高等工科院校电子、信息类专业学习辅导书

电磁场理论基础
概念 题解与自测

胡 冰 崔正勤 陈 重 编

电磁场理论基础（北理工版）

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

电磁场理论基础

概念 题解与自测

胡 冰 崔正勤 陈 重 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论基础　概念　题解与自测/胡冰,崔正勤,陈重编.
—北京:北京理工大学出版社,2004.5
ISBN 7-5640-0249-2

Ⅰ.电…　Ⅱ.①胡…②崔…③陈…　Ⅲ.电磁场-理论-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第015424号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/(010) 68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京国马印刷厂
开　　本/787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/17.75
字　　数/431千字
版　　次/2004年5月第1版　2004年5月第1次印刷
印　　数/1~5500册
定　　价/26.00元

责任校对/陈玉梅
责任印制/母长新

前　言

电磁场理论是工科电子类专业的重要技术基础课，同时也是令许多学生望而生畏的一本“天书”。究其原因，除了本课程内容抽象、公式推导繁多和数学基础要求较高等特点外，其习题的灵活性和复杂性也是学习该课程倍感困难的主要因素之一。本书试图通过对各种典型习题的分析和求解范例，向学生介绍电磁场理论习题的基本解题思路、方法和技巧，以提高学生的解题能力。

本书是高等工科院校电子、信息类教材《电磁场理论基础》（陈重、崔正勤编著，北京理工大学出版社 2003 年 2 月出版）的配套参考书。共分 10 章，按教材的顺序安排。每章首先对教材中出现的重要定理和公式做出总结，引导学生提纲挈领地掌握教材内容。本书共收编习题 320 道，包括了教材的全部习题内容，对全部题目都给出了详细的解题过程，典型题目还给出了较多的解法，力争使学生做到触类旁通。

在使用本书时，同学们不要仅仅满足于看懂，对于书中典型题目应当认真地演算一遍，并且力争找到完全不同于本书的方法，这样才能对基本概念和方法产生深刻的印象，进而对电磁场理论达到融会贯通。

为便于同学们对自己的学习情况有所了解，本书最后还提供了 2000—2003 年度北京理工大学研究生入学考试试题，用于同学们自行测验。对于这部分题目，书中只给出了相应的结果，目的是希望同学们能够独立完成求解过程。这部分内容也适于准备报考研究生的同学复习时参考。

本书由陈重、崔正勤、胡冰共同编写，全书经陈重教授修改、定稿。在编写过程中得到了北京理工大学出版社的大力支持，在此表示衷心感谢。

由于编者本人水平有限，书中错误和不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2003 年 12 月

目 录

第一部分 概念、题解

第二部分　自　测

第一部分 概念、题解

第1章 矢量分析

一、基本概念与公式

1．矢性函数及其运算

（1）矢性函数的定义。

设有数性变量 t 和变矢 $\boldsymbol{F}$，如果对于 t 在某个区域 (t_1, t_2) 内的每一个数值，$\boldsymbol{F}$ 都有一个确定的矢量和它对应，则称 $\boldsymbol{F}$ 为数性变量 t 的矢性函数，记作

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$$

区域 (t_1, t_2) 称为函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的定义域。

（2）线性运算。

矢性函数的各坐标都是数性函数，所以对矢性函数的求导数、微分、积分等线性运算与数性函数的规则相同。

（3）乘积运算。

矢性函数具有矢量的一切性质，其乘积运算包括标量积（点乘）和矢量积（叉乘），运算规则与矢量乘积运算完全相同。

2．正交坐标系

（1）拉梅系数。

坐标单位矢量可以由点的矢径函数定义。设空间任意点 $M(u_1, u_2, u_3)$ 的矢径函数为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1, u_2, u_3)$，定义 $h_i=\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\right|$ $(i=1,2,3)$ 为拉梅系数或度量因子。于是单位坐标矢量表示为 $\hat{e}_i=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}/\partial u_i}{h_i}$ $(i=1,2,3)$。

