文都教育考研精品系列

2005 考研数学历年真题精析（数学二）

主　编：蔡子华
副主编：韩於羹　曾祥金　童　武　樊启斌

现代出版社

文都教育

2005年

考研数学历年真题精析(数学二)

主　编:蔡子华
副主编:韩於羹　曾祥金　童　武　樊启斌
策　划:文都考研信息中心

现代出版社

图书在版编目（CIP）数据

2005年考研数学历年真题解析/蔡子华编．—北京：现代出版社，2004

ISBN 7－80188－280－6

Ⅰ．2… Ⅱ．蔡… Ⅲ．数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ．D0－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第026507号

编　　者：蔡子华
责任编辑：张俊国
出版发行：现代出版社
地　　址：北京市安定门外华安里504号
邮政编码：100011
电　　话：010－64267325　64240483（传真）
电子邮箱：xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷：北京长阳汇文印刷厂
开　　本：787×1092毫米 1/16
印　　张：11
版　　本：2004年4月第1版　2004年4月第1次印刷
印　　数：1—6000册
书　　号：ISBN 7－80188－280－6
套书定价：66.00元

考研数学精品名师简介

蔡子华

全国著名考研数学辅导专家，连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长。蔡老师从事考研辅导工作十几年，熟悉考生的弱点和考试的难点，深谙命题规律和重点，授课针对性极强，效果卓著。同时蔡子华老师更以能全程讲授微积分、线代、概率并能融会贯通和押题精准而闻名。

韩於羹

北京航空航天大学数学系教授，具有多年考研辅导经验。“从来不需要想起，永远也不会忘记”，是韩老师的经典名句，他诙谐幽默却又不失生动技巧的讲课方式使你对数学的兴趣猛增，从更深，更广泛的层面去理解数学，掌握数学，从而顺利渡过考研难关。

曾祥金

著名考研辅导专家，数学系博士生导师，长期参与研究生考试的命题研究、辅导及阅卷工作。全国经济博弈论专业委员会常务理事，主持或参与了多项国家级科学研究基金资助项目以及多项教学研究项目，并有多项成果获奖励。

童　武

著名考研辅导专家，首都师范大学教授、北京大学客座教授。以全程讲解微积分、线性代数、概率论与数理统计而著称考研数学界。其从事考研辅导数十年。足迹遍及华夏，桃李广布九州，授课上一直倡导“在课堂上解决问题”，其解题方法独特，记忆方法更是令人叫绝，受到广大学员的一致好评。

樊启斌

武汉大学博士生导师，长期从事考研数学的辅导工作，讲课通俗易懂，注重基础，突出重点，举一反三，其辅导效果得到学员的一致认可。

2005 年版本前言

毛泽东同志在1930年5月就“反对本本主义”提出了这样一个建议:你对于那个问题不能解决吗?那末,你就去调查那个问题的现状和历史吧!…… 调查就是解决问题。

同样的道理,如果考生对考研数学的试题和命题规律不了解或者不甚了解的话,那么考生就应该去接触并尝试考研数学历年真题。了解的角度有多种多样,如每年教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》)、试题、答案、评分标准、名家评析等。

《考试大纲》每年都在修订,其中1997年之前的试卷与1997年之后(含1997年)的试卷,无论从考试规定还是对考生要求来讲,都有很大的不同,比如1997年之前考研数学分为五类,其中数学三是理工类,1997年之后考研数学改为四类,其中数学三是经济类。另外,即使同样是理工类的数学一,要求也不一样。

1997年之后的试卷之所以具有足够代表性的另外一个原因是,考生只要有最新8年的试卷分析,就足以能掌握考研数学的规律与命题思想。如(A 表示考察知识点相同,A^+ 表示类似题型,A^{++} 表示几乎完全相同的题目):

2004 年数学一第(5)题与 2003 年数学二第一大题第(6)小题(A^+);

2004 年数学一第(20)题与 2002 年数学三第九大题(A^{++});

2004 年数学一第(22)题与 1999 年数学三第十一大题(A^{++});

2004 年数学三第(20)题与 2000 年数学三第九大题(A^{++});

2004 年数学三、四第(22)题与 1999 年数学三第十一大题(A^{++});

2004 年数学三第(23)题与 2002 年数学一第十二大题(A);

2004 年数学四第(18)题与 2002 年数学四第七大题(A^{++});

1997－2003 年之间重复出现的题型或考察相同知识点的题目有:

2003 年数学一第三大题与 2001 年数学三第六大题(A^+);

2003 年数学一第四大题与 2001 年数学一第五大题(A^{++});

2003 年数学二第七大题与 1997 年数学二第八大题(A^+);

2003 年数学二第十一大题与 1999 年数学四第九大题(A^{++});

2003 年数学三第九大题与 2002 年数学三第九大题(A^+);

