金版专辑 同步教学练考

目录

第六章　不等式

第七章　直线和圆的方程

第八章　圆锥曲线方程

(《自测试题》《能力测评》《期中、期末测试卷》活页装订,随书赠送)

第6章 不等式

6.1 不等式的性质

1 学习笔记

预习探路

1. 不等式的基本性质有哪些？

提示 有三条基本性质：对于任意的元素 a,b，有 $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

2. 不等式的方向具有单向性和双向性两种，它们各自主要的用途是什么？

提示 单向性主要用于证明不等式，双向性主要用于解不等式.

3. 用不等式的性质比较大小时，常有哪两种方法？

提示 作差比较法及作商比较法.

4. 会用"$a>0, ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"这一性质吗？

提示 注意不能弱化条件，得 $a>b \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

也不能强化条件，得 $a>b>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

知识要点

$a-b>0 \Leftrightarrow \underline{a>b}$

$a-b<0 \Leftrightarrow \underline{a<b}$

$a-b=0 \Leftrightarrow \underline{a=b}$

实数的运算性质与大小顺序之间的关系，是本章整个内容的基础.

不等式的基本性质：

1. 对称性：$a>b \Leftrightarrow \underline{b<a}$
2. 传递性：$a>b, b>c \Rightarrow \underline{a>c}$
3. 可加性：$a>b \Rightarrow \underline{a+c>b+c}$
4. 可乘性：$a>b, c>0 \Rightarrow \underline{ac>bc}$；$a>b, c<0 \Rightarrow \underline{ac<bc}$
5. 加法法则：$a>b, c>d \Rightarrow \underline{a+c>b+d}$
6. 乘法法则：$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$
7. 乘方法则：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$（$n\in\mathbf{Z}$，且 $n>1$）
8. 开方法则：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{Z}$，且 $n>1$）

不等式的性质是解不等式和证明不等式的重要依据，只有正确地理解每条性质的条件和结论，注意条件的变化，才能正确地加以运用，从而比较好地解决实际问题.

难点解析

1. 比较两个代数式的大小，实际上是判断它们的差的符号. 差值比较法是比较实数大小的基本方法. 通常的步骤是：作差→变形→定号.

2. 定理1和定理2证明的依据是实数大小的比较与实数运算的符号法则. 定理的推论是同向不等式相加法则的依据；当两个同向不等式的两边分别相减时，就不能得出一般结论；定理4如果仅有 $a>b, c>d$，就推不出 $ac>bd$ 的结论，同理 $a>b>0, 0>c>d$ 也不能推出 $ac>bd$.

3. 运用作商法时，应通过约分及有关幂的运算把商化成一个分数的幂的形式，而这个分数是否大于1，应是一目了然. 运用作商法比较两个数或两个代数式应是同号的两个数或两个代数式.

4. 定理5的证明是论证法中的"穷举法"，在这里，只要让学生分析理解"$>$"之外还有"$<$"和"$=$"两种情况就可以了，没有必要解释"反证法的穷举法".

疑点点击

1. 利用不等式的性质，一定要注意题设条件.

例1 α,β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 的取值范围是（　　）.

A. $-\pi<\alpha-\beta<\pi$　　B. $-\pi<\alpha-\beta<0$

C. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$　　D. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$

解 选B，易错选A.

剖析 化减法为加法是常用技巧. 本题先求减法（或）相反数的范围，利用题设 $\alpha<\beta$ 转化得 $\alpha-\beta<0$，这是挖掘隐含因素的关键一步.

2. 判断不等式之间的"充分""必要"关系要谨慎.

例2 A. $a>b, c>d$ 是 $a+c>b+d$ 的________条件.

B. $a+b>2, ab>1$ 是 $a>1, b>1$ 的________条件.

C. $\frac{a}{b}>1$ 是 $a>b$ 的________条件.

D. $ab>0$ 是 $|a+b|<|a-b|$ 的________条件.

解 A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 既不充分又不必要　　D. 充分必要

剖析 对这类问题要学会用反证法或举反例.

3. 比较含字母的两个实数的大小时，注意对字母要进行分类讨论.

例3 比较 a^2 与 $3a+4$ 的大小.

同步教学练考

解 ∵ $a^2-(3a+4)=(a+1)(a-4)$，

∴ 当$(a+1)(a-4)=0$，即$a=-1$或$a=4$时，

$a^2=3a+4$.

当$(a+1)(a-4)>0$，即$a<-1$或$a>4$时，

$a^2>3a+4$.

当$(a+1)(a-4)<0$，即$-1<a<4$时，

$a^2<3a+4$.

剖析 比较含字母的代数式的大小，常需要进行讨论.

学法指津

1. 比较法是证明不等式的最基本、最重要的方法之一. 比较法可分为差值比较法和比值比较法.

2. 不等式的性质是解不等式、证明不等式的理论依据. 必须熟练掌握，特别是对不等式两边平方、开方或同乘上一个数(或式子). 要注意不等号是否要改向，甚至不等式两边同乘上一个数(或式子)，当这个数(或式子)的值为0时，不等式变成等式.

2 范例讲析

典型归类

1. 作差比较法.

例1 已知$a\neq1$，比较$3(1+a^2+a^4)$与$(1+a+a^2)^2$的大小.

▶分析 由于这两个代数式均为多项式，可应用作差法进行比较大小.

解 $3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2$

$=2-2a-2a^3+2a^4$

$=2a^3(a-1)-2(a-1)$

$=2(a-1)^2(a^2+a+1)$

$=2(a-1)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

∵ $a\neq1$，且$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$， ∴ 上式$>0$.

即$3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2$.

注意 作差，配方.

说明 作差后的变形整理非常重要. 变形通常有两种情况，一是因式分解，二是变成平方和形式.

思考 若去掉$a\neq1$这个条件，大小关系又如何?

2. 作商比较法.

例2 设a,b为正数，比较a^ab^b与a^bb^a的大小.

▶分析 由于比较大小的两个式子均为正，且以幂的形式出现，故可应用作商法比较.

解 $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$，

当$a>b>0$，$\frac{a}{b}>1$，$a-b>0$，

∴ $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$，∴ $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$.

又$a^bb^a>0$，∴ $a^ab^b>a^bb^a$.

当$0<a<b$时，$0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，

∴ $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$. ∴ $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$.

又$a^bb^a>0$，∴ $a^ab^b>a^bb^a$.

当$a=b>0$时，$a^ab^b=a^bb^a$.

综上所述，$a^ab^b\geq a^bb^a$.

说明 ① 比较两个正数a,b的大小先求$\frac{a}{b}$，若$\frac{a}{b}>1$，则$a>b$；若$\frac{a}{b}<1$，则$a<b$；若$\frac{a}{b}=1$，则$a=b$，对于两个负数也可类似比较. ② 作商后与1比较，要注意对其中字母的讨论.

思考 (ⅰ)此例能否用作差法比较? (ⅱ)设a,b,c均为不相等的正数，比较$a^{2a}b^{2b}c^{2c}$与$a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$的大小.

例3 已知$a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$.

求证 $\sqrt{\frac{e}{c-a}}<\sqrt{\frac{e}{d-b}}$.

▶分析 利用不等式的性质证明.

证明 ∵ $a>b>0$，∴ $-a<-b<0$.

又∵ $c<d<0$，∴ $c-a<d-b<0$.

∴ $0>\frac{1}{c-a}>\frac{1}{d-b}$.

又$e<0$，∴ $0<\frac{e}{c-a}<\frac{e}{d-b}$.

∴ $\sqrt{\frac{e}{c-a}}<\sqrt{\frac{e}{d-b}}$.