拉梅系数 h_i 是 M 点处曲线坐标 u_i 的微分 $\mathrm{d}u_i$ 与该坐标线 u_i 上弧微分 $\mathrm{d}l_i$ 的比值。

拉梅系数在常用坐标系中的表示为

直角坐标系	$h_1=1$，$h_2=1$，$h_3=1$
柱坐标系	$h_1=1$，$h_2=\rho$，$h_3=1$
球坐标系	$h_1=1$，$h_2=r$，$h_3=r\sin\theta$

（2）矢量线元。

利用拉梅系数，可以将矢量线元表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=h_1\mathrm{d}u_1\hat{\boldsymbol{e}}_1+h_2\mathrm{d}u_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+h_3\mathrm{d}u_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的模为 $\mathrm{d}l=|\mathrm{d}\boldsymbol{l}|=\sqrt{(h_1\mathrm{d}u_1)^2+(h_2\mathrm{d}u_2)^2+(h_3\mathrm{d}u_3)^2}$

直角坐标系 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x+\hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y+\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z$

柱坐标系 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\mathrm{d}\rho+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z$

球坐标系 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}r+\hat{\boldsymbol{\theta}}\,r\,\mathrm{d}\theta+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$

（3）矢量面元。

利用拉梅系数，可以将矢量面元表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3)\hat{\boldsymbol{e}}_1+(h_1h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_3)\hat{\boldsymbol{e}}_2+(h_1h_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

直角坐标系 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

柱坐标系 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z+\hat{\boldsymbol{z}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$

球坐标系 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{r}}\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\,r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

（4）体元。

利用拉梅系数，可以将体元表示为

$$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_2\,\mathrm{d}l_3=h_1\mathrm{d}u_1h_2\mathrm{d}u_2h_3\mathrm{d}u_3$$

直角坐标系 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

柱坐标系 $\mathrm{d}\tau=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

球坐标系 $\mathrm{d}\tau=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

（5）坐标变换。

I. 直角坐标$\leftrightarrow$柱坐标

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \varphi=\arctan\frac{y}{x},\qquad z=z$$

II. 直角坐标$\leftrightarrow$球坐标

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\qquad z=r\cos\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

III. 柱坐标$\leftrightarrow$球坐标

$$\rho=r\sin\theta,\quad \varphi=\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

$$r=\sqrt{\rho^2+z^2},\quad \theta=\arctan\frac{\rho}{z},\quad \varphi=\varphi$$

3. 标量场的梯度

（1）方向导数。

方向导数是标量函数 f 在给定点处沿某个方向对距离的变化率。定义式为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_M=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(M')-f(M)}{\Delta l}$$

当 $\partial f/\partial l>0$ 时，函数 f 的值沿 $\boldsymbol{l}$ 方向增加；$\partial f/\partial l<0$ 时，函数 f 的值沿 $\boldsymbol{l}$ 方向减小；否则不变。

（2）梯度。

在标量场 f 中一点 M 处，存在这样的矢量 $\boldsymbol{G}$，其方向为函数 f 在 M 点处变化率最大的方向，其模也正好是这个最大变化率的数值，则称矢量 $\boldsymbol{G}$ 为函数 f 在点 M 处的梯度，记作 $\mathrm{grad}\,f$，即

$$\mathrm{grad}\ f=\boldsymbol{G}=\hat{\boldsymbol{e}}_1\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_1}+\hat{\boldsymbol{e}}_2\frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_2}+\hat{\boldsymbol{e}}_3\frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_3}$$

（3）不同坐标系下的梯度算符。

哈密顿算子 $\nabla=\hat{\boldsymbol{e}}_1\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u_1}+\hat{\boldsymbol{e}}_2\frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial}{\partial u_2}+\hat{\boldsymbol{e}}_3\frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial}{\partial u_3}$

