中小学教师参考丛书

高中数学重点与难点

光明日报出版社

中小学教师参考丛[redacted]

高中数学重点与难点

主编　程连林　赵学恒

编者　（以姓氏笔划为序）

刘兴益　朱维云　朱绪鹏

杜志恒　何芝轩　何佩韵

林　青　张　驰　金思忠

金嘉琨　胡隆汉　谢璧芳

[redacted]

光明日报出版社

高中数学重点与难点

主编　翟连林　赵学恒

光明日报出版社发行
（北京永安路106号）
新华书店北京发行所经销
保定市第六中学印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32　开本　　印张16.625　373千字
1991年2月第1版　　　　1991年2月第一次印刷
1—16850册　　　　定价：6.50元
统一书号：ISBN7—80014—975—7/G·353

丛书出版说明

实现我国四个现代化的重要因素是人的素质，提高人的素质的关键是教育　提高教育质量的关键是教师。为了帮助教师备好课，提高教学质量，我们组织全国有丰富教学经验的特级教师、高级教师和教研员，编写出版了这套"中小学教师参考丛书"。

这套丛书的主要内容是：交流教学经验、教学资料和教学科研成果。

由于我们的水平有限，欢迎广大教师提出宝贵意见。

"中小学教师参考丛书"编委会

1991．2．

“中小学教师参考丛书”编辑委员会

前　　言

突出重点，突破难点是提高教学质量的关键。为了帮助高中教师，特别是青年教师备好课，提供一份实用的教学参考资料，我们组织全国八省、市有丰富教学经验的高级教师和特级教师，总结他们多年讲授高中数学的教学经验编成本书。

本书紧密配合教学进度，与教学同步，对高中各章教材的重点和难点进行了较为详尽的分析，各章都给出了一定数量的典型例题并进行了解题思路的引导和评注。各章末配有习题精荟（可作60—100分钟单元测试题）。全书还配备了六套期末测试题和三套综合测试题，书末附有习题（包括期末和综合测试题）答案或提示。

本书编者是（排名不分先后）：

雷宗焕（江苏南京市一中）、金思忠（浙江杭州市人民中学）、朱绪鹏（湖南常德市一中）、胡隆汉（湖北武汉市四十七中）、薛召庚（四川南充市六中）、张　驰（湖北十堰市教研室）、朱维云（江苏镇江市一中）、林　青（上海市鲁迅中学）、杜志恒（新疆石河子市一中）、何佩韵（浙江杭州市延安中学）、何芝轩（四川南充中学）、谢壁芳（河南潢川一中）、刘兴益（湖北十堰市教研室）、金嘉琨（上海市鲁迅中学）、傅衣校（湖北十堰市教研室）

由于我们的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正。

翟连林　赵学恒

1990年9月

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

重点难点

本章是高中代数的起始章，它是在初中所学直角坐标系以及函数有关概念的基础上，通过引入集合，从映射的角度对函数给了新的定义，进而研究几种重要的基本初等函数，是初中阶段函数学习的延续。本章四节分三个单元，第一、二节为一个单元，主要介绍集合及有关概念，并用集合、对应的观点来定义映射，再用映射对函数进行再认识（现代定义）．第三节为第二单元，重点研究幂函数，并以幂函数为例介绍函数的单调性、奇偶性等函数的重要通性，再运用映射和函数的知识介绍反函数的概念，为指数函数和对数函数的研究作好准备．第四节为第三单元，着重研究互为反函数的指数函数和对数函数，并介绍简单的指数方程和对数方程的解法．本章概念多、符号多（特别是第一单元）、内容丰富，是代数学的重要组成部分和重要基础，本章所学知识和方法，涉及了数学（特别是近代数学）的许多领域．本章重点难点也多，其第一单元有与集合有关的各个基本概念及相互关系、映射和函数的概念及相互关系；第二单元有幂函数的概念、性质和图象、函数的两种重要通性——单调性和奇偶性、一一映射和反函数；第三单元有指数函数和对数函数的图象和性质、简单的指数方程和对数方程的解法．