2003 年数学四第七大题与 1998 年数学三第八大题(A^+);

2003 年数学四第十大题与 1999 年数学三第九大题(A^{++});

2002 年数学二第十一大题(2)与 1997 年数学二第三大题(6)(A^{++});

2002 年数学三第十一大题(1)与 1999 年数学三第十一大(1)(A^{++});

2001 年数学一第六大题与 1997 年数学一第三大题(2)(A^{++});

2001 年数学二第一大题(5)与 2000 年数学一第一大题(4)(A^{++});

2001 年数学三、数学四第三大题与 1997 年数学三第四大题(A^{++});

2000 年数学二第二大题(2)与 1997 年数学二第二大题(3)(A^{++});

2000 年数学四第十大题与 1999 年数学四第九大题(A);

……

事实上，真题就是最好的模拟题，考生应着力把最近8年的试题练精钻透。题不在多，贵在精！

因此，我们从题库中节选了从1997－2004年的考研数学的全部真题，我们特聘请全国著名考研辅导专家、连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长的蔡子华老师担任主编，同时诚邀北京大学、清华大学等全国知名高等学府的数学教授参与编写这套丛书。

这套丛书的主要特点有以下几个方面：

1. 按数学一、数学二、数学三和数学四分类，分册出版；

2. 将历年真题以填空题／选择题／解答题的顺序安排到考试大纲规定的章节中，便于考生在复习时自我训练；

3. 将答案解析放在第三部分，并从[考点]→[分析]→[详解]→[讲评]→[得分率]等五个角度来展开分析与讲评；

值得注意的是，2004数学试卷结构做了一些调整，增加两个选择题，减少一个解答题，解答题总分为94分，有意思的是，有些客观题（填空题和选择题）和解答题的设计思路非常巧妙，如：

例1 客观题[04.4(5)] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$\mathbf{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{b}$ 的解是________

例2 解答题[04.3(17)] 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b)$，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

总而言之，近8年考研数学真题分析充分揭示出这样的命题原则或者说遵循这样的指导思想："既要有利于国家对高层次人才的选拔，也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高"。

希望2005年考生在使用本书的时候，牢记两个"有利于"的指导思想。充分利用真题，提高分析问题、解决问题的能力。值得补充的是，由于近几年不少理工类的考题随后出现在经济类试卷之中，因此我们建议经济类考生在复习数学三、数学四的同时，可以参阅理工类的数学一、数学二。

由于时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请广大读者、数学同仁批评指正。

最后，祝2005年考生取得满意的成绩！

编者

2004年3月

目　　录

第一部分　题型集萃

第一章　高数部分
第一节　函数、极限、连续 …… (1)
第二节　一元函数微分学 …… (4)
第三节　一元函数积分学 …… (9)
第四节　多元函数微积分学 …… (13)
第五节　常微分方程 …… (14)
第二章　线性代数
第一节　行列式 …… (17)
第二节　矩阵 …… (17)
第三节　向量 …… (18)
第四节　线性方程组 …… (19)
第五节　矩阵的特征值和特征向量 …… (20)

第二部分　历年试题

1997 年数学二 …… (21)
1998 年数学二 …… (24)
1999 年数学二 …… (27)
2000 年数学二 …… (30)
2001 年数学二 …… (33)
2002 年数学二 …… (36)
2003 年数学二 …… (39)
2004 年数学二 …… (42)

第三部分　真题解析

1997 年数学二真题解析 …… (45)
1998 年数学二真题解析 …… (61)
1999 年数学二真题解析 …… (76)
2000 年数学二真题解析 …… (88)
2001 年数学二真题解析 …… (102)
2002 年数学二真题解析 …… (116)
2003 年数学二真题解析 …… (133)
2004 年数学二真题解析 …… (151)

第一部分　题型集萃

第一章　高数部分

第一节　函数、极限、连续

1997 年一(1)

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

1998 年一(1)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

2000 年一(1)

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________.

2001 年一(1)

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ________.

2002 年一(1)

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

2002 年一(4)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$ ________.

2003 年一(1)

7. 若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________.

2004 年一(1)

8. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ________

1997 年二(1)

9. 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

1997 年二(5)

10. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]$(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x<0 \\ 2-x, & x\geqslant 0 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} 2+x^2, & x<0 \\ 2+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

1998 年二(1)

11. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是(　　)

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小 (D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

1998 年二(3)

12. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，其中 α 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小，且 $y(0)=\pi$，则 $y(1)=$ (　　)

(A) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$　　(B) 2π　　(C) π　　(D) $e^{\frac{\pi}{4}}$

1999 年二(1)

13. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ x^2 g(x), & x\leqslant 0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　)

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导　　(D) 可导

1999 年二(2)

14. 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(　　)

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但不等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

1999 年二(4)

15. “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　)

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

2000 年二(1)

16. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，则常数 a、b 满足(　　)

(A) $a<0,b<0$　　(B) $a>0,b>0$

(C) $a\leqslant 0,b>0$　　(D) $a\geqslant 0,b<0$

2000 年二(4)

17. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为(　　)

(A) 0　　(B) 6　　(C) 36　　(D) ∞

2001 年二(1)

18.(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　)

(A)0　　　　(B)1

(C)$\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　　　(D)$\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

2001 年二(2)

19. 设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,$x\sin x^n$ 是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小,则正整数 n 等于(　　)

(A)1　　　　(B)2　　　　(C)3　　　　(D)4

2003 年二(1)

20. 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　)

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

2004 年二(7)

21. 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\,dt$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则排列顺序应为(　　)

(A)α,β,γ　　　　(B)α,γ,β　　　　(C)β,α,γ　　　　(D)β,γ,α

2004 年二(9)

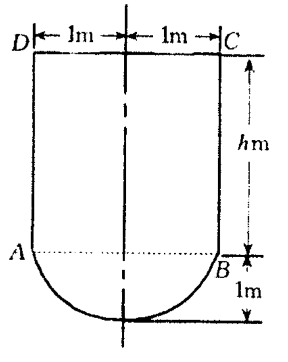
22. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}=$ ________.

(A)$\int_1^2\ln^2 x\,dx$　　　　(B)$2\int_1^2\ln x\,dx$　　　　(C)$2\int_1^2\ln(1+x)\,dx$　　　　(D)$\int_1^2\ln^2(1+x)\,dx$

1997 年三(1)

23. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

1998 年三



24. 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

1999 年三

25. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

1999 年十

26. 设 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,dx(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

2001 年四

27. 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

2002 年五

28. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$.

2002 年八

29. 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

2002 年十

30. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，$f''(0)\neq 0$. 证明：存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

2003 年三

31. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$ 问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

2004 年三(15)

32. (本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

第二节　一元函数微分

1997 年一(2)

1. 设 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$ 则 $y''\big|_{x=0}=$ ________.

1998 年一(2)

2. 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$ ________.

1998 年一(5)

3. 曲线 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})\,(x>0)$ 的渐近线方程为________.

1999 年一(1)

4. 曲线$\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$在点$(0,1)$处的法线方程为________.

1999 年一(2)

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

2000 年一(2)

6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $\mathrm{d}y\mid_{x=0}=$ ________.

2000 年一(4)

7. 曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

2001 年一(2)

8. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点(0,1)处的法线方程为__________.

2002 年一(2)

9. 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是________.

2003 年一(2)

10. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是________.

2003 年一(3)

11. $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是________.

2004 年一(2)

12. 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为________

1997 年二(3)

13. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$，则(　　)

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

1998 年二(2)

14. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

1998 年二(4)

15. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有(　　)

(A) $(a-x)[f(x)-f(a)]\geqslant 0$　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0(x\neq a)$　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant 0(x\neq a)$

1999 年二(3)

16. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

2000 年二(2)

17. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则(　　)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2000 年二(3)

18. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 是大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有(　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

2001 年二(3)

19. 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2001 年二(4)

20. (4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则(　　)

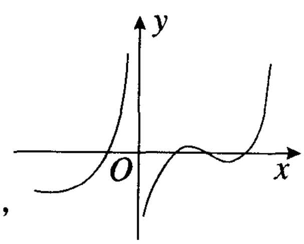
(A) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

(B) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

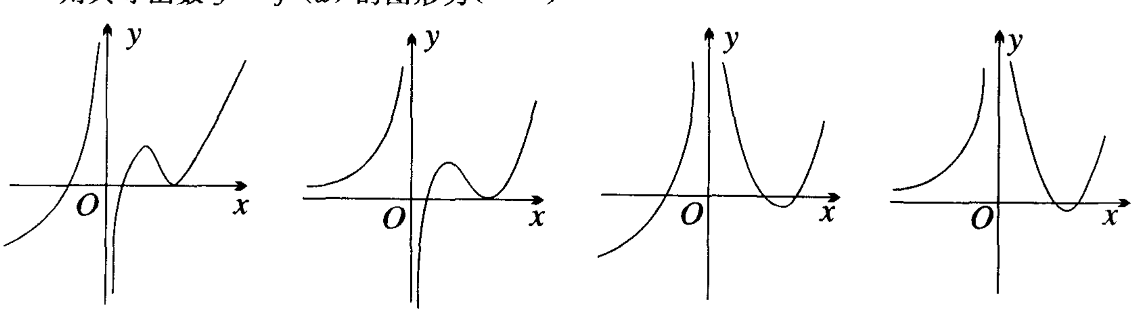
(C) 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)<x$，在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)>x$.

(D) 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$，在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)<x$.