直角坐标系 $\nabla=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}$

柱坐标系 $\nabla=\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}$

球坐标系 $\nabla=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}$

（4）常用公式。

梯度运算的实质是进行求导运算，所以有与求导十分类似的运算公式，如：

$$\nabla c=0 \qquad (c\text{ 为常数})$$

$$\nabla(cf)=c\nabla f$$

$$\nabla(f\pm g)=\nabla f\pm\nabla g$$

$$\nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(g\nabla f-f\nabla g)$$

$$\nabla f(g)=f'(g)\nabla g$$

4．矢量场的散度

（1）通量。

对有向曲面 S，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 穿过 S 的通量为 $\varPhi=\int_s\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，$\varPhi$ 仍为标量，正负取决于所有面元通量的叠加结果。

（2）散度。

矢量 $\boldsymbol{F}$ 的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}$ 为一标量，表示 $\boldsymbol{F}$ 场中某点处的通量对体积的变化率

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\lim_{\Omega\to M}\frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta\tau}$$

散度表示该点处单位体积所穿出之通量，因此也被称为该点处的源强度。当 div $\boldsymbol{F}>0$ 时，表示该点有发出通量的正源；div $\boldsymbol{F}<0$ 时，表示该点有吸收通量的负源；而 div $\boldsymbol{F}=0$ 则表示该点无源。

利用哈密顿算符，散度表示为$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$。

（3）不同坐标系下的散度计算公式。

直角坐标系
$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

柱坐标系
$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\left(\rho F_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

球坐标系
$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta F_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

（4）常用公式。

若 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{E}$ 为矢量函数，f 为标量函数，$\boldsymbol{C}$ 为常矢，c 为常数，则下列恒等式成立

$$\nabla\cdot\boldsymbol{C}=0$$
$$\nabla\cdot(c\boldsymbol{F})=c\nabla\cdot\boldsymbol{F}$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{E})=\nabla\cdot\boldsymbol{F}\pm\nabla\cdot\boldsymbol{E}$$
$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{F})=f\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\nabla f$$
$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot\nabla f$$

（5）散度定理（高斯定理）。

矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度在给定体积的体积分，等于此矢量场在该体积外表面上的闭合面积分。

$$\int_\tau\nabla\cdot\boldsymbol{F}d\tau=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$$

5．矢量场的旋度

（1）环量。

在矢量场 $\boldsymbol{F}$ 中，矢量 $\boldsymbol{F}$ 沿某一闭合有向曲线 l 的曲线积分，称为该矢量按所取方向沿曲线l的环量，记作

$$\Gamma=\oint_l\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_l F\cos\theta dl$$

环量是一个描述场在某回路上的旋涡性的宏观量。

（2）环量密度。

过 M 点取一矢量面元$\Delta\boldsymbol{S}_n=\hat{\boldsymbol{n}}\Delta S_n$，$\hat{\boldsymbol{n}}$为面元的法矢，则 $\boldsymbol{F}$ 在l上的环量与ΔS_n的比值的极限

$$\mu_n = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_n}$$

称为矢量 $\boldsymbol{F}$ 在 M 点处沿 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 方向的环量密度。

环量密度的意义为：矢量场内某点在给定方向上的单位面积的环量。

（3）旋度。

定义矢量 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$，使 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ 这个矢量在 M 点的任意给定方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 上的投影，等于 $\boldsymbol{F}$ 在 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 方向的环量密度，即

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_n}$$

矢量 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ 称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 处的旋度。

利用哈密顿算符，旋度表示为 $\nabla \times \boldsymbol{F}$。

（4）不同坐标系下的旋度计算公式。

直角坐标系
$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

柱坐标系
$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \rho\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

球坐标系
$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

（5）斯托克斯定理。

设 S 是矢量场 $\boldsymbol{F}$ 中的一个非闭合光滑有向曲面，l 是 S 的边界线，l 的正方向与 S 的法矢成右手螺旋关系。若 $\boldsymbol{F}$ 在包含 l 在内的某一区域内有一阶连续偏导数，则有