1．集合是数学研究的基本对象，与集合有关的概念既多又抽象，要切实弄懂各个基本概念，掌握它们的本质及相互间的联系和区别，可采用以下方法：

（1）由感性积累逐步形成概念．为了帮助人们理解众多的抽象概念，在学习中，可先列举大量的实例，待人们有了一定的感性积累后，再进行概括抽象，逐渐形成概念．如集合是一个不定义的原始概念，教材一开始先列举了五个集合的例子，在这个基础上对集合概念的含义进行描述，接着再通过例子说明集合具有确定性、互异性和无序性．教材后文中给出子集、交集、并集、补集等概念的定义，也都是由实例引入的．

（2）利用图形使抽象的概念直观化．与集合有关的概念繁多，教材中虽然给出了这些概念的定义，同时也用集合的一些符号来表达这些概念的含义，但这些文字和符号都很抽象，人们不难理解和记忆，如果我们结合图形（文氏图）来讲解这些概念，化抽象为直观会取得较好的效果．

直观的图形不仅在理解抽象概念时有十分重要的作用，而且在解决某些较复杂的问题时，也会起事半功倍之效．

如，已知全集$I=\{1,3,5,7,9\}$，$A\cap\overline{B}=\{1\}$，$\overline{A\cup\overline{B}}=\{5\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{9\}$，求$\overline{A\cup B}$．

我们只要画出集合$A\cap\overline{B}$、$\overline{A\cup\overline{B}}$、$\overline{A}\cap\overline{B}$、$\overline{A\cup\overline{B}}$的文氏图（如图1—1），本题的答案就不难求得．

同样，在学习“对应”、“映射”、“满射”、“单射”“一一映射”等概念时，也可利用图形使抽象概念直观化．使人们容易理解这些概念的含义以及彼此间的联系和区别．如P.4表所示：

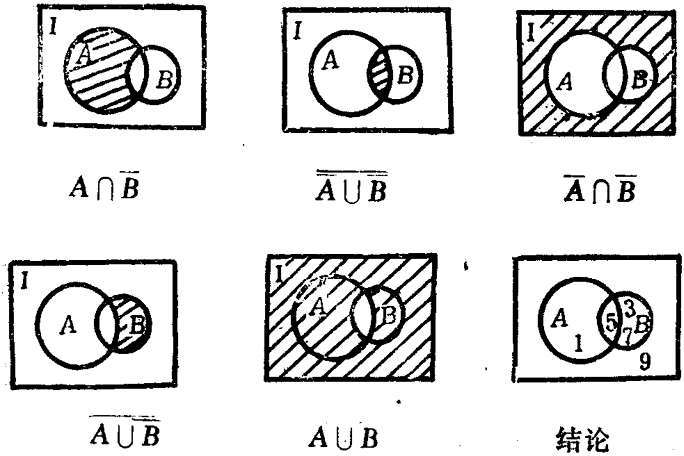
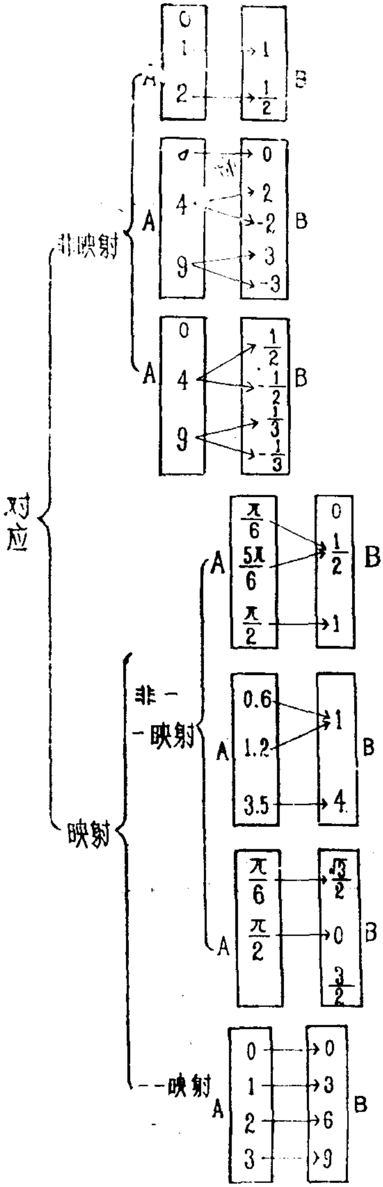


