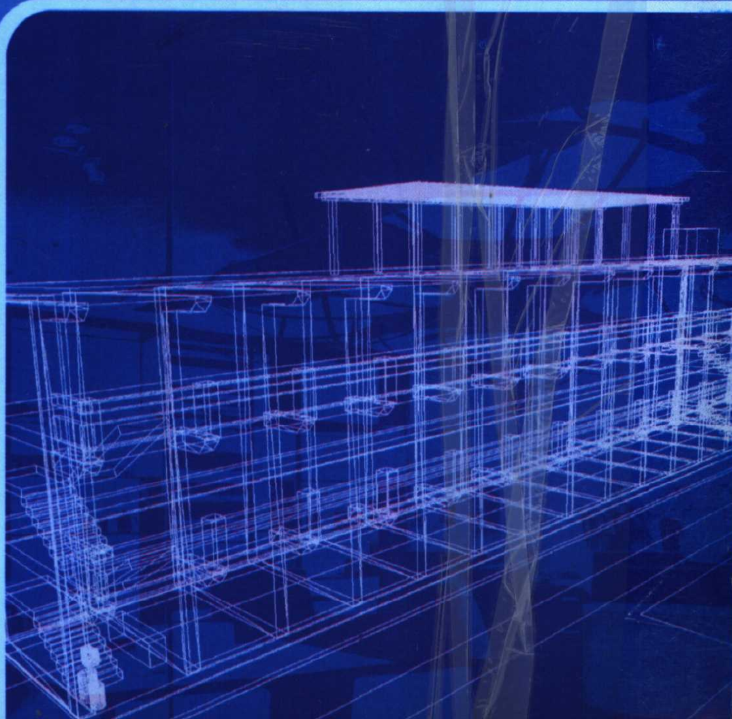
SHUXUE JIANMO FANGFA

朱建青 张国梁 编著

数学建模方法



出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模方法/朱建青,张国梁编著. —郑州:郑州大学出版社,2003.8
ISBN 7-81048-813-9

Ⅰ.数… Ⅱ.①朱…②张… Ⅲ.数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 066142 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　　　邮政编码:450052
出版人:谷振清　　　　发行部电话:0371-6966070
全国新华书店经销
河南东方制图印刷有限公司印制
开本:850 mm×1 168 mm　　1/32
印张:11.5
字数:285 千字
版次:2003 年 8 月第 1 版　　印次:2003 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-81048-813-9/G·63　　定价:19.00 元

内 容 简 介

建立数学模型是运用数学知识分析、解决实际问题的至关重要的第一步,是应用数学的重要组成部分。本书通过大量的案例,详细介绍了数学建模的基本概念和各类数学模型的建立和求解方法,内容涉及物理、生物、经济、管理、军事与社会科学等众多领域,较完整地体现了数学建模过程中数学方法的运用。

本书通俗易懂,适用于具有微积分、线性代数和概率论与数理统计基本知识的读者。通过本书的学习,有助于读者提高解决问题的能力。本书可作为本科生和非数学专业研究生的教材,也可供有关工程技术人员和管理人员参考。

前　言

数学作为一门重要的基础学科和一种精确的科学语言，它的表现形式是极为抽象的。要用数学方法解决实际问题，必须设法在数学和实际问题之间架设一座桥梁，这座桥梁就是数学模型。在计算机技术迅猛发展的今天，数学的应用范围空前广泛，几乎涉及自然科学和社会科学的各个领域，而数学建模正是数学走向应用的必经之路。数学建模本质上就是从实际问题中提炼数学模型，并对其求解、检验，再用它解释和回答原问题的整个过程。显而易见，数学建模的教学和实践打破了传统教学自成体系、自我封闭的局面，为数学和外部世界的联系打开了一条通道，是能力培养和素质教育的一种有效方式。编写本书的目的就是要为大专院校的师生和科技工作者提供一本深入浅出的教材和参考书。

本书是作者在多年数学建模教学和实践活动的基础上，参考国内外有关资料编写而成的。全书共分七章：第一章简要介绍数学建模的一些基本概念、数学建模与素质教育等问题；第二章介绍数学建模的基本步骤和基本方法；第三章至第七章是根据数学建模所运用的数学知识来划分的，每一章都围绕如何应用某一方面的数学知识而编写。本书编写的重点是通过大量案例讨论数学建模方法，在案例选择时，主要考虑案例的教学目的性、拟真性、趣味性和代表性。每章后面都附有一定数量的习题，以帮助读者进一步理解内容，掌握建立模型的方法和技巧。

作者在从事数学建模教学活动和本书的编写过程中，得到了北京理工大学叶其孝教授、中科院应用数学所赖炎连教授、郑州大

学林诒勋教授、清华大学姜启源教授、信息工程大学杨士杰教授以及信息工程大学理学院有关领导和专家的关心、支持与帮助，在此深表谢意。

数学建模作为一门新课程，其内容和方法均不很成熟，特别是在案例取舍上不易掌握，编写难度很大，加之作者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