说明 这里是根据题设条件，反复应用不等式性质定理来进行证题，因此不等式性质的熟练运用是解题的关键.

思考 此例是否可用作差法进行证明.

例4 已知a,b,c为不相等的正实数，试比较$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$与$6abc$的大小.

▶分析 运用作差法

解 $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)-6abc$

$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2-6abc$

$=(a^2b+bc^2)+(c^2a+ab^2)+(b^2c+ca^2)-6abc$

∵ a,b,c为不相等的正实数

∴ $a^2b+bc^2>2abc$ $c^2a+ab^2>2abc$ $b^2c+ca^2>2abc$

即$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)>6abc$

∴ 原式>0.

例5 设$0<x<1$，$a>1$，比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

▶分析 既可运用作差法，也可运用作商法.

解法一 作差法

∵ $0<x<1$，$a>1$.

∴ $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)>0$.

∴ $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法二 作商法

∵ $0<x<1$，$a>1$，

∴ $\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{1+x}(1-x)|>|\log_{1+x}(1+x)|$

$=1$

即$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

例6 实数a,b,c,d满足下列三个条件：

①$d>c$ ②$a+b=c+d$ ③$a+d<b+c$

请将 a,b,c,d 按照从大到小的顺序排列，并证明你的结论．

▶**分析** 条件较多，从何入手？若能找到一个合理的程序，则可减少解题的层次．

解 $\left.\begin{matrix}①d>c\\ a+d<b+c\end{matrix}\right\}\Rightarrow b>a.$

②$\left.\begin{matrix}a+d<b+c\\ a+b=c+d\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2a+b+d<b+2c+d$

$\Rightarrow a<c<d.$

③$a-c=d-b<0\Rightarrow d<b.$

$\therefore b>d>c>a.$

错解分析

例 设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$．求 $f(-2)$ 的取值范围．

错解 $\because 1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$\therefore 1\leqslant a-b\leqslant 2.$ ①

$\because 2\leqslant f(1)\leqslant 4$，$\therefore 2\leqslant a+b\leqslant 4.$ ②

①＋②得 $3\leqslant 2a\leqslant 6$，$\therefore 1.5\leqslant a\leqslant 3.$

由①得 $-2\leqslant b-a\leqslant -1$ ③

②＋③得 $0\leqslant 2b\leqslant 3$，$\therefore 0\leqslant b\leqslant \frac{3}{2}.$

$\therefore 6\leqslant 4a\leqslant 12$，$-3\leqslant -2b\leqslant 0.$

$\therefore f(-2)=4a-2b\in[3,12].$

剖析指导 此错解在于忽略了 a,b 之间是相互制约的，不是独立的．正确的应该用线性规化的观点去对待它，常用的是待定系数法．

正解 设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$ (m,n 为待定系数)，

则 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$，

即 $4a-2b=(m+n)a-(m-n)b.$

$\Rightarrow\begin{cases}m+n=4,\\ m-n=2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=3,\\ n=1.\end{cases}$

$\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1).$

又 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，

$\therefore 5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$，

故 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10.$

3 能级演练

A 课堂检测

1. 若 $f(x)=3x^2-x+1$，$g(x)=2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是（　　）．

A. $f(x)>g(x)$　　B. $f(x)=g(x)$

C. $f(x)<g(x)$　　D. 随 x 值变化而变化

2. $a>c$ 是 $a^3>c^3$ 的（　　）．

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要

3. 已知正数 m,n,p,q 满足 $m+q=n+p$，$|m-q|=|n-p|$，则 mq 与 np 的大小关系是（　　）．

A. $mq=np$　B. $mq>np$　C. $mq<np$　D. 无法确定

4. 比较 $(a+3)(a-5)$ 与 $(a+2)(a-4)$ 的大小．

5. 已知 $a>b>0$，$c<0$．求证：$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$．

B 课后巩固

1. 若 $a>b$，则下列不等式中恒成立的是（　　）．

A. $\frac{a}{b}>1$　B. $\lg a>\lg b$　C. $2^a>2^b$　D. $a^2>b^2$

2. $a,b\in\mathbf{R}$，当两个不等式 $a>b$ 和 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立时，必须满足的条件是（　　）．

A. $ab>0$　　B. $ab<0$

C. $-b>0>-a$　　D. $-a>0>-b$

3. 若 $ac>bd$ 且 $a>b>0$，则 c,d 的大小关系是（　　）．

A. $c>d>0$　　B. $c>0>d$

C. $c>d$　　D. 不能确定

4. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，下列命题正确的有（　　）．

① $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　② $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

③ $\left.\begin{matrix}a^3>b^3\\ ab<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

④ $\left.\begin{matrix}a^2>b^2\\ ab<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

5. $a\neq b$，则 a^2-ab+b^2 ______ ab.

6. 利用不等式的性质证明：已知 $a>b>0$，$d<c<0$，那么 $\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$.

7. 已知 a,b 为正数，且 $a\neq b$，求证：$a^4+b^4>a^3b+ab^3$.

8. 设 $20<a<34$，$24<b<60$．求 $a+b$，$a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的范围．

9. 求证：$a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

10. 设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $-1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围．

11. 已知 $a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$，试比较 a,b,c 的大小．

高考题选

1.(2003 年京春文)设 $a,b,c,d\in \mathbf{R}$,且 $a>b,c>d$. 则下列结论中,正确的是(　　).

A. $a+c>b+d$　　B. $a-c>b-d$

C. $ac>bd$　　D. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

2.(2001 年上海春)若 a,b 为实数,则 $a>b>0$,是 $a^2>b^2$ 的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分条件也非必要条件

3.(2002 年北京文 17)解不等式 $\sqrt{2x+1}+2>x$.

4.(2002 年北京理 17)解不等式 $|\sqrt{2x-1}-x|<2$.

4 规律总结

- 不等式的性质
  - 两个实数 a,b 间的关系: $a>b$ 或 $a=b$ 或 $a<b$
    - 同向或异向不等式的概念
    - 条件不等式与绝对不等式的概念
  - 实数比较大小的方法
    - $a-b>0\Leftrightarrow a>b$
    - $a-b=0\Leftrightarrow a=b$
    - $a-b<0\Leftrightarrow a<b$
  - 不等式的性质
    - $a>b\Leftrightarrow b<a$
    - $a>b,b>c\Rightarrow a>c$
    - $a>b\Rightarrow a+c>b+c$ → $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$
    - $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$; $a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$
      - $\begin{matrix}a>b>0\\c>d>0\end{matrix}\Leftrightarrow ac>bd$
      - $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n,n\in \mathbf{N}^*$
    - $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b},n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n>1$
    - 不等式性质的应用

小结

6.2 算术平均数与几何平均数

1 学习笔记

预习探路

1. 你分得清"算术平均数"与"几何平均数"吗? 你知道算术平均数与几何平均数适用的条件吗?

提示 两个正数 $a,b,\frac{a+b}{2}$ 叫做 a,b 的算术平均数,$\sqrt{ab}$ 叫做 a,b 的几何平均数.

2. 几何平均数不小于算术平均数.