图1—1

（3）利用分析对比揭示概念的联系与区别．本单元的基本概念虽多，但只要我们弄清了每一个概念的含义，若又能揭示出这些概念间的联系与区别，便能使我们形成一个完整的知识系统．同时还能使我们对这些概念的认识达到一定的深度．如有关集合的众多关系，按其性质可分成两类，即元素和集合以及集合和集合的关系，这些关系可由下表来反映．

- 相互关系
  - 元素和集合的关系
    - 元素a属于集合A，记作$a\in A$
    - 元素a不属集合A，记作$a\notin A$
  - 集合间的关系
    - 子集
      - 包含，　记作“$\subseteq$”
      - 真包含，记作“$\subset$”
      - 相等，　记作“$=$”
    - 交集
    - 并集
    - 全集、补集



$f: x \to \frac{1}{x}$

A中有元素在B中无象.

f：x对应于x的平方根

A中有元素在B中的象不唯一

f：x对应于x倒数的平方根

A中有元素在B中无象且有元素在B中的象不唯一.

f：$x \to \sin x$

A中有不同元素在B中有相同的象且B中有元素在A中无原象(非单射，亦非满射).

f：$x \to [x+0.5]$

B中的元素在A中都有原象，且A中有不同元素在B中有相同的象（满射非单射）.

f：$x \to \cos x$

A中的不同元素在B中的象不同，且B中有元素在A中无原象（单射非满射）.

f：$x \to 3x$

A中的不同元素在B中的象不同且B中的元素在A中都有原象（是单射也是满射）.

又如："对应"、"映射""一一映射"和"函数"等概念间的关系可由下表来说明：

设A、B是两个非空集合，f是从集合A到集合B的对应法则.

对应f＋满足条件：【A中的元素在B中都有象，A中的元素在B中的象唯一】＝

映射 {＋满足条件：＋满足条件：【A中的元素在B中的象也不同】＝单射＋满足条件：

【B中每一个元素在A中都有原象（满射）】＝一一映射；【A、B是非空数集】＝函数.

2．函数这一概念在初中代数中已经出现，初中代数教材给出了函数的定义，函数的三种表示方法，并介绍了正比例函数、反比例函数、一次函数和二次函数四种初等函数．本单元在这基础上给出了函数的定义域和值域这两个概念的定义，并指出可以用集合和映射的观点来认识函数，它实际上就是从非空数集A到非空数集B的映射，继而又指出函数具有三要素即定义域、值域和对应法则.

应该着重指出的是：用解析法来表示一个函数时，除了要给出确定函数的对应法则外，还要给出函数的定义域．并约定如果以解析式中自变量的允许取值范围为函数的定义域时，则函数定义域范围的说明可省略．如初中代数第四册中规定形如$y=kx+b(k\neq0)$的函数称作一次函数．其完整的表达应该是$y=kx+b(x\in R,\ k\neq0)$称作一次函数．显然，几个函数，如果其解析式相同而定义域不同，我们还是认为它们是不同的函数．如$y=2x+1(x\in R)$，$y=2x+1(x\in Z)$，