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

上式称为斯托克斯定理。

6. 几种重要的矢量场

（1）有势场。

I. 对于一个矢量场 $\boldsymbol{F}(M)$，若在给定的区域内存在单值数性函数 $\Phi(M)$ 满足

$$\boldsymbol{F} = -\nabla \Phi$$

则称此矢量场 $\boldsymbol{F}$ 为有势场，称 Φ 为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的势函数或位函数。

II. 有势场在任意两点间的线积分只与两点的位置坐标有关，而与线积分的积分路径无关。有势场的闭合回路线积分恒等于零。线积分与路径无关（或闭合线积分恒为零）的矢量场常常被称为保守场，可见，有势场必为保守场。

III. 直角坐标系中势函数的求解（矢量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 为有势场）

$$\Phi(x,y,z)=-\int_{x_0}^{x}F_x(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x-\int_{y_0}^{y}F_y(x,y,z_0)\mathrm{d}y-\int_{z_0}^{z}F_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

IV. 在线单连域内，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 为有势场的充要条件是 $\boldsymbol{F}$ 为无旋场。

（2）管形场。

I. 对于矢量场 $\boldsymbol{F}(M)$，若在其定义域内的每一点上都有 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，则称 $\boldsymbol{F}(M)$ 为管形场。可见，管形场就是无散场。

II. 在面单连域内，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 为管形场的充要条件是它为另一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度场，即 $\boldsymbol{F}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

（3）调和场。

I. 若对于矢量场 $\boldsymbol{F}$，恒有 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，则称此矢量场 $\boldsymbol{F}$ 为调和场。换言之，调和场就是既无散又无旋的无源矢量场。

II. 若 $\boldsymbol{F}$ 为调和场，则存在着标量势函数 Φ 满足 $\boldsymbol{F}=-\nabla\Phi$，并且 Φ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Phi=0 \qquad (\text{或记作 } \Delta\Phi=0)$$

在直角坐标系中，拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

满足拉普拉斯方程的标量函数 Φ 称做调和函数，$\nabla^2\Phi$ 称作调和量。

7. 亥姆霍兹定理

数学表达式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\left[\int_\tau\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}\mathrm{d}\tau'-\oint_S\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{4\pi R}\mathrm{d}S\right]+\nabla\times\left[\int_\tau\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}\mathrm{d}\tau'+\oint_S\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\times\hat{\boldsymbol{n}}}{4\pi R}\mathrm{d}S\right]$$

亥姆霍兹定理表明：

（1）矢量场 $\boldsymbol{F}$ 可以用一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和表示。此标量函数由 $\boldsymbol{F}$ 的散度和 $\boldsymbol{F}$ 在边界 S 上的法向分量完全确定；而矢量函数由 $\boldsymbol{F}$ 的旋度和 $\boldsymbol{F}$ 在边界上的切向分量完全确定。

（2）散度 $\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')$ 是有势场部分 $\boldsymbol{F}_1$ 的源，称为通量源；旋度 $\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')$ 是管形场部分 $\boldsymbol{F}_2$ 的源，称为旋涡源。体积分表示体积内的通量源和旋涡源与场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 的联系。

（3）$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\times\hat{\boldsymbol{n}}$ 是等效的表面源，它们的面积分表示 τ 以外的源对场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 的贡献。

二、习题解答

1.1　已知$\hat{r}=(t^3+2t)\hat{x}-3e^{-2t}\hat{y}+2(\sin 5t)\hat{z}$，试求下列各式在$t=0$时的值：

$$(1)\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t};\qquad (2)\ \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|;\qquad (3)\ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2};\qquad (4)\ \left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|$$

解：（1）$\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left[(3t^2+2)\hat{x}+6e^{-2t}\hat{y}+10(\cos 5t)\hat{z}\right]\Big|_{t=0}=2\hat{x}+6\hat{y}+10\hat{z}$