提示 不对，应是算术平均数不小于几何平均数．

即$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b\in\mathbf{R}^+)$

3．"$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$"当且仅当"$a=b$"时取"等号"$(a,b\in\mathbf{R}^+)$

提示 正确．

知识要点

1．若$a,b\in\mathbf{R}$则$a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当"$a=b$"时取等号．

2．若$a,b\in\mathbf{R}^+$，则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时取等号．

3．若$a,b\in\mathbf{R}^+$，则$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$．

难点解析

1．算术平均数及几何平均数一定是针对两个正数而言的．

2．当且仅当"$a=b$"时，取"＝"．

3．在运用定和定积定理时，尤其要注意"＝"成立的可能性．

疑点点击

1．关于"等号"成立的条件，一定要当心，尤其经过几个式子变换后，不能光看形式．

例1 已知$x>0,y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，求$x+y$的最小值．

错解 $\because x>0,y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$．

$\therefore x+y=(\frac{1}{x}+\frac{9}{y})(x+y)\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{xy}}\cdot 2\sqrt{xy}=12$．

故$(x+y)_{\min}=12$．

或错解：$\because x>0,y>0$，

$\therefore 1=\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{xy}}=\frac{6}{\sqrt{xy}}$．

$\therefore\sqrt{xy}\leqslant 6$．

$\therefore x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，

$\therefore x+y\geqslant 12$，故$(x+y)_{\min}=12$．

剖析 错误发生在$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{xy}}$和$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$中，两个等号是不可能同时成立的．理由是$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{xy}}$，当且仅当$\frac{1}{x}=\frac{9}{y}$时取"＝"．$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，当且仅当$x=y$时取"＝"．

正解 方法一：$\because x>0,y>0,\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，

$\therefore x+y=(\frac{1}{x}+\frac{9}{y})(x+y)=\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+10\geqslant 6+10=16$．

当且仅当$\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{9x}{y},\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\end{cases}$取"＝"号，即$\begin{cases}x=4\\ y=12\end{cases}$，时取等号．

方法二：由$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$得$(x-1)(y-9)=9$(定值)．

又知$x>1,y>9$，所以当且仅当$x-1=y-9=3$，

即$x=4,y=12$时，$(x+y)_{\min}=16$．

除了以上二种方法外，此题还可以运用三角换元法、判别式法、数形结合法等求解．

学法指津

1．当$a,b\in\mathbf{R}^+$时，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，注意"＝"成立的条件．

2．在解决一些应用型问题时，要善于抽象出均值不等式．

2 范例讲析

典型归类

1．关于$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的运用问题．

例1 若$a,b\in\mathbf{R}^+$，若$a+b=2$，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值．

▶分析 可以变形为$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\times 2\times(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{1}{2}(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$．

解 $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b)\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\cdot 2\sqrt{ab}=4$．

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$．

当$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$，且$a=6$时，取"＝"．

即$a=b=1$时，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$取得最小值2．

说明 关键在于式子中两次运用均值不等式，取"＝"号时，两个式子是否同时成立．

思考 在计算这一类求最值问题时，何时取"＝"非常重要．为了避免"＝"的困扰，我们还可以这样：$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2=4$，此时只须$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b$即可．

2．关于算术平均数与几何平均数在实际中的应用．

例2 有一组数据$x_1,x_2,\cdots,x_n(x_1<x_2\cdots<x_n)$，它们的算术平均值为10，若去掉其中最大的一个，余下数据的算术平均值为9，若去掉其中最小的一个，余下数据的算术平均值为11．

(1)求出第一个数x_1关于n的表达式及第n个数x_n关于n的表达式．

(2)若$x_1,x_2,\cdots,x_n$都是正整数，试求第n个数x_n的最大值，并举出满足题目要求且x_n取得最大值的一组数据．

▶分析 n个正数$x_1,x_2\cdots x_n$的算术平均数是指$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

n个正数的几何平均数是指$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$．

n个正数的算术平均数也是不小于它们的几何平均数，即$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$．

同步教学练考

解 (1)$\begin{cases}\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=10\\ \frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})=9\\ \frac{1}{n-1}(x_2+\cdots+x_n)=11\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=10n & ①\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=9n-9 & ②\\ x_2+x_3+\cdots+x_n=11n-11 & ③\end{cases}$

①－②得 $x_n=n+9$.

①－③得 $x_1=11-n$.

(2)$x_1=11-n\geqslant 1\Rightarrow n\leqslant 10$.

又 $x_n=n+9$，要使 x_n 最大，

则须使 n 最大，而 n 最大为10.

$\therefore x_{10}=19$.

可以举例如1、3、5、7、9、11、13、15、17、19.

错解分析

例 求函数 $f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值.

错解 $f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{(x^2+2)+1}{\sqrt{x^2+2}}$

$=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant 2$

$\therefore f(x)$的最小值为2.

剖析指导 这种解法简单地模仿了均值不等式，但并没有理解均值不等式的本质含义，尤其是何时取"＝"的问题．上式取"＝"时，$\sqrt{x^2+2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$，$x^2=-1$. 在实数范围内无解．

正解 应结合函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的单调性，它在$[1,+\infty)$上递增，而 $\sqrt{x^2+2}\geqslant\sqrt{2}$，$\therefore f(x)_{\min}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

3 能级演练

A 课堂检测

1. 设 $a>0,b>0$，下列不等式中不成立的是(　　).

A. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$

B. $a^2+b^2\geqslant 2ab$

C. $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geqslant a+b$

D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2+\frac{2}{a+b}$

2. 已知 $x>1,y>1$，且 $\lg x+\lg y=4$，则 $\lg x\cdot\lg y$ 的最大值是(　　).

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{4}$

3. 若 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，则 ab 的最大值是________.

4. 已知 $x<\frac{5}{4}$，求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值．

B 课后巩固

1. 函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}+3$ 在$(-\infty,-2]$上(　　).

A. 无最大值，有最小值7

B. 无最大值，有最小值－1

C. 有最大值7，有最小值－1

D. 有最大值－1，无最小值

2. 已知 $ab+bc+ca=3$，a,b,c 均为正数，则 $a+b+c$ 的最小值为________.

3. 设 $a>b>c$，且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{m}{a-c}$ 恒成立，则 m 的取值范围是________.

4. 一批救灾物资随17列火车以 v km/h 的速度匀速直达400 km外的灾区，为了安全起见，两辆火车的间距不得小于$(\frac{v}{20})^2$ km，问这批物资全部运送到灾区最少需________h.

5. 证明：设 $a,b,c>0$，求证：$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$.

C 高考题选

1. (2001年北京春)若实数 a,b 满足 $a+b=2$，则 3^a+3^b 的最小值是(　　).

A. 18　　B. 6　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt[4]{3}$

2. (2000年全国)若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg(\frac{a+b}{2})$. 则(　　).

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

3. (1999年全国)若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是________.

4 规律总结

1. 牢记 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b\in\mathbf{R}^+)$，当且仅当 $a=b$ 时取"＝".

2. 在求函数的最值时，有时为了达到"一正二定三相等"这个条件，常进行配凑、裂项、转化、分离常数等变形手段，创设一个应用均值不等式的情境．

3. 若 $a,b\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

4. 推广．n 个函数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$. 它们的算术平均数不小于它们的几何平均数．即 $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

小结

6.3 不等式的证明

1 学习笔记 一

预习探路

1. 证明不等式常用哪几种方法?

提示 比较法、综合法、分析法.

2. 在什么情况下证明不等式选用分析法?

提示 在条件向结论推进时一时看不出联系的,常用分析法进行"执果索因",常用"$\Leftarrow$"的叙述过程.

3. 除了上面介绍的三种基本方法外你还能说出几种其他证法吗?

提示 还有,例如,反证法、换元法、判别式法、放缩法、最值法等.

4. 一个不等式的证明是否只能用或只有一种方法?

提示 不一定,有时会几种方法并用,尤其在综合题中,要因题而异.但纯不等式的证明历来是难点,应控制难度,不去搞难度较大的不等式证明题.

