高等数学
学習方法指示書

上册

同济大学数学教研組編

高等教育出版社

高等数学
学習方法指示書

上册

同济大学数学教研組編

高等教育出版社

本書是根据我社出版樊映川等編的"高等数学講义"(第一版)編写的。采用本指示書时必須采用上述高等数学講义作課本方能配合。本書可作为高等工业学校函授学生学習高等数学的教材，也可作为已修完高中数学課程的讀者自学高等数学之用。

本書分上、下两册。上册包括一般学習方法指示，各章学習方法指示、習題、習題答案及測驗作业題。下册是根据同济大学函授生学習高等数学时所提出的問題加以整理編写的，可解决学習上某些疑难題，也可作为体会教材的参考資料。

高等数学学习方法指示书

上　册

同济大学数学教研組編

高等教育出版社出版　北京宣武門内承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·643　开本 850×1168 1/32　印张 7 11/16
字数 182,000　印数 1—20,000　定价 (4) ¥ 0.80
1959年8月第1版　1959年8月上海第1次印刷

目　次

第二篇 数学分析(續)

一 緒言

高等数学在高等工业学校各專业的教学計划中是一門屬于理論性的基础課程。在培养專业工程师的过程中，高等数学起着奠基的作用。

学生修完本課程后所获得的数学知識在他以后的学習中起着重要的作用。这些知識对同学順利地学習其他理論課(如物理，理論力学等)及專业課都是必需的。

在現代，数学方法被广泛地运用来解决各式各样的技术問題。因此学生应当預見到，畢业后他在业务工作中必定要屡次应用到自己的数学知識。

数学課程还要培养学生牢固的邏輯思維的習慣，这对每一个工程师都是很必要的。

因此，只有有了数学基础，才有可能成为具有創造能力的專业工程师。

二　一般学習方法指示

在每一章学習开始时，学生先看本指示書中关于各章的头一段指示。这一段指出应按怎样的程序来学習这一章：应該先看講义中那几节教材，在什么时候看那几段指示，配合着做那些習題等等。学生必須完全依照这程序来学習。

1. 閱讀講义

1. 应当仔細閱讀講义。必須先对前面的內容获得了正确的了解后再繼續前进。在紙上作出全部計算（也包括那些因簡單而在講义中略去的在內）。复制教科書中所有的圖。

2. 应特别注意基本概念的定义。所有这些概念反映着現实世界的数量关系或空間形式的性質。应該对这些概念有清楚的了解，否則不可能学好数学。

要仔細思考講义中对某些定义所举的例子，并应自己設法举出类似的例子来。

3. 在閱讀教材的同时作笔記——摘要——是很有益的。后面还要向学生介紹一些作摘記的方法。

4. 应該記住每一个定理是由假設、結論与証明所組成的。所有的假設在証明中都必需利用到。要能准确地指出定理中每一項假設在証明中的什么地方被利用到。作复杂定理的証明的概要是有益的。

2. 習　題

1. 閱讀教材后应配合着指示書所指定的習題。作習題前应

对講义中及本指示書中所举的例題能徹底理解。

2. 作習題时要从教材的理論原理出發。应該注意解題的每一步的根据，这些根据必須是学生确切知道它是正确的。

如果对于同一習題学生知道几种不同的解法，則应选擇最恰当的解法。

在計算开始前为自己拟一个簡短的解題計划是有好处的，这一点对比較复杂的習題更加需要。

3. 应該詳細地，毫无遺漏地，不在零散的紙上而在習題本上作所有的習題。計算要安排得很有次序，因此建議把輔助計算从主要計算中分开来。写錯时不要擦去或貼盖，只要勾去。

可以徒手画圖，但应按已給条件来画并应整潔。如果要求画特别准确的圖，例如要用圖来檢驗由計算所得的結果时，那末就要用直尺、量角器、曲綫板并注出比例尺。

4. 每道習題应进行到做出所要求的最終的答案。如果答案可以化簡时应化为最簡的形式。在解題过程中不应引入 π 等等的近似值，以免繁复的数字运算，这些值只应在指定要求近似解时，到最后一步才把它引入。