（2）$\left.\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\right|_{t=0}=\sqrt{2^2+6^2+10^2}=2\sqrt{35}$

（3）$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=\left[6t\hat{x}-12e^{-2t}\hat{y}-50(\sin 5t)\hat{z}\right]_{t=0}=-12\hat{y}$

（4）$\left.\left|\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|\right|_{t=0}=12$

1.2　求曲线$\boldsymbol{r}(t)=t\hat{x}+t^2\hat{y}+t^3\hat{z}$上这样的点，使该点的切线平行于平面$x+2y+z=4$。

解：曲线某点处的切线方程是

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(t)}{\partial t}=\hat{x}+2t\hat{y}+3t^2\hat{z}$$

平面的法线方向　　$\boldsymbol{n}=\hat{x}+2\hat{y}+\hat{z}$

若过某点的切线平行于平面，则此点处切线与平面的法线垂直。于是

$$(\hat{x}+2t\hat{y}+3t^2\hat{z})\cdot(\hat{x}+2\hat{y}+\hat{z})=1+4t+3t^2=0$$

解得　　$t=-1$ 或 $t=-\dfrac{1}{3}$

从而得所求点为　　$(-1,\ 1,\ -1)$和$\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{27}\right)$

1.3　一质点以等速度沿曲线　$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$z=b\theta$运动，求其速度和加速度。

解：矢径为　　$\boldsymbol{r}(t)=a\cos\theta\hat{x}+a\sin\theta\hat{y}+b\theta\hat{z}$

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\hat{x}(-a\sin\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\hat{y}a\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\hat{z}b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

依题意，设　　$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega=\text{const}$

则有　　$\boldsymbol{v}(t)=\omega(-a\sin\theta\hat{x}+a\cos\theta\hat{y}+b\hat{z})$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\omega^2(-a\cos\theta\hat{x}-a\sin\theta\hat{y})$$

1.4 已知$\boldsymbol{A}(t)$和一非零常矢$\boldsymbol{B}$恒满足$\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}=t$，又$\boldsymbol{A}'(t)$和$\boldsymbol{B}$之间的夹角$\theta$为常数。试证明$\boldsymbol{A}'(t)\perp\boldsymbol{A}''(t)$。

证明：设 $$\boldsymbol{A}(t)=\hat{\boldsymbol{x}}A_1(t)+\hat{\boldsymbol{y}}A_2(t)+\hat{\boldsymbol{z}}A_3(t)$$

由 $$\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}=t\text{，得}\boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}=1$$

又已知$\boldsymbol{A}'(t)$和$\boldsymbol{B}$之间的夹角θ为常数，且

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}'(t)|\cdot|\boldsymbol{B}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}'(t)|\cdot|\boldsymbol{B}|}$$

所以有 $$|\boldsymbol{A}'(t)|=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|\cos\theta}=\text{const}$$

同时 $$|\boldsymbol{A}'(t)|=\sqrt{A_1'(t)^2+A_2'(t)^2+A_3'(t)^2}$$

上式两边分别对t求导，得

$$0=\frac{2\left[A_1'(t)A_1''(t)+A_2'(t)A_2''(t)+A_3'(t)A_3''(t)\right]}{2\sqrt{A_1'(t)^2+A_2'(t)^2+A_3'(t)^2}}$$

即 $$A_1'(t)A_1''(t)+A_2'(t)A_2''(t)+A_3'(t)A_3''(t)=0$$

所以 $$\boldsymbol{A}(t)\perp\boldsymbol{A}''(t)$$

1.5 设常矢$\boldsymbol{C}=\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{y}}+2\hat{\boldsymbol{z}}$，求在直角坐标系的点$B(1,2,3)$和点$A(2,2,1)$处，

（1）$\boldsymbol{C}$的圆柱坐标表示式；

（2）$\boldsymbol{C}$的球坐标表示式。

解：（1）柱坐标与直角坐标变换

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,,\qquad \varphi=\arctan\frac{y}{x}\,,\qquad z=z$$