2001 年二(5)



21. 已知函数 $y=f(x)$ 在其定义域内可导，它的图形如右图所示，则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为(　　)



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

2002 年二(1)

22. 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$(　　)

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.5

2002 年二(4)

23. 设函数 $y = f(x)$ 在$(0, +\infty)$ 内有界且可导,则(　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

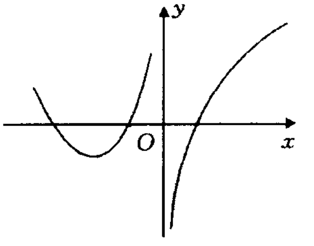
(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$.

2003 年二(4)

24. (4) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有(　　)



(A) 一个极小值点和两个极大值点

(B) 两个极小值点和一个极大值点

(C) 两个极小值点和两个极大值点

(D) 三个极小值点和一个极大值点

2004 年二(8)

25. 设 $f(x) = |x(1-x)|$ 则(　　)

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但$(0,0)$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但$(0,0)$ 是 $y = f(x)$ 的拐点

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但$(0,0)$ 是 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是 $y = f(x)$ 的拐点

2004 年二(10)

26. 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$,则存在 $\delta > 0$,使(　　)

(A) $f(x)$ 在$(0,\delta)$ 内单调增加　　(B) $f(x)$ 在$(-\delta,0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (0,\delta)$,有 $f(x) > f(0)$　　(D) 对任意 $x \in (-\delta,0)$,有 $f(x) > f(0)$

1997 年三(2)

27. (2) 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 所确定,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

1997 年八

28. 就 k 的不同取值情况,确定方程 $x - \frac{\pi}{2}\sin x = k$ 在开区间$(0, \frac{\pi}{2})$ 内根的个数,并证明你的结论.

1998 年八

29. 设 $y = f(x)$ 是区间$[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0 \in (0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于在$[x_0,1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间$(0,1)$ 内可导,且 $f'(x) > \dfrac{-2f(x)}{x}$,证明(1) 中的 x_0 是惟一的.

1998 年十一

30. 设 $x \in (0,1)$，证明：

(1) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$；　　(2) $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

1998 年十二

31. 设 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

1999 年七

32. 已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$，求：

(1) 函数的增减区间及极值；　　(2) 函数图形的凹凸区间及拐点；

(3) 函数图形的渐近线

1999 年八

33. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi) = 3$.

2000 年五

34. 求函数 $f(x) = x^2\ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n \geqslant 3)$.

2000 年八

35. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$. 试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2，使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

2000 年九

36. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + a(x)$$

其中 $a(x)$ 是当 $x \to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

2001 年十

37. 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0) = 0$，

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使 $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

2002 年三

38. 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos\theta$，求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

2002 年九

39. 设 $0 < a < b$，证明不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

2003 年四

40. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2 \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du \end{cases}(t>1)$ 所确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$.

2003 年七

41. 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

2003 年十

42. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

(1) 在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

(2) 在 (a,b) 内存在点 ξ，使 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3) 在 (a,b) 内存在与(2)中 ξ 相异的点 η，使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$.

2004 年三(16)

43. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $[0,2]$ 上有 $f(x)=x(x^2-4)$.

(1) 对 $\forall x\in[-2,0]$，有 $f(x)=kf(x+2)$，写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上表达式；

(2) k 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2004 年三(19)

44. 设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

第三节　一元函数积分学

1997 年一(3)

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=$ ________.

1997 年一(4)

2. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=$ ________.

1998 年一(3)

3. $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=$ ________.

1998 年一(4)

4. 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ ________.

1999 年一(3)

5. $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx=$ ________.

1999 年一(4)

6. 函数 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$上的平均值为______.

2000 年一(3)

7. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$______.

2001 年一(3)

8. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2x)\cos^2x\mathrm{d}x=$______.

2003 年一(4)

9. 设曲线的极坐标方程为 $\rho=\mathrm{e}^{a\theta}(a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为______.

2004 年一(3)

10. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$______

1997 年二(2)

11. 设在闭区间$[a,b]$上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$. 记 $S_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

$S_2=f(b)(b-a),S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则(　　)

(A)$S_1<S_2<S_3$　　(B)$S_2<S_3<S_1$

(C)$S_3<S_1<S_2$　　(D)$S_2<S_1<S_3$

1997 年二(4)

12. 设 $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$(　　)

(A) 为正常数　　(B) 为负常数　　(C) 恒为零　　(D) 不为常数

2002 年二(2)

13. 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是(　　)

(A)$\displaystyle\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(B)$\displaystyle\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

(C)$\displaystyle\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　(D)$\displaystyle\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

2003 年二(2)

14. 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于(　　)

(A)$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}+1$　　(B)$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$

(C)$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$　　(D)$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$

2003 年二(5)

15. 设 $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x,I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则(　　)