知识要点

1. 比较法是证明不等式的一种最基本、最重要的方法,用比较法证明不等式的基本形式是:

作差比较:作差→变形→判断.

作商比较:作商→变形→判断.

2. 综合法:利用某些已经证明过的不等式或不等式的性质导出所要证明的不等式成立,这种方法通常叫做综合法.综合法常常是由因导果.

3. 分析法:证明不等式时,有时可以从求证的不等式出发,分析使这个不等式成立的充分条件,把证明不等式转化为判定这些充分条件是否具备的问题,如果肯定这些充分条件都已具备,那么就可以断定原不等式成立,这种方法叫做分析法.其特点是执果索因.

4. 其他方法:可以了解一些其他方法,如反证法、换元法、放缩法、判别式法、函数法(补充内容).

难点解析

不同形式的不等式的证明题可以选择不同的方法,不同的方法在运用时都有其难点.

比较法的核心内容是作差或作商,难点是作差或作商后的变形技巧.

综合法的核心内容是要对不等式的原理有清楚了解并结合其具体特点,其难点是证明不等式方法的操作.

分析法是执果索因,难点是结合不等式原理及其特点,准确找出其充分条件,形成不等式证明的方法.

对于其他的方法,要结合不等式的具体结构,灵活掌握,是难点,但不是重点.

疑点点击

例1 求证:$\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)(n>1)$.

错解 $\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)$

$=\dfrac{\lg(n+1)}{\lg n}-\dfrac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}$

$=\dfrac{[\lg(n+1)]^2-\lg n\cdot\lg(n+2)}{\lg n\cdot\lg(n+1)}$

$=\dfrac{\lg\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}}{\lg n\cdot\lg(n+1)}$.

$\because$ $n>1$, $\therefore$ $\lg n>0,\lg(n+1)>0$.

又 $\lg\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>0$.

$\therefore$ $\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)>0$.

即 $\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)$.

剖析 上述证明错误地应用了 $\lg m\cdot\lg n=\lg m\cdot n$ 这个错误结论.

例2 a,b 是正数,求证 $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

错解 $\because$ $a^2+b^2\geqslant 2ab,a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,

$\therefore$ $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\geqslant\dfrac{2ab}{(2\sqrt{ab})^2}=\dfrac{2ab}{4ab}=\dfrac{1}{2}$.

剖析 上面证法用错了不等式的性质,"$\left.\begin{matrix}a>b\\c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$"这个结论是不正确的.

例3 已知 $a>0,b>0$,求证 $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

错解 $\because$ $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

$\therefore$ $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geqslant b\sqrt{a}+a\sqrt{b}$.

$\because$ $a(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b(\sqrt{b}-\sqrt{a})\geqslant 0$,

$\therefore$ $(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geqslant 0$.

即 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 不等式成立.

剖析 条件结论不分,因果关系不明,应掌握分析法的基本语言.

例4 已知 $|a|\leqslant 1,|b|\leqslant 1$.

求证:$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leqslant 1$.

错解 因为$|a|\leqslant 1$,$|b|\leqslant 1$,设$\sin\alpha=a$,$\cos\alpha=b$,

则有$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$

$=\sin\alpha\cos\alpha+\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)}$

$=\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{2}|\sin2\alpha|\leqslant\frac{1}{2}|\sin2\alpha|+\frac{1}{2}|\sin2\alpha|$

$=|\sin2\alpha|\leqslant 1$.

剖析 以特殊来代替一般,是本题的论证错误所在:$\left.\begin{array}{l}|a|\leqslant 1\\|b|\leqslant 1\end{array}\right\}\Rightarrow a^2+b^2=1$ 是不对的.

学法指津

1. 掌握利用实数的运算性质与大小顺序之间的关系来比较两个实数大小的方法,明确利用比较法证明不等式的基本思路和证明步骤.

2. 在掌握了不等式的基本性质、一些重要的基本不等式后,才能形成运用综合法、分析法证明不等式的基本思路和方法.

2 范例讲析

典型归类

1. 一题多证型.

例 1 已知$a>0$,$b>0$,求证:$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

证明 方法一:分析其结构,可施行作差法,因为通分以后可形成$(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3$的形式.

$\because\ \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$=\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3-(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})[(\sqrt{a})^2-\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2]-(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}$.

$\because\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>0,\sqrt{ab}>0,(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geqslant 0$,

$\therefore\ \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})\geqslant 0$.

$\therefore\ \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

方法二:作差后局部通分

$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\left(\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)+\left(\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$

$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}$

$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$.

$\therefore\ \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

方法三:左、右两边都是正值,可考虑作商法

$\frac{\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$

$=1+\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 1$.

$\therefore\ \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

2. 构造“一正二定三相等”,运用综合法.

例 2 已知a,b,c为不全相等的正数,求证:

$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$.

▶分析 观察其结构特点,对其分析和重新组合,创造出能利用基本不等式的条件.

证明 左边$=\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}-3$,

$\because$ a,b,c为不全相等的正数,

$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2,\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 2,\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2$.

且这三式的等号不能同时成立,(否则$a=b=c$)

$\therefore\ \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-3>6-3=3$.

即$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$.

说明 灵活运用平均值不等式,这是综合法证明不等式的重要技巧之一.对于一些较长的式子应创造条件把它分解为我们可以运用的基本不等式,然后相加或相乘.

3. 分析法的运用.

例 3 已知$a>b>0$,求证:

$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

▶分析 此不等式结构复杂,运用作差法、综合法均不易“切入”推理,可尝试运用分析法.

证明 欲证原不等式成立

只需证:$\frac{(a-b)^2}{4a}<a+b-2\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{4b}$.

即$\left(\frac{a-b}{2\sqrt{a}}\right)^2<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<\left(\frac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^2$.

$\because\ a>b>0$,

$\therefore$ 只需证:$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$.

即证:$1+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<2<1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,也即证:$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

只需证:$\frac{b}{a}<1<\frac{a}{b}$.

因$a>b>0$上式显然成立.

$\therefore$ 原不等式成立.

4. 分析法、综合法并用.

例 4 证明:对于任意实数x,y,有$x^4+y^4\geqslant\frac{1}{2}xy(x+y)^2$.

▶分析 采用分析法和比较法二者并用的方法.

证明 $2(x^4+y^4)\geqslant xy(x^2+2xy+y^2)$

$\Leftrightarrow 2(x^4+y^4)\geqslant x^3y+xy^3+2x^2y^2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+y^4\geqslant x^3y+xy^3\\x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2\end{cases}$

综合$x^4+y^4-x^3y-xy^3=x^3(x-y)-y^3(x-y)$

金版专辑

$=(x-y)(x^3-y^3)=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geqslant 0.$

$\therefore x^4+y^4\geqslant \frac{1}{2}xy(x+y)^2.$

错解分析

例 设 $a,b,c\in \mathbf{R}$,且 a,b,c 不全相等,则不等式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ 成立的一个充要条件是(　　).

A. a,b,c 全为正数　　B. a,b,c 全为非负实数

C. $a+b+c\geqslant 0$　　D. $a+b+c>0$

错解 选 B,用特殊值法.

剖析指导 特殊值法有其局限性,要使其正确,必须具有一般性、代表性.

正解 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$

而 a,b,c 不全相等 $\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2>0$.

则 $a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0 \Leftrightarrow a+b+c\geqslant 0$.

3 분级演练

A 课堂检测

1. 求证:$x^2+3>3x$.

2. 已知 a,b,m 都是正数,并且 $a<b$.

求证:$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

3. 已知 $a,b,c\in \mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$.

求证:$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$.