作者

2003 年 4 月

目　录

第一章　引　言

随着数学科学和计算机技术在各个领域的不断深入，数学模型发挥着强大的作用。从事科学技术工作的人们，深感数学模型的重要性。在许多领域已有许多应用很成功的数学模型的典型案例。如在测绘技术中，重力测量中的微分方程模型，最小二乘、大地网优化设计的线性规划模型，图像配准、图像边缘提取中的动态规划模型，地图制图中的数学规划模型、回归模型等等。在计算机制图技术中，数学模型的建立是至关重要的。可以这样说，如果没有数学方法的引入，不建立数学模型，计算机制图的实现实际上是不可能的。因此，什么是数学模型，怎样建立数学模型，是广大科技工作者所关心的问题。

第一节　数学模型与数学建模

一、数学模型

数学模型(mathematical model)就是要用数学的语言、方法去近似地刻画实际，是由数字、字母或其他数学符号组成的，描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法。

数学模型可按不同的方式分类，通常有以下几种。

1. 按照模型的应用领域(或所属学科)，可分为人口模型、生物模型、生态模型、交通模型、环境模型、作战模型等等。范畴更大

一些则形成许多边缘学科如生物数学、医学数学、地质数学、经济数学、数学社会学等。

2. 按照建立模型的数学方法(或所属数学分支),可分为初等模型、微分方程模型、网络模型、运筹模型、随机模型等。

3. 按照模型的表现特性,有以下几种分法。

(1) 静态模型和动态模型:取决于是否考虑由时间因素引起的变化。

(2) 解析模型和数值模型:取决于是用数学理论和定律去推导和演绎数学模型的解,还是用数值法求解。

(3) 离散模型和连续模型:取决于变量是离散的还是连续的。

(4) 确定型模型和随机性模型:取决于变量是确定的还是随机的。

4. 按照建模目的,可分为描述模型、分析模型、预测模型、决策模型、控制模型等。

5. 按照对模型结构的了解程度,有所谓白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。白箱是指所涉及问题的机理相当清楚;黑箱是指机理很不清楚的情形;而灰箱则是介于两者之间,对研究所涉及领域的机理尚不十分清楚。

二、数学建模

数学建模(mathematical modeling)就是通过建立数学模型来解决各种实际问题的方法,也就是通过对实际问题的抽象、简化,确定变量和参数,并应用某些"规律"建立起变量、参数间的确定的数学问题(也可称为一个数学模型),求解该数学问题,解释、验证所得到的解,从而确定能否用于解决实际问题的多次循环,不断深化的过程。它的最重要的特点在于它是接受实践的检验,多次修改模型,渐趋完善的过程。

数学建模没有固定的格式和标准,也没有明确的方法,但通常

由明确问题、合理假设、模型构成、模型求解、模型解的分析和检验等几个基本步骤(详情由第二章第一节讨论)组成。

一个理想的数学模型,它应尽可能满足下面两个条件。

1. 模型的可靠性　即指模型在允许的误差范围内,能正确反映所考虑系统的有关特性的内在联系,反映客观实际。

2. 模型的可解性　即指该模型易于数学处理和计算。

一个实际问题往往是很复杂的,影响它的因素总是很多,要解决实际问题,就要将实际问题经过抽象、简化、假设,确定变量与参数,建立适当层次上的数学模型,并求其解,即要把建模对象所涉及的次要因素忽略掉,不然所得模型会因为结构太复杂而失去可解性;也不能把与实质相关的因素忽略掉,不然所得模型会因为不能足够正确反映实际情况而失去可靠性。可靠性与可解性同时最佳是很罕见的,一般我们总是在可解性的前提下力争有满意的可靠性。

第二节　数学建模与能力培养

可以这样说,有了数学并要用数学去解决实际问题,就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画该实际问题,而这种刻画的数学表述是一个数学模型,这个过程就是数学建模的过程。

数学建模并不是新东西(尽管过去很长时间这一术语用得很少),如欧几里得几何、牛顿的万有引力公式、欧拉解决七桥问题的图等等都是很好的数学模型。

数学建模之所以在很长一段时间内没有被广泛应用,是因为完成整个数学建模过程往往涉及大量的计算,这需要计算机的支撑;在高性能电子计算机出现之前,正是由于缺乏这一技术手段而在一定程度上限制了数学建模这一强有力方法的应用和发展。反过来,数学建模的发展及数学的广泛应用又推动了计算机在高速、智能、小型、价廉这四个方面的迅速发展,使计算机能更广泛地应

