後將其餘部份依 $\sin^2 u+\cos^2 u=1$ 的關係化爲 $\cos u$的多項式(或 $\sin u$ 的多項式)，再積分之。

(ii) m, n 均爲正偶數時，則利用

$$\sin^2 u=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2u\right),\quad \cos^2 u=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2u\right)$$

降低被積分函數的次數，再積分之。

③ $\int \tan^n u\,du$ 與$\int \cot^n u\,du$ 型：

當 n 爲正整數時，不論其爲偶數或奇數，引用 $1+\tan^2 u=\sec^2 u$(或 $1+\cot^2 u=\csc^2 u$) 的關係以求積分。

④ $\int \sec^n u\tan^m u\,du$ 與$\int \csc^n u\cot^m u\,du$ 型：

(i) 當 n 爲正偶數時，則提出 $\sec^2 u\,du$(或 $\csc^2 u\,du$)，其餘依 $1+\tan^2 u=\sec^2 u$(或 $1+\cot^2 u=\csc^2 u$)的關係化爲 $\tan u$ 的多項式(或 $\cot u$ 的多項式)，再求積分。

(ii) 當m爲正奇數時，則提出$\sec u\tan u\,du$(或$\csc u\cot u\,du$)，其餘化爲$\sec u$(或$\csc u$)的多項式，再求積分。

(4) 指數函數與對數函數的積分

① $\int e^x\,dx = e^x + c$

② $\int e^u\,du = e^u + c$, u爲可微分函數

③ $\int a^x\,dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + c$

④ $\int a^u\,du = \dfrac{1}{\ln a}a^u + c$, u爲可微分函數

⑤ $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left\{a\sin bx - b\cos bx\right\} + c$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left\{a\cos bx + b\sin bx\right\} + c$

⑥ $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

⑦ $\int \log_a x\,dx = \dfrac{1}{\ln a}\left(x\ln x - x\right) + c$

(5) 三角代換積分法

① 被積分函數若有$\sqrt{a^2-x^2}$型式，則令$x=a\sin\theta$或$x=a\cos\theta$代換之$\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\text{ 或 }0\le\theta\le\pi\right)$。

② 被積分函數若有$\sqrt{a^2+x^2}$型，則令$x=a\tan\theta$代換之$\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$。

③ 被積分函數若有$\sqrt{x^2-a^2}$型，則令$x=a\sec\theta$代換之$\left(0\le\theta\le\pi,\ \theta\ne\dfrac{\pi}{2}\right)$。

(6) $\sin x$與$\cos x$的有理函數積分法

被積分函數若爲$\sin x$與$\cos x$的有理函數，則可令

$t=\tan\frac{x}{2}$, $-\pi<x<\pi$，則

① $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

② $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

③ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

④ $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

⑤ $\sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

(7) 部分分式積分法

① 若被積分函數為 $f(x)=g(x)/h(x)$, $g(x)$, $h(x)$均為多項式時，且 $h(x)\neq 0$，可先將 $g(x)/h(x)$化為部分分式，再積分之。

② 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為多項式函數，且 $f(x)$ 之次數小於 $g(x)$ 之次數，則依代數定理

$$\frac{f(x)}{g(x)}=F_1+F_2+\cdots\cdots+F_k$$

每個 $F_i(1\leq i\leq k)$ 為下列二種型式之一

$$\frac{A}{(px+q)^m}\text{或}\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^n}$$

其中 ax^2+bx+c 為最簡化形式。

規則(i)：每個型式如 $(px+q)^m$ 之因數 $(m\geq 1)$，其分解分式包括 m 個該型之部分分式

$$\frac{A_1}{px+q}+\frac{A_2}{(px+q)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_m}{(px+q)^m}$$

，其中 $A_i\in R(1\leq i\leq m)$

規則(ii)：每個型式如 $(ax^2+bx+c)^n$ 之因數 $(n\geq 1,$
$b^2-4ac<0)$，其分解分式包括 n 個該型式之部分分式

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}\ ,\ A_i,\ B_i\in R(1\leq i\leq n)$$

(8) 配方積分法

若被積分函數含有二次多項式 ax^2+bx+c，則可利用配方

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

再配合變數代換法以求積分

說明例：求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}dx=\ ?$

【詳解】 $x^2+8x+25=(x+4)^2+9$

設 $x+4=3\tan\theta\ \Rightarrow\ dx=3\sec^2\theta\,d\theta$

代入原式得

$$\int\frac{1}{\sqrt{9\tan^2\theta+9}}\cdot 3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int\sec\theta\,d\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8x+25}}{3}+\frac{x+4}{3}\right|+c$$

$$=\ln\left|\sqrt{x^2+8x+25}+x+4\right|+c'$$

1 理上 三 ★★

求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2}{n^2}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-3\right]$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-3}{n^2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+n-4}$

【詳解】 (1) ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}3=3$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2}{n^2}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-3\right]$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-\lim\limits_{n\to\infty}3$

$=2\cdot0+0-3=-3$

(2) ∵ $\dfrac{3n^2+2n-3}{n^2}=3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-3}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}$

$=3+0-0=3$

(3) ∵ $\dfrac{2n+1}{n^2+n-4}=\dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^2}}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+n-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^2}}$

$=\dfrac{0+0}{1+0-0}$

$=0$

2 理上 三 ★★

設數列的一般項 a_n 如下，求各數列之極限：

(1) $a_n=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2+3}$ (2) $a_n=\ln(n+1)-\ln n$

(3) $a_n=\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

【詳解】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2+3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{3}{n^2}}$$

$$=\frac{1\times 2}{1+0}$$

$$=2$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{\ln(n+1)-\ln n\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\ln 1$$

$$=0$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n+1}\times\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{1+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

分　析　(1) 分母、分子用 n^2 除之。

(2) $a_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(3) $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，

變形後分母、分子再用 $\sqrt{n}$ 除之。

3　理上　三　★★

求下列之極限值：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$$

【詳解】 $\because$　分子 $=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$=\lim\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

$$\doteq\frac{1}{3}$$

4 理上 三 ★★

求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{x^2+2}}{x^2-x+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

【詳解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=3$

(2) 設 $x=-t$，當 $x\to-\infty$ 時，$t\to\infty$

$$\therefore\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}+\frac{1}{t}\right)=-1$$

5 理上 三 ★★

求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$

【詳解】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-4)-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

$$=0$$