直角坐标与柱坐标变换

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\\ \hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi\\ \hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{z}}\end{cases}$$

则 $$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=\hat{\boldsymbol{x}}-2\hat{\boldsymbol{y}}+2\hat{\boldsymbol{z}}\\&=(\hat{\boldsymbol{\rho}}\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi)-(\hat{\boldsymbol{\rho}}\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi)+2\hat{\boldsymbol{z}}\\&=\hat{\boldsymbol{\rho}}(\cos\varphi-\sin\varphi)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\sin\varphi+\cos\varphi)+2\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

对于$B(1,2,3)$

$$\rho=\sqrt{5}\,,\quad \varphi=\arctan 2\,,\quad z=3$$

所以 $$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\quad \sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

则$\boldsymbol{C}$在点$B(1,2,3)$处的柱坐标表示式为

$$\boldsymbol{C}_B=-\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\boldsymbol{\rho}}-\frac{3}{\sqrt{5}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}+2\hat{\boldsymbol{z}}$$

对于 $A(2,2,1)$：　　$\rho=2\sqrt{2}$，$\varphi=\arctan 1$，　$z=1$

所以　　$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

则 $\boldsymbol{C}$ 在 $A(2,2,1)$ 点处的柱坐标表示式为

$$\boldsymbol{C}_A=-\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}+2\hat{\boldsymbol{z}}$$

（2）球坐标与直角坐标的变换

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\quad \theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

直角坐标与球坐标的变换

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\\ \hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi\\ \hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\end{cases}$$

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=\hat{\boldsymbol{x}}-2\hat{\boldsymbol{y}}+2\hat{\boldsymbol{z}}\\&=\hat{\boldsymbol{r}}(\sin\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi+2\cos\theta)+\\&\quad\hat{\boldsymbol{\theta}}(\cos\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi-2\sin\theta)+\hat{\boldsymbol{\varphi}}(-\sin\varphi-\cos\varphi)\end{aligned}$$

对于 $B(1,2,3)$

$$\theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arccos\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \varphi=\arctan 2$$

所以
$$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\ ,\ \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{14}}$$
$$\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

则 $\boldsymbol{C}$ 在点 $B(1,2,3)$ 处的球坐标表示式为

$$\boldsymbol{C}_B=\frac{5}{\sqrt{14}}\hat{\boldsymbol{r}}-\frac{13}{\sqrt{70}}\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{3}{\sqrt{5}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

对于 $A(2,2,1)$

$$\theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arccos\frac{1}{3},\quad \varphi=\arctan 1$$

所以
$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ ,\ \cos\theta=\frac{1}{3}$$
$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

则 $\boldsymbol{C}$ 在 $A(2,2,1)$ 点处的球坐标表示式为

$$C_A=\frac{2}{3}\hat{r}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\hat{\theta}-\sqrt{2}\hat{\varphi}$$

1.6　将圆柱坐标系中的矢量 $F=\rho\sin\varphi\hat{\rho}+\rho^2\hat{\varphi}+\cos\varphi\hat{z}$ 在点(ρ_0,φ_0,z_0)处写成球坐标系表达式。