用于各行各业。

另外,数学建模也是为了适应人才能力与素质的培养及高等学校数学教育改革之需要。多年来的实践使我们认识到数学建模教学活动实际上是一种不打乱现行正常教学秩序的、规模相当大的大学数学教育改革的试验。

数学建模课程对素质和能力的培养主要表现在以下几个方面。

1. 培养“翻译”的能力　对实际问题进行充分分析后,经过一定抽象和简化,用数学语言表达出来形成数学模型。对应用数学的方法进行推演或计算结果,能用一般人可以理解的语言“翻译”(表达)出来。

2. 用数学方法和思想进行综合应用和分析的能力　通过数学建模,能充分理解数学分析的重要性,理解合理的抽象和简化,在数学建模过程中灵活地、创造性地使用数学工具。

3. 想像力的培养　对于不少完全不同的实际问题,在一定的简化层次下,它们的数学模型是相同的或相似的,这正是数学应用广泛性的表现。通过勤学苦练,熟能生巧而逐步达到触类旁通的境界。

4. 洞察力的培养　在实际建模过程中,面对各种各样的问题、多个因素等复杂局面,能一眼就抓住(或部分抓住)要点(这里往往表现出你的洞察力),使问题明确化。洞察力的形成需要多练、多思考。

5. 熟练使用技术手段　熟练使用计算机及相应的数学软件包是必不可少的技术手段。另外,查阅各种资料,学会使用资料也是很重要的方面。

6. 培养交流与表达能力、团结合作的精神　数学建模往往是群体的合作活动,需要各成员间相互理解、支持,相互交流,集思广益。提倡讨论、争辩,勇于提出自己的观点和见解,培养互相交流、

互相学习、及时妥协的精神。

7. 科技论文写作能力　除了口头表达自己的观点和见解外，需要时用书面形式，根据读者不同的知识结构，写出能使他们顺利理解你所使用的方法及其所得结果的报告或论文。

第三节　数学建模竞赛

学习数学建模最好的方法是通过数学建模的实践来学习数学建模。首先，应清楚“数学建模”完全不同于其他数学分支，学习该课程的困难不在于学习和理解所用的数学，而是明白在何处用它，怎样用。其次，对数学建模有比较深刻的了解，却未必能熟练掌握建模技巧。再次，掌握一定的数学方法和数学知识是必要的，但具有了数学知识和方法却未必具有数学建模的能力。只有亲身参与了真正的数学建模活动，才会发觉自己处于一种良性循环之中：参与越多越感到数学建模的重要性和自身数学知识的不足，更激起学习数学的积极性；数学本领提高了，参与数学建模就更得心应手，解决更多的实际问题，如此循环不息。

为了推动数学建模教学活动，组织竞赛是一种行之有效的方法。

数学建模竞赛(mathematical contest in modeling, MCM)源于美国，始于 1985 年。美国数学建模竞赛是随着科学技术的发展，应用数学越来越得到人们的重视而组织的应用数学的竞赛。

在我国，最初由上海、西安等地组织举办大学生数学建模竞赛。1992 年 11 月 27 日到 29 日，由中国工业与应用数学学会举办了 1992 年全国大学生数学建模联赛，全国有 74 所高校参加。1994 年起由国家教委和中国工业与应用数学学会共同主持的全国大学生数学建模竞赛(China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling, CUMCM)，目前已成为教育部计划实施的大学生四大竞赛之一，每年一次，到 2002 年全国已有 572 所高校的 4 448 个队参

加了比赛。

数学建模竞赛的宗旨是鼓励大学师生对范围不固定的各种实际问题予以阐明、分析并提出解法，鼓励师生积极参与并强调实现完整的模型构造的过程。

每个参赛队有3名队员，比赛时间为三天(72个小时)。每次只有两个题目，每队只须任选一题，题目通常由实际问题演变而来，没有固定范围。

参赛者可以使用包括计算机、软件包、教科书、杂志资料等资源，在三天时间内参赛队写出论文。论文内容包括对问题的阐明和分析；假设及假设说明；对为什么要用所述模型的分析；模型的设计；怎样测试模型的讨论；模型优缺点的讨论，包括误差的讨论；放在论文前的论文摘要等。

第四节　数学建模示例

一、示例之一——椅子问题

(一) 问题

问题源于日常生活中，把四条腿椅子放在不平地面，通常只有三条腿着地，放不稳，但只须稍挪动几下，就可以使四条腿同时着地、放稳。现在的问题是要证实这种现象。

下面我们用数学方法来证实，为此，需要对椅子和地面作一些必要的假设。

(二) 模型假设

1. 对椅子　假设椅子的四条腿一样长，椅子腿与地面接触处视为一个点，四条腿的连线呈正方形。

2. 对地面　地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断，即地面为连续曲面。

3. 对椅子与地面相对关系　对于椅子腿的间距和椅子腿的长度而言，地面是相对平坦的，因而能使椅子在任何位置至少有三条腿同时着地。

(三) 模型建立

建立模型的中心问题是用数学语言把四条椅子腿同时着地的条件和结论表示出来。

椅子腿的俯视图如图 1 - 1 所示，四条腿分别在 A、B、C、D 处，中心为 O。用变量表示椅子的位置，其连线呈正方形，中心对称，绕中心旋转正好代表椅子位置的改变，故用旋转角 θ 这一变量表示位置。