4. 若 $a,b,c\in \mathbf{R}$,求证:$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

5. 设 a,b 为直角三角形的两直角边的长,c 为斜边的长,m,n 为任意系数,求证:$\frac{ma+nb}{\sqrt{m^2+n^2}}\leqslant c$.

B 课后巩固

1. 已知 a,b,c 是不全相等的正数.

求证:$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

2. 设 $x>0,y>0$.

求证:$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant \frac{4}{x+y}$.

3. 求证:$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant (ac+bd)^2$.

(用比较法、综合法、分析法证明)

4. 已知 $a^2+b^2=1,x^2+y^2=1$. 求证:$ax+by\leqslant 1$.

(用比较法、综合法、分析法、三角换元法证明)

5. 已知 $a,b,c\in \mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$.

求证:$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$.

6. 求证:$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant \sqrt{2}(a+b+c)$.

7. 若 $|a|<1,|b|<1$. 求证:$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

8. 求证:函数 $f(x)=x+\frac{1}{x^3}$ 在 $(0,\sqrt[4]{3}]$ 上是减函数.

C 高考题选

(2002 年江苏)已知 $a>0$,函数 $f(x)=ax-bx^2$.

(1)当 $b>0$ 时,若对任意 $x\in \mathbf{R}$,都有 $f(x)\leqslant 1$,证明:$a\leqslant 2\sqrt{b}$.

(2)当 $b>1$ 时,证明:对任意 $x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

(3)当 $0<b\leqslant 1$ 时,讨论:对任意 $x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件.

4 规律总结

证明不等式,要牢牢把握住比较法、综合法、分析法这三种方法,熟练地运用这三种方法和基本不等式性质来证明不等式,提高自己的思维水平和分析问题、解决问题的能力.

小结

6.4 不等式的解法举例

1 学习笔记 一

预习探路

1. 不等式 $ax>b$ 的解集为 $x>\frac{b}{a}$，对吗？

提示 不对．应该对 a 进行讨论．

2. 当 a,b 满足什么条件时，不等式 $ax>b$ 的解集是空集？

提示 $a=0,b\geqslant 0$.

3. 当 a,b 满足什么条件时，不等式 $ax>b$ 的解集是整个实数集？

提示 $a=0,b<0$.

4. 一元二次不等式的解集与初中的什么知识相联系？

提示 二次函数．

知识要点

1. 一元一次不等式 $ax>b(a\neq 0)\begin{cases}\text{若 } a>0\text{，则 } \underline{x>\frac{b}{a}}\\ \text{若 } a<0\text{，则 } \underline{x<\frac{b}{a}}\end{cases}$

2. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$.

$\begin{cases}\Delta>0\text{，则 } \underline{x<x_1\text{，或 } x>x_2}\ (x_1,x_2\ \text{是方程 } ax^2+bx+c=0 \text{ 的根})\\ \Delta=0\text{，则 } \underline{x\in\mathbf{R}\text{，且 } x\neq-\frac{b}{2a}}\\ \Delta<0\text{，则 } \underline{x\in\mathbf{R}}\end{cases}$

($a<0$ 可类比)

3. 简单的高次不等式

$ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c=a(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0\quad(a>0)\begin{cases}\text{① 表解法}\\ \text{② 数轴标根法}\end{cases}$

4. 分式不等式（分式⇒整式）

$\begin{cases}\text{①}\ \frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow \underline{f(x)-g(x)>0}\\ \text{②}\ \frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0\\ \underline{g(x)\neq 0}\end{cases}\\ \text{③}\ \frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow \underline{f(x)-g(x)<0}\\ \text{④}\ \frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\leqslant 0\\ \underline{g(x)\neq 0}\end{cases}\end{cases}$

5. 含有绝对值不等式

$\begin{cases}\text{①}\ |f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow \underline{-g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)}\\ \text{②}\ |f(x)|\geqslant g(x)\Leftrightarrow \underline{f(x)\geqslant g(x)\text{ 或 } f(x)\leqslant -g(x)}\\ \text{③}\ |f(x)|<|g(x)|\Leftrightarrow \underline{f^2(x)<g^2(x)}\\ \text{④ 含有两个或两个以上绝对值符号的不等式用“零点分区间”讨论法}\end{cases}$

难点解析

等与不等是对立统一的两个概念．研究相等关系，反映在学习上，就是证明恒等式与解方程；研究不等关系，反映在学习上，就是证明不等式与解不等式．解方程(组)与解不等式(组)有很多类似之处，也有不少不同之点．但更重要的是找出它们的不同之处，掌握解不等式的方法．其解题思路是：将所给不等式转化为简单的一元一次不等式(或组)、一元二次不等式(或组)来解．

疑点点击

例 1 解关于 x 的不等式 $x^2-5ax+6a^2<0$.

错解 原不等式可化为 $(x-3a)(x-2a)<0$，

∴ $2a<x<3a$.

故原不等式的解集为 $\{x|2a<x<3a\}$.

剖析 上述解法误认为 $2a<3a$.

例 2 $x>2$，解不等式 $(x-2)(2x-3)<(x+3)(x-2)$.

错解 ∵ $x>2$， ∴ $x-2>0$.

∴ $2x-3<x+3$.

∴ $x<6$.

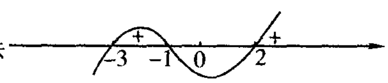
∴ 原不等式的解集为 $\{x|x<6\}$.

剖析 忽略了先决条件 $x>2$.

例 3 解不等式 $\frac{(x-2)(x+1)}{x+3}\geqslant 0$.

错解 $\frac{(x-2)(x+1)}{x+3}\geqslant 0\Leftrightarrow(x+3)(x+1)(x-2)\geqslant 0$.

据数轴标根法



∴ 此解集为 $[-3,-1]\cup[2,+\infty)$.

剖析 忽视了 $x+3\neq 0$.

例 4 解不等式 $(x+2)^2(x-1)(x-3)\leqslant 0$.

错解 原不等式等价于 $(x-1)(x-3)\leqslant 0$，

∴ $1\leqslant x\leqslant 3$.

∴ 此不等式解集为 $x\in[1,3]$.

剖析 漏解了 $(x+2)^2$ 应是大于等于 0.

∴ 解集应为 $\{-2\}\cup[1,3]$.

学法指津

1. 一元一次不等式和一元二次不等式的解法是解各种不等式的基础，必须牢记．其他不等式最终都同解变形为一次或二次不等式．解不等式就是依据不等式性质和同解变形原理，求解原不等式的同解不等式．

2. 解简单高次不等式的基本思路是通过因式分解，把不等式的一边化成若干个一次、二次因式的积，另一边为零的

金版专辑

形式，然后用序轴法去求解.

3. 分式不等式解法的基本思想是将其等价地转化为整式不等式(或组)求解.应注意带等号的分式不等式转化时不要忽略分母不为零.

2 范例讲析

典型归类

1. 未知数前含有字母的.

例 1 求不等式 $ax+1<a^2+x(a\in\mathbf{R})$ 的解集.

▶分析 对参数 a 进行分类讨论.

解 将原不等式化为

$(a-1)x<a^2-1$.

(1) 当 $a-1>0$ 时，即 $a>1$ 时，$x<a+1$.

(2) 当 $a-1=0$ 时，即 $a=1$ 时，$x\in\varnothing$.

(3) 当 $a-1<0$ 时，即 $a<1$ 时，$x>a+1$.

∴ 综合上述情况，原不等式解集为

$a>1$ 时，不等式解集为 $\{x|x<a+1\}$.

$a=1$ 时，不等式解集为 $\varnothing$.