解：柱坐标与球坐标之间的变换式

$$\hat{r}=\hat{\rho}\sin\theta+\hat{z}\cos\theta$$

$$\hat{\theta}=\hat{\rho}\cos\theta-\hat{z}\sin\theta$$

$$\hat{\varphi}=\hat{\varphi}$$

所以设

$$F=\hat{r}F_r+\hat{\theta}F_\theta+\hat{\varphi}F_\varphi$$

则

$$\begin{aligned}F_r&=\hat{r}\cdot(\rho\sin\varphi\hat{\rho}+\rho^2\hat{\varphi}+\cos\varphi\hat{z})\\&=(\hat{\rho}\sin\theta+\hat{z}\cos\theta)\cdot(\rho\sin\varphi\hat{\rho}+\rho^2\hat{\varphi}+\cos\varphi\hat{z})\\&=\rho\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_\theta&=\hat{\theta}\cdot(\rho\sin\varphi\hat{\rho}+\rho^2\hat{\varphi}+\cos\varphi\hat{z})\\&=(\hat{\rho}\cos\theta-\hat{z}\sin\theta)\cdot(\rho\sin\varphi\hat{\rho}+\rho^2\hat{\varphi}+\cos\varphi\hat{z})\\&=\rho\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi\end{aligned}$$

$$F_\varphi=\hat{\varphi}\cdot(\rho\sin\varphi\hat{\rho}+\rho^2\hat{\varphi}+\cos\varphi\hat{z})=\rho^2$$

同时

$$\theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arccos\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

所以

$$\cos\theta=\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}},\quad \sin\theta=\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

同时代入点(ρ_0,φ_0,z_0)，得

$$F=\left[\hat{r}\cdot(\rho\sin\varphi\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\cos\varphi)+\hat{\theta}(\rho\sin\varphi\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}-\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\cos\varphi)+\hat{\varphi}\rho^2\right]\Bigg|_{(\rho_0,\varphi_0,z_0)}$$

所以

$$F=\hat{r}\left(\frac{\rho_0{}^2\sin\varphi_0}{\sqrt{\rho_0{}^2+z_0{}^2}}+\frac{z_0\cos\varphi_0}{\sqrt{\rho_0{}^2+z_0{}^2}}\right)+\hat{\theta}\left(\frac{\rho_0z_0\sin\varphi_0}{\sqrt{\rho_0{}^2+z_0{}^2}}-\frac{\rho_0\cos\varphi_0}{\sqrt{\rho_0{}^2+z_0{}^2}}\right)+\hat{\varphi}\rho_0{}^2$$

1.7　在圆柱坐标系中，一点的位置由$(4,2\pi/3,3)$定出，求该点在

（1）直角坐标系中的坐标；

（2）球坐标系中的坐标。

解：（1）由题意，直角坐标与柱坐标的变换关系：

$$x=\rho\cos\varphi\ ,\ y=\rho\sin\varphi\ ,\ z=z$$

所以
$$x=4\cos\frac{2\pi}{3}=-2$$
$$y=4\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}$$
$$z=3$$

即此点在直角坐标系中的坐标为$(-2,2\sqrt{3},3)$。

（2）球坐标与柱坐标变换关系

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x},\quad z=z$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}，\ \theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}，\ \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

$$r=\sqrt{\rho^2+z^2}，\ \theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}，\ \varphi=\varphi$$

所以
$$r=\sqrt{\rho^2+z^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$
$$\theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\arccos\frac{3}{5}=53.13^\circ$$
$$\varphi=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$$

即此点在球坐标系中的坐标为$(5,53.13^\circ,120^\circ)$。

1.8 用球坐标表示场$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{r}}(25/r^2)$。

（1）求在点$(-3,4,-5)$处的$|\boldsymbol{E}|$和E_x；

（2）求$\boldsymbol{E}$与矢量$\boldsymbol{B}=2\hat{\boldsymbol{x}}-2\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}}$构成的夹角。

解：（1）由题意，在点$(-3,4,-5)$处

$$r^2=(-3)^2+4^2+(-5)^2=50$$

所以
$$|\boldsymbol{E}|=\left|\hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{25}{r^2}\right)\right|_{r^2=50}=\frac{1}{2}$$

$$E_x=\left[\hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{25}{r^2}\right)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{x}}$$
$$=\left[\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi\right]\cdot\left[\hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{25}{r^2}\right)\right]$$
$$=\sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{25}{r^2}$$

根据题意
$$\theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arccos\frac{-5}{5\sqrt{2}}=\arccos\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

同时考虑到$(-3,4,-5)$所在的象限，得