图 1 - 1 中，原来位置为 $ABCD$，转 θ 角后位置为 $A'B'C'D'$。

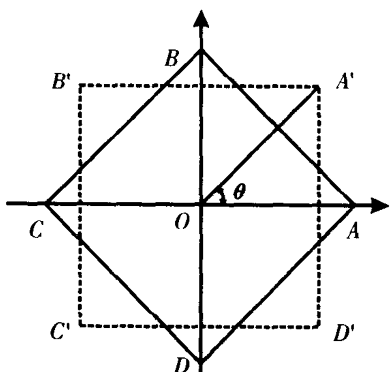


图 1 - 1　椅子问题示意图

椅子腿着地条件，如果用某个变量表示椅子腿与地面的垂直距离，距离为 0，即为着地，位置不同，这个距离也不同，故它为位置变量 θ 的函数。

椅子有四个腿，故有四个距离，由于中心对称，只要两个就行

了，设A、C两椅子腿与地面的距离之和为$f(\theta)$，B、D之和为$g(\theta)$。因而有：$f(\theta)\geqslant 0$，$g(\theta)\geqslant 0$，且由假设2可知$f(\theta)$、$g(\theta)$为θ的连续函数。

由假设3可知，对任一θ，$f(\theta)$和$g(\theta)$至少有一个为零。

不妨假设：$\theta=0$时，$g(0)=0$，$f(0)>0$。这样四条腿同时着地可表示为数学命题：已知$f(\theta)$、$g(\theta)$为非负连续函数，对任一θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，且$g(0)=0$，$f(0)>0$，要证：存在$\theta_0$，使$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

这样，通过引入变量θ及函数$f(\theta)$、$g(\theta)$，把模型假设条件和椅子四条腿同时着地结论用数学语言表述出来，从而建立了这一实际问题的数学模型。

（四）模型求解

模型求解即要证明上述命题。

将椅子旋转$\frac{\pi}{2}$，则对角线AC与BD互换，由$g(0)=0$、$f(0)>0$可知$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$。

令$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则

$$h(0)>0,h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$$

由于$f(\theta)$、$g(\theta)$的连续性可知$h(\theta)$是连续的，由连续函数的性质（介值定理）知：存在$\theta_0\left(0<\theta_0<\frac{\pi}{2}\right)$，使$h(\theta_0)=0$，即$f(\theta_0)=g(\theta_0)$，又由于对任一$\theta$，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，故有$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

由于此实际问题比较简单、直观，故其模型解释和验证可省略。这个模型的巧妙之处在于用旋转角θ表示椅子的位置，用θ的两个函数表示四条腿与地面的距离，至于利用正方形中心对称及

旋转$\frac{\pi}{2}$是非本质的。

二、示例之二——七桥问题

问题:18世纪的德国有个哥尼斯堡城,在流贯全城的普雷尔河两岸和河中两个岛之间架设了七座桥,把河的两岸和两岛连接起来(图1-2),当时流行着一个难题:能否有这样一种走法,它通过每座桥一次且仅一次。

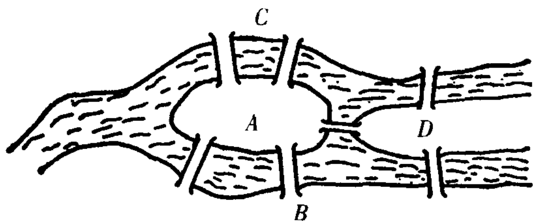


图1-2　七桥问题示意图

欧拉(Euler)在1736年发表的第一篇有关图论的论文中给予解答。

欧拉在考虑这个问题时,认为两岸和岛的大小、形状以及桥的长短曲直都无关紧要,重要的是每块陆地间有几座桥。将问题进行数学抽象,把两岸和两岛都看做顶点,将连接这些顶点的桥当作边,于是得到一线图(图1-3),其中四个顶点分别表示四块陆地A、B、C、D,边表示桥,则哥尼斯堡七桥问题就成为线图中是否存在通过每一边一次且仅一次的路(即一笔画)问题。

欧拉指出,一个图中存在一笔画的充要条件是同时满足:

1. 从图中任意一点出发,通过某些边一定能到其他任意一点,即线图是连通的。

2. 与图中每一顶点(可能有两点例外)相连的边必须是偶