$a<1$ 时，不等式解集为 $\{x|x>a+1\}$.

2. 含有绝对值的.

例 2 解不等式 $|x^2-5x+5|<1$.

▶分析 据 $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$ 去绝对值符号.

解 不等式可化为 $-1<x^2-5x+5<1$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x+5>-1\\x^2-5x+5<1\end{cases}$

$\Leftrightarrow 1<x<2$ 或 $3<x<4$.

∴ 此不等式的解集为 $\{x|1<x<2$ 或 $3<x<4\}$.

例 3 解不等式 $|x^2-3x-4|<x+1$.

▶分析 仍然据 $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$ 去绝对值符号.

解 不等式可化为

$-(x+1)<x^2-3x-4<x+1$.

解得 $3<x<5$.

∴ 此不等式解集为 $\{x|3<x<5\}$.

例 4 解不等式 $|x+3|>|x-2|$.

▶分析 可利用 $|a|>|b|\Leftrightarrow a^2>b^2$ 或分区间去掉绝对值符号.

解 解法一：∵ $|x+3|>|x-2|$，

∴ $(x+3)^2>(x-2)^2$.

即 $x^2+6x+9>x^2-4x+4$，

$x>-\frac{1}{2}$.

∴ 此不等式解集为 $\{x|x>-\frac{1}{2}\}$.

解法二：令 $x+3=0$，$x-2=0$，

得到 $x=-3$，$x=2$.

(1) 当 $x<-3$ 时，$x+3<0$，$x-2<0$，

∴ $-(x+3)>-(x-2)$. ∴ $x\in\varnothing$.

(2) 当 $-3\leqslant x\leqslant 2$ 时，$x+3\geqslant 0$，$x-2\leqslant 0$，

∴ $x+3>-(x-2)$. ∴ $x>-\frac{1}{2}$.

∴ $x\in\left(-\frac{1}{2},2\right]$.

(3) 当 $x>2$ 时，$x+3>0$，$x-2>0$，

∴ $x+3>x-2$ $x\in\mathbf{R}$.

∴ $x\in(2,+\infty)$.

综上所述，$x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

3. 分式不等式转化为整式不等式用直线法的.

例 5 解不等式 $\frac{x^2-3x-28}{x^2+2x-3}\geqslant 0$.

▶分析 先分解，然后化分式不等式为整式不等式，再用数轴标根法.

解 $\frac{x^2-3x-28}{x^2+2x-3}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x-7)(x+4)}{(x+3)(x-1)}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)(x+3)(x-1)(x-7)\geqslant 0\\(x+3)(x-1)\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\leqslant -4$ 或 $-3<x<1$ 或 $x\geqslant 7$.

∴ 此不等式解集为 $(-\infty,-4]\cup(-3,1)\cup[7,+\infty)$.

例 6 解不等式 $\frac{3x-1}{2-x}\geqslant 1$.

▶分析 一般情况下，这种类型不等式是先移项，后通分，化为右边是零的分式不等式进而求解.

解 $\frac{3x-1}{2-x}\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{3x-1}{2-x}-1\geqslant 0$

$\Leftrightarrow\frac{4x-3}{x-2}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}(4x-3)(x-2)\leqslant 0,\\x-2\neq 0.\end{cases}$

∴ 此不等式解集为 $\left[\frac{3}{4},2\right)$.

例 7 解不等式 $\frac{a(x-1)}{x-2}>1$ $(a\neq 1)$.

▶分析 不等式中含有字母 a，所以必须对 a 进行讨论.

解 原不等式等价于 $\frac{(a-1)x-(a-2)}{x-2}>0$

$\Leftrightarrow[(a-1)x-(a-2)](x-2)>0$

$\Leftrightarrow(a-1)\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)(x-2)>0$. (Ⅰ)

(1) 当 $a>1$ 时，式(Ⅰ)$\Leftrightarrow\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)(x-2)>0$，

∵ $\frac{a-2}{a-1}-2=\frac{a-1-1}{a-1}-2=1-\frac{1}{a-1}-2$

$=-1-\frac{1}{a-1}<0$，

∴ $\frac{a-2}{a-1}<2$.

∴ 原不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{a-2}{a-1}\right)\cup(2,+\infty)$.

(2) 当 $a<1$ 时，式(Ⅰ)$\Leftrightarrow\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)(x-2)<0$.

∵ $2-\frac{a-2}{a-1}=\frac{a}{a-1}$.

① 当 $0<a<1$ 时，$\frac{a-2}{a-1}>2$，则不等式解集为 $\left(2,\frac{a-2}{a-1}\right)$.

② 当 $a=0$ 时，原不等式为 $(x-2)^2<0$，不等式解集为 $\varnothing$.

③ 当 $a<0$ 时，$\frac{a-2}{a-1}<2$，则不等式解集为 $\left(\frac{a-2}{a-1},2\right)$.

综上所述，当 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left(\frac{a-2}{a-1},2\right)$

当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left(2,\frac{a-2}{a-1}\right)$.

当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{a-2}{a-1}\right)\cup(2,+\infty)$.

错解分析

例 1　解不等式 $(x-2)(x-3)>x-2$.

错解　$\because (x-2)(x-3)>x-2$,

$\therefore x-3>1$.

$\therefore x>4$.

剖析指导　误以为 $x-2$ 一定是正数了.

正解　$(x-2)(x-3)-(x-2)>0$,

$(x-2)(x-4)>0$,

$\therefore x>4$ 或 $x<2$.

例 2　解不等式 $(x-2)\sqrt{2x+3}\geqslant 0$.

错解　$\because \sqrt{2x+3}\geqslant 0$,

$\therefore x-2\geqslant 0$.　$\therefore x\geqslant 2$.

剖析指导　$\sqrt{2x+3}$ 当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{2x+3}=0$.

正解　$\{x|x\geqslant 2$ 或 $x=-\frac{3}{2}\}$.

例 3　$\sqrt{x^2-3x+2}>x-3$.

错解　$\because \sqrt{x^2-3x+2}>x-3$,

$\therefore x^2-3x+2>(x-3)^2$.

$\therefore x^2-3x+2>x^2-6x+9$.

$\therefore 3x>7, x>\frac{7}{3}$.

剖析指导　①忽略了根式的定义域.②$x-3$ 不一定是正数或 0.

正解　原不等式即 $\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0,\\ x-3<0;\end{cases}$　①

或 $\begin{cases}x^2-3x+2>0,\\ x-3\geqslant 0,\\ x^2-3x+2>(x-3)^2\end{cases}$　②

由①$x\leqslant 1$ 或 $2\leqslant x<3$，由②$x\geqslant 3$，

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}$.

3 能级演练

A 课堂演练

1. 与不等式 $\frac{x-3}{2-x}\geqslant 0$ 同解的不等式是(　　).

A. $(x-3)(2-x)\geqslant 0$

B. $0<x-2\leqslant 1$

C. $\frac{2-x}{x-3}\geqslant 0$

D. $(x-3)(2-x)>0$

2. 不等式 $\frac{1}{x-1}<x+1$ 的解集是(　　).

A. $\{x|x>-3\}$

B. $\left\{x\middle|\frac{4}{3}<x<2\sqrt{2}\right\}$

C. $\{x|x<1\}$

D. $\{x|-\sqrt{2}<x<1$ 或 $x>\sqrt{2}\}$

3. 不等式 $\frac{(x-3)(10-x)}{(x-1)x^2}\geqslant 0$ 的解集是(　　).