5. 做習題时不要先看答案。应作出最后結果后再对照答案。如果自己作出的結果与本指示書所給的答案不同，必須仔細檢查出發生差异的原因。

6. 如果沒有得到抽查的通知，習題本不必寄到学校里去。

3. 笔 記

1. 学生的笔記本——摘要——对学生的独立工作有很大意义。建議在第一遍閱讀教材时在笔記本中記下定义、定理的表述、定理的証明、公式和例題的解答。

在笔記本的边上空白处标出要書面或口头向教师提出的問

題。

2．書写的修飾工作有很重要的意义。笔記本的書写必須清楚、整潔并有条理。这不仅使学生習慣于有秩序地工作(这对任何工作都是很必需的)并且还可使得避免許多錯誤，这些錯誤都是由于潦草紊乱的書写而發生的。

3．建議作笔記时，在以公式的形式所得的結論下打上重点記号或画上一小框，以便在复習时能一望而知，且能更好地記住这些公式。

4．自我檢查題

在学習了教材和作了習題以后，应該在習題本上回答本指示書中所列的自我檢查題。

解答时应說明理由，但語言应尽可能扼要与具体。

自我檢查題的答案不必寄到学校里去。

如果对自己的答案有怀疑时，应向教师提出請求解答。

5．測驗作业

1．在沒有做完本指示書中所規定的(在該次測驗作业之前应完成的)習題之前不应动手做測驗作业。

2．做測驗作业前学生应在本指示書外所發的測驗作业編号表中(自学的讀者可按測驗作业題前的附表来做測驗作业)，查出自己必須做的測驗題的号数，自己不得变更。作解答时应把这号数写上，并且要按号数的順序排列，不要顚倒次序。每道題前应完全地写出它的条件。

測驗作业的解答应叙述得詳細、干淨。必要时应附注所根据的理由。圖可以徒手画。

3．測驗作业如果作得潦草，缺中間的計算以及不遵守規定来

做，就要發回重做。

4. 評閱通过的測驗作业学生应把它保存着。

学生应非常注意教师的評語。对教师所指出的錯誤学生应立刻加以改正。

如果教师指定重作或修改这个或那个測驗作业，或指定要一份更詳細的解答时，学生应在短期中完成它，然后連同原来的一份一并寄去。

5. 每次測驗作业应按規定日期完成后寄給教师批閱。

三　各章学習方法指示

高等数学緒論

讀講义中高等数学緒論。

第一篇　解析几何

解析几何創立于十七世紀。这是直到那时为止人类所作的一切經历中最偉大的、进步的变革完成的时期。恩格斯在他的“自然辨証法”(1948年版5—6頁)一書中这样描写这个历史时期:

“旧的‘世界’的界限被打破了；只是这时候才眞正發現了地球，奠定了以后的世界貿易以及从手工业过渡到工場手工业之基础，而工場手工业又是近代大工业的出發点。教会的精神独裁被击破了；……一种从阿拉伯人吸收来的和从新發現的希腊哲学那里得到营养的明快的自由思想愈来愈根深蒂固，为十八世紀的唯物論作了准备”。

生产力的發展引起了科学的蓬勃进步。新科学的創立又促进了此后人們生产技术的改善。

在同一書中(見7頁)，对于当时科学發展的这个最初阶段恩格斯这样說:

“在大多数部門中必須完全从头做起。古代留傳下欧几里德几何学和托萊米太阳系，阿拉伯人留傳下十进位概念、代数学的开

始，近代数字和煉金术；基督教的中世紀則一无所遺。在这个情况下，占首要地位的必然是最基本的自然科学，即关于地球上的物体和天体的力学，与之并立而为之服务的是数学方法的發現和完成。这里有了許多偉大的成就”。恩格斯認为，由笛卡兒所創立的新的数学方法——解析几何的方法，也屬于这些“偉大的成就”。

解析几何的創立使几何圖形的探討、曲綫及曲面的研究，得以大大地往前推进，对实际应用是重要的。

第一章　平面上的直角坐标、曲綫及其方程

先讀§§1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 然后讀学習方法指示1，并做習題№№1.1.1—1.1.8。

再讀§§1.7, 1.8 及学習方法指示2，例題1, 2，然后做習題№№1.1.9—1.1.13。

§1.9 删去。

再讀§§1.10, 1.11, 1.12, 1.13 并做習題№№1.1.14—1.1.19。

最后回答自我檢查題。

学習方法指示

1. 在解析几何学方面着手工作时，学生首先必須学会：

(a)能按給定的点的坐标描点；

(b)如果平面上点的位置已知，能确定該点的坐标；

(c)会利用本章公式来解有关的問題。

2. 解析几何中問題的解决，照例必須用代数方法，因此圖形以及几何作法在这里只能作为輔助工具。

几何問題，以前往往按其本身特性用各种不同方法来解決的，这里获得了統一的，在許多情况下并且是比較簡單的解決方法。

例　題

例 1. 已知 $A(1, -2)$ 及 $B(4, -4)$ 两点；求点 M 的坐标，它分綫段 $\overline{AB}$ 成比 $3:4$。

解. 应用公式：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。\tag{1}$$

这里　　$x_1=1,\ x_2=4,\ y_1=-2,\ y_2=-4,\ \lambda=\frac{3}{4}$。

因此，

$$x=\frac{1+\frac{3}{4}\cdot 4}{1+\frac{3}{4}}=2\frac{2}{7}, \quad y=\frac{-2+\frac{3}{4}(-4)}{1+\frac{3}{4}}=-2\frac{6}{7}。$$

于是，我們求得点 $M\left(2\frac{2}{7}, -2\frac{6}{7}\right)$。

注意：必須注意到下列两点：

(a) 点 M 是直接用公式(1)求得的而无需标出綫段 $\overline{AM}$ 及 $\overline{MB}$ 之長。

(b) 这里点 A, B 的次序起着作用的。如果在此題中把点 B 作为第一点而点 A 作为第二点，那末将有：

$$x=\frac{4+\frac{3}{4}\cdot 1}{1+\frac{3}{4}}=2\frac{5}{7}, \quad y=\frac{-4+\frac{3}{4}(-2)}{1+\frac{3}{4}}=-3\frac{1}{7},$$

而求得了另外一点 $M\left(2\frac{5}{7}, -3\frac{1}{7}\right)$，这是不合原題的。

例 2. 一点与 x 軸及点 $A(-5, 2)$ 的距离均为 10 个單位長度，求該点。

解. (a) 設所求之点为 $B(x, y)$①。此时点 B 与 x 軸的距离 $|BC| = \pm y = 10$(見圖 1)。

(b) 距离

$$|AB| = \sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+5)^2+(\pm 10-2)^2}。$$

(c) 由条件 $|AB| = |BC|$,即得

$$(x+5)^2+8^2=100,\ 或是\ (x+5)^2+12^2=100。$$

第二个方程沒有实数根。

由第一个方程我們有:

$$x^2+10x-11=0,\ x_1=1,\ x_2=-11。$$

于是,問題有两个答案:

$$B_1(1, 10),\ B_2(-11, 10)。$$

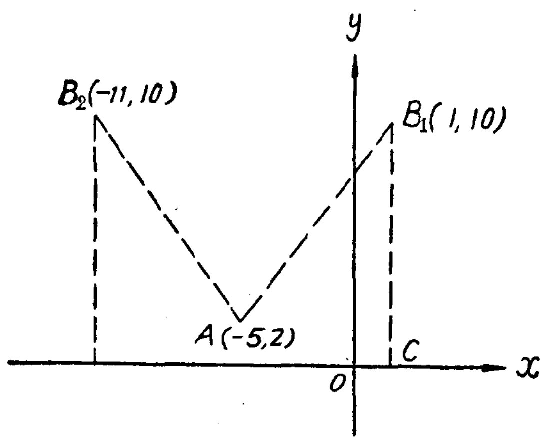

圖 1.

自我检查題

1. 将坐标原点沿 x 軸的正向移动一段距离 a (軸的方向不

① 一般說来,点 B 可以有正的或負的縱标,在解題的过程中我們求得 B 点的縱标为正。我們的圖就是按这个情形来画的。

变),問坐标变换公式将有怎样的形式?

2. 如果将旧的縦軸作为新的横軸,且新原点在旧系下的坐标为(0, 2),問坐标变换公式将有怎样的形式?

3. 两点間的距离公式具有怎样的形式,如果:

(a)两点的横标相同,但縦标不同?

(b)两点的縦标相同,但横标不同?

4 对称于 y 軸的两点的笛卡兒坐标彼此用什么来区别?