A. $\{x|x<0$ 或 $1<x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 0\}$

B. $\{x|x<1$ 且 $x\neq 0$ 或 $3\leqslant x\leqslant 10\}$

C. $\{x|0<x<1$ 或 $3<x<10\}$

D. $\{x|0\leqslant x<1$ 或 $3<x<10\}$

4. 解不等式 $\frac{3x^2-14x+14}{x^2-6x+8}\geqslant 1$.

B 课后巩固

1. 不等式 $\sqrt{x+2}>x$ 的解集为(　　).

A. $\{x|-2\leqslant x<2\}$　　B. $\{x|-1<x<2\}$

C. $\{x|0\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|x<2\}$

2. 不等式组 $\begin{cases}x-1>a^2,\\ x-4<2a\end{cases}$ 有解，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-1,3)$

B. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

C. $(-3,1)$

D. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

3. 若不等式 $x^2-2ax+a>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则关于 t 的不等式 $a^{2t+1}<a^{t^2+2t-3}<1$ 的解为(　　).

A. $1<t<2$　　B. $-2<t<1$

C. $-2<t<2$　　D. $-3<t<2$

4. 设 $a<0$，解关于 x 的不等式 $\sqrt{a(a-x)}>a-2x$.

5. 设 A 为不等式 $\log_x(5x^2-8x+3)>2$ 的解集，B 为不等式 $2^{x^2-2x-k^4}\geqslant\frac{1}{2}$ 的解集.求：

(1) 求集合 A、B.

(2) 如果 $A\subseteq B$，求实数 k 的取值范围.

金版专辑

C 高考题选

1.(2002 年京皖春)不等式组 $\begin{cases}x^2-1<0,\\x^2-3x<0\end{cases}$ 的解集是(　　).

A. $\{x|-1<x<1\}$　　B. $\{x|0<x<3\}$

C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|-1<x<3\}$

2.(2002 年全国 3)不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是(　　).

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$

B. $\{x|x<0$ 且 $x\neq-1\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$

D. $\{x|x<1$ 且 $x\neq-1\}$

3.(2001 年河南广东)不等式 $\frac{x-1}{x-3}>0$ 的解集为____.

4.(2002 年上海春)函数 $y=\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ 的定义域为________.

5.(2001 年天津)解关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x-a^2}<0(a\in\mathbf{R})$.

4 规律总结

本节基础知识框图

不等式的基本性质 $\begin{cases}\text{一元一次、一元二次不等式}\\\text{简单的高次不等式}\\\text{绝对值不等式解法}\\\text{分式不等式解法}\\\text{指数不等式解法}\\\text{对数不等式解法}\\\text{无理不等式解法}\end{cases}$

解题规律:

简单的高次不等式→数轴标根法.

无理、绝对值不等式→分类讨论去掉根号,绝对值符号,无理不等式应考虑其定义域.

指数、对数不等式→运用指数、对数函数性质转化为整式不等式,但不要忘记定义域.

小结

....

....

....

....

....

6.5 含有绝对值的不等式

1 学习笔记

预习探路

1. $|x|=a\ (a\geqslant0)$,则 $x=\underline{\pm a}$.
2. $|x|>a\ (a>0)\Rightarrow\underline{x>a}$ 或 $\underline{x<-a}$.
3. $|x|<a\ (a>0)\Rightarrow\underline{-a<x<a}$.
4. $0<a\leqslant|x|\leqslant b\Rightarrow\underline{a\leqslant x\leqslant b\text{ 或 }-b\leqslant x\leqslant-a}$.

知识要点

要点 1:绝对值的性质

(1) $|a|=\underline{|-a|}$,$|ab|=\underline{|a|\cdot|b|}$

$\left|\frac{a}{b}\right|=\underline{\frac{|a|}{|b|}}$,$|a^2|=|a|^2=a^2$,$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

(2) $|x|<a(a>0)\Leftrightarrow\underline{-a<x<a}$

(3) $|x|>a(a>0)\Leftrightarrow\underline{x<-a\text{ 或 }x>a}$

要点 2:定理 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant\underline{|a|+|b|}$

要点 3:推论 1:$|a_1+a_2+a_3|\leqslant\underline{|a_1|+|a_2|+|a_3|}$

要点 4:推论 2:$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant\underline{|a|+|b|}$

难点解析

对于解含有绝对值的不等式,其难点就是如何快速、正确地去掉绝对值符号,把绝对值不等式转化为不含绝对值的不等式.

疑点点击

对性质 $|x|<a\Leftrightarrow-a<x<a$;$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.教材上要求 a 必须为正数,其实 a 为任意实数,性质仍成立,即有结论:

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow-g(x)<f(x)<g(x)$;

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$;

$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$.

例　解不等式 $||x+3|-|x-3||>3$.

事实上,用平方法去掉绝对值符号,得

$(|x+3|-|x-3|)^2>9$.

即　$2x^2+9>2|x^2-9|$.

两边再平方,得 $(2x^2+9)^2>4(x^2-9)^2$.

即 $\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0$.

所以 $x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>\frac{3}{2}$.

此题可采用分 $x<-3$,$-3\leqslant x\leqslant3$,$x>3$ 三种情况来去掉绝对值符号求解.事实上原不等式同解于下面三个不等式组:

(ⅰ) $\begin{cases}x<-3,\\|-(x+3)+(x-3)|>3\end{cases}\Rightarrow x<-3$;

(ⅱ) $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant3,\\|(x+3)+(x-3)|>3\end{cases}\Rightarrow$

同步教学练考

$\frac{3}{2}<x\leqslant 3$ 或 $-3\leqslant x<-\frac{3}{2}$；

（ⅲ）$\begin{cases} x>3, \\ |(x+3)-(x-3)|>3 \end{cases} \Rightarrow x>3.$

综上所述，原不等式的解集为 $\left\{x \middle| x<-\frac{3}{2}\text{或 }x>\frac{3}{2}\right\}$.

学法指津

首先应理解绝对值的意义，这是脱掉绝对值符号的关键，也是把绝对值不等式化为非绝对值不等式的关键，再次应注意二次函数和绝对值不等式相结合的题目.

2 范例讲析

典型归类

1. 运用绝对值不等式的性质证明.

例1 已知 $|x|<\frac{\varepsilon}{3}$，$|y|<\frac{\varepsilon}{6}$，$|z|<\frac{\varepsilon}{9}$.

求证：$|x+2y-3z|<\varepsilon$.

证明 $|x+2y-3z|\leqslant|x|+|2y|+|-3z|$

$=|x|+2|y|+3|z|<\frac{\varepsilon}{3}+2\times\frac{\varepsilon}{6}+3\times\frac{\varepsilon}{9}=\varepsilon$

即 $|x+2y-3z|<\varepsilon$.

2. 运用基本不等式及不等式的基本性质.

例2 设 a,b,c 都是不等于 0 的实数，

求证：$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\geqslant 4$.

证明 $\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|=\frac{|a|}{|b|}+\frac{|b|}{|c|}\geqslant 2\sqrt{\frac{|a|}{|c|}}$. ①

同理可得 $\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\geqslant 2\sqrt{\frac{|c|}{|a|}}$. ②

①②相加，得

$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\geqslant 2\sqrt{\frac{|a|}{|c|}}+2\sqrt{\frac{|c|}{|a|}}$

$\geqslant 2\sqrt{2\frac{|a|}{|c|}\cdot 2\frac{|c|}{|a|}}=4$.

3. 结合分析法证明

例3 已知 $|a|<1$，$|b|<1$.

求证 $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

证明 $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2$

$\Leftrightarrow 1-a^2-b^2+a^2b^2>0$

$\Leftrightarrow(1-a^2)(1-b^2)>0$

因为 $|a|<1$，$|b|<1$，

所以 $(1-a^2)(1-b^2)>0$ 成立，

$\therefore \left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

4. 对含参不等式的研究.

例4 求使不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 有解的 a 的取值范围.

解 解法一：将数轴分为 $(-\infty,3)$，$[3,4]$，$(4,+\infty)$ 三个区间.

当 $x<3$ 时，得 $(4-x)+(3-x)<a$.

$x>\frac{7-a}{2}$，有解条件为 $\frac{7-a}{2}<3$，即 $a>1$.

当 $3\leqslant x\leqslant 4$ 时，得 $(4-x)+(x-3)<a$，即 $a>1$.

当 $x>4$ 时，得 $(x-4)+(x-3)<a$，即 $x<\frac{a+7}{2}$，有解条件为 $\frac{a+7}{2}>4$，即　$a>1$.

以上三种情况中任一个均满足题目要求，故是它们的并集，即仍为 $a>1$.

解法二：设数 x、3、4 在数轴上对应的点分别为 P、A、B，由绝对值的几何意义可知，求原不等式即求 $|PA|+|PB|<a$ 成立即可.

因为 $|AB|=1$，故数轴上任一点到 A、B 距离之和大于或等于 1，

即　$|x-4|+|x-3|\geqslant 1$.

故当 $a>1$ 时，$|x-4|+|x-3|<a$ 有解.

错解分析

例 解不等式 $\left|\frac{x}{x-2}\right|>\frac{x}{2-x}$.

错解 $\because \left|\frac{x}{x-2}\right|>\frac{x}{2-x}$，

$\therefore\left(\frac{x}{x-2}\right)^2>\left(\frac{x}{2-x}\right)^2$.

$\therefore x\in\varnothing$.

剖析指导 $\frac{x}{2-x}$ 不一定是非负数，所以

正解为：$\left|\frac{x}{x-2}\right|>\frac{x}{2-x}$

$\Rightarrow\frac{x}{2-x}<0$　$\Rightarrow x(2-x)<0$

$\Rightarrow x(x-2)>0\Rightarrow x>2$ 或 $x<0$.

3 能级演练

A [illegible]

1. 已知 $a<b$，则下列各式中恒成立的是（　　）.

A. $a^2<b^2$　　B. $c-a>c-b$

C. $|a|<|b|$　　D. $a-1>b-2$

2. 若 $|x|>2$，则（　　）.

A. $x>2$　　B. $x>\pm 2$

C. $-2<x<2$　　D. $x>2$ 或 $x<-2$

3. 已知集合 $M=\{x||x|>2\}$，$N=\{x|x<3\}$，则下列结论中正确的是（　　）.

A. $M\cup N=M$　　B. $M\cap N=\{x|2<x<3\}$

C. $M\cup N=\mathbf{R}$　　D. $M\cap N=\{x|x<-2\}$

4. 下列四个命题① $a>b\Rightarrow|a|>b$；② $a>b\Rightarrow a^2>b^2$；③ $|a|>b\Rightarrow a>b$；④ $a>|b|\Rightarrow a>b$. 其中正确命题的个数是

金版专辑

(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 求不等式$\frac{4x}{|x|}\leqslant\sqrt{x^2-9}$的解集.

B 课后巩固

1. 若$a,b\in\mathbf{R}$,则使$|a|+|b|>1$成立的充分不必要条件是(　　).

A. $|a+b|>1$　　B. $|a|\geqslant\frac{1}{2}$且$|b|\geqslant\frac{1}{2}$

C. $|a|\geqslant 1$　　D. $b>-1$

2. 当$x\in\left(\frac{1}{3},3\right)$时,$|\log_a x|<1$恒成立,则实数$a$的取值范围是(　　).

A. $a\geqslant 3$　　B. $0<a\leqslant\frac{1}{3}$或$a\geqslant 3$

C. $0<a\leqslant\frac{1}{3}$　　D. $1<a<3$或$\frac{1}{3}<a<1$

3. $|x|\leqslant 2$是$|x+1|<1$的(　　).

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若不等式$|x-1|<a$成立的充分条件是$0<x<4$,则a的取值范围是__________.

5. 设$a>0$,解不等式$\left|\frac{2x-3-2a}{x-a}\right|\leqslant 1$.

6. 已知函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}$,设$a,b\in\mathbf{R}$,且$a\neq b$.
求证:$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

7. 在一页书上所印的文字要占$S\ \mathrm{cm}^2$,上、下页边空白处要留a cm宽,左右留b cm宽.若只注意节约纸张,则以如何尺寸的篇幅最为有利?

C 高考回放

1.(1997年全国)不等式组$\begin{cases}x>0,\\ \frac{3-x}{3+x}>\left|\frac{2-x}{2+x}\right|\end{cases}$的解集是(　　).

A. $\{x|0<x<2\}$　　B. $\{x|0<x<2.5\}$

C. $\{x|0<x<\sqrt{6}\}$　　D. $\{x|0<x<3\}$

2.(1994年上海)不等式$|x+1|<1$的解集是______________.

3.(2003年北京)设$y=f(x)$是定义在区间$[-1,1]$上的函数,且满足条件:

(ⅰ)$f(-1)=f(1)=0$.(ⅱ)对任意的$\mu,v\in[-1,1]$,都有$|f(\mu)-f(v)|\leqslant|\mu-v|$.

(1)证明:对任意的$x\in[-1,1]$,都有$x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$.

(2)证明:对任意的$\mu,v\in[-1,1]$都有$|f(\mu)-f(v)|\leqslant 1$.

(3)在区间$[-1,1]$上是否存在满足题设条件的奇函数$y=f(x)$,且使得

$$\begin{cases}|f(\mu)-f(v)|<|\mu-v|,当\ \mu,v\in\left[0,\frac{1}{2}\right].\\ |f(\mu)-f(v)|=|\mu-v|,当\ \mu,v\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

若存在,请举一例,若不存在,请说明理由.

小结

....

....

....

复习与总结

解题方法归纳

一、证明不等式的几种方法

1.求差比较法　由$a-b>0\Leftrightarrow a>b$得知,要证$a>b$,只需证$a-b>0$即可.求差法证明不等式的一般步骤为:作差——变形——判断符号.其中变形是关键,配方和因式分解是常用的变形手段.为了便于判断差式的符号,通常将差式变形为一个常数,或一个常数与几个完全平方和的形式,或几个因式的积.当所得的差式是某个字母的二次三项式时,则常用判别式法判断符号.

2.求商比较法　要证$a>b$,当$b>0$时,只需证$\frac{a}{b}>1$;当$b<0$时,只需证$\frac{a}{b}<1$.其一般步骤是:作商——变形——判断商与数1的大小关系.在运用求商比较法证明不等式时,作为除式的代数式必须具有保号性.

3.证明幂、指数不等式,通常采用求商法,证明对数不等式,常采用求差法.

4.采用两种比较法证明不等式　当差式或商式中含有字母时,一般需对字母的取值进行分类讨论,第二步的变形要有目标性.变形的方向和目标直接决定着判断符号的难易程度.

5.综合法　就是从题设条件和已经证明过的基本不等式出发,不断用必要条件替换前面的不等式,直至推出要证明的结论,可简称为“由因导果”.在使用综合法证明不等式时,要注意均值不等式的应用.

6.分析法　就是从所要证明的不等式出发,不断地用充分条件替换前面的不等式,直至找到的是题设条件,或是已经证明过的基本不等式,或者是显然成立的不等式,可简称“执果索因”.在使用分析法证明不等式时,习惯上用“⇐”表