第二章 直綫

先讀§§2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6,然后讀学習方法指示1,2,3及例題1,2并做習題№№1.2.1—1.2.8。

再讀§§2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 及例題3并做習題№№1.2.9—1.2.20。

§2.12 删去。

最后回答自我檢查題。

学習方法指示

1. 在笛卡兒坐标系中,任一直綫均可用直綫上任意点的坐标 x, y 的一次方程来表示。

反之,任一 x, y 的一次方程(系数不全为零)在笛卡兒坐标系中表示某一直綫。

在别的坐标系中,例如在第四章極坐标系中我們就可以看到,直綫不一定可用一次方程来表示,而一次方程也不一定表示直綫。

2. 学生应当会将直綫的一般方程 $Ax+By+C=0$ 化为斜截式,截距式,法綫式,并且会由这些方程来作直綫(法綫式将在§2.7

討論)。

学生应当記住，在給定的坐标系中幷不是任何一条直綫都可以表示成直綫方程的这种或那种形式的。例如，通过坐标原点或平行某一坐标軸的直綫是不能表示成截距式方程的；平行于縱軸的直綫是不能表示成斜截式方程的。但任何直綫总可以用法綫式方程来表示。

3．按直綫的方程来研究直綫的这种方法使学生初次認識到解析几何学的特色。当过渡到研究曲綫的时候，这方法的很多方面仍旧可以保留下来。例如，建立直綫方程的原理就和建立曲綫方程的助一样。建立直綫方程时規定，一点要屬于直綫，这点的坐标必須滿足直綫方程(使这方程变成恒等式)。

因此，点(2, 1)在直綫 $2x+y-5=0$ 上(因为 $2\cdot2+1\cdot1-5=$ $=0$)，但点(3, 1)不在这直綫上(因为 $2\cdot3+1\cdot1-5\neq0$)。正像这样可以借助一些計算来識别点(2, 1)是否在曲綫 $x^2-y^2=1$ 上，点(3, 1)是否在曲綫 $2x^3-3y^4-51=0$ 上(建議学生自己去做)。

两直綫或两曲綫的交点就是应用上述原理来求的。因为交点的坐标必須使两方程同时成为恒等式，因此可以由两方程联立后所求出的公共解来确定。

例　題

例 1．利用直綫 $3x-5y-15=0$ 的截距式方程描此直綫。

解．(a)求出已知直綫的截距式方程。它具有形式：

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1。$$

因此，　　$a=5,\ b=-3$。

(b)在 x 軸的正方向截 5 个單位長度得到点 A。在 y 軸的負方向截 3 个單位長度得到点 B。

(c)联結 A, B 两点得所求直綫(圖 2)。

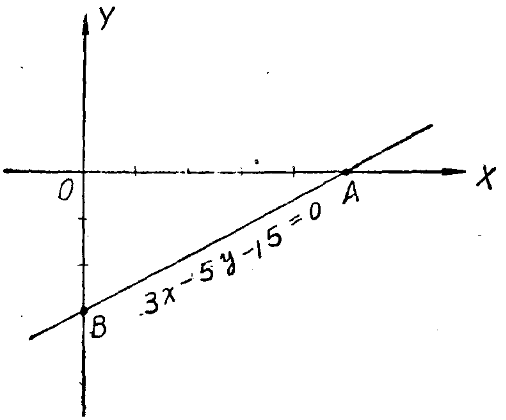

圖 2.

例 2. 利用直綫 $4x+3y-6=0$ 的斜截式方程描此直綫。

解. (a)将已知直綫方程化为斜截式 $y=-\frac{4}{3}x+2$。

(b)在 y 軸正向截 2 單位長度，我們得到已知直綫所通过的点 A。

(c)現在应当作出正切等于 $-\frac{4}{3}$ 的角。为此，过点 A 引平行于 x 軸的直綫，并从点 A 开始向左在这直綫上截 3 單位長度得到点 B。然后过点 B 引平行于 y 軸的直綫，并从点 B 开始向上在这直綫上截 4 單位長度得到点 M。

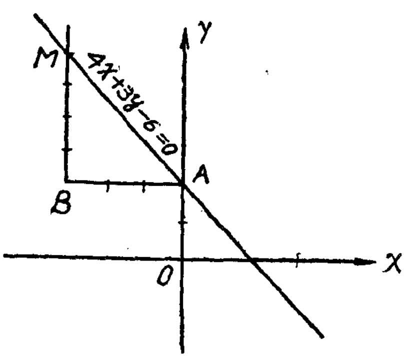

圖 3.

(d)联結点 A 及 M，得所求直綫，因为所作出的直綫对于 x 軸的傾角的正切等