$y=2x+1(x\geqslant3)$，这是三个不同的函数．这一点从它们的图象可以清楚地看出．

又如，函数$y=2\left[\frac{b-(\sqrt{b-x})^2+a+(\sqrt{x-a})^2}{2}\right]+1$与函数$y=2x+1$ $x\in[a,b]$，它们的解析式表面上看来似乎不同，其实这两个函数的定义域相同，对应法则也相同，我们认为这是两个相同的函数，就是说只有当定义域相同，对应法则也相同时，两个函数才是同一函数．

求函数的定义域应遵循的原则大致有．

（1）不能使函数值超出实数集的范围，或不存在，或不确定．如偶次根式的被开方数必须非负；对数的真数应为正数；分式的分母不能为零；指数为零的幂的底数不能为零等等．

（2）奇函数或偶函数的定义域是x轴上关于原点$(0,0)$为中心对称的区间（注意原点不一定在定义域内）；一个函数的反函数的定义域是原函数的值域．

（3）在有限个实数上定义的函数的定义域就是这有限个实数的集合；由有限个基本初等函数经过四则运算而形成的函数的定义域是各基本初等函数定义域的交集（注意考虑新出现的分母不能为零等情况）；适合函数$y=f[g(x)]$的定义域应使得$u=g(x)$的值域不越出$y=f(u)$的定义域．

（4）对于实际应用问题或几何问题中的函数定义域必须适合实际意义或几何意义．

虽然由函数的定义域、对应法则决定了函数的值域，但是函数的值域也是一个十分重要的概念．我们在求一个函数的反函数时，就要研究原函数的值域．

如，求函数$y=x+2$，$x\in[-1,1]$的反函数．

如果把$y=x+2$，$x\in[-1,1]$的反函数说成是$y=x-2$

是错误的，$y=x+2$，$x\in[-1,1]$的值域就是其反函数的定义域. 为此我们必须先求出原函数的值域 $[1,3]$，然后得出$y=x+2$，$x\in[-1,1]$的反函数是$y=x-2$，$x\in[1,3]$的结论. 此外在教材的例题和习题中有许多由基本初等函数复合而成的初等函数，在研究这些复合函数时，也需要研究初等函数的值域.

求函数的值域是高中代数学习中的难点之一. 其方法较多，如利用观察法和图象法求，或利用常见初等函数的值域和不等式性质求，也可利用函数的单调性、极值性、反函数的定义域以及复合函数关系来求，还可利用配方法、判别式法来求等等.

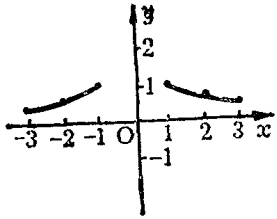
3. 幂函数$y=x^n(n\in Q)$是一种重要的初等函数，教材分$n=0$，$n>0$，$n<0$三种情况，通过几个简单的实例用描点法画出幂函数的图象，再用直观法找出它们的共性，从而概括出幂函数的几个重要性质. 这种方法的特点是直观、易懂. 但这种方法也有它的不足，人们掌握了幂函数的性质后，去研究较复杂的幂函数的图象仍有困难，因为幂函数的图象是一支或二支两端可以无限延伸的曲线，而列表只能列出曲线上有限个点的坐标，因此作出来的曲线也只能是幂函数图象上很小的一段，如果选择的这一段曲线的位置不当，所画的图象就不能反映这个幂函数的本质特征，这是初学者易犯的一种错误.

如，作出幂函数$y=x^{-\frac{2}{3}}$的图象.

列表：

x	…	-3	-2	-1		1	2	3	…
y	…	0.48	0.63	1		1	0.63	0.48	…

作图：如图1—2，此图就不能反映该幂函数的本质特征.



一般地，作出幂函数的大致图象有以下几个步骤：

（1）确定函数的定义域.

（2）研究函数的奇偶性以确定函数图象的对称性.

（3）判定函数的增减性以确定曲线的伸展方向.

（4）确定曲线的弯曲方向（即曲线的凹凸）.

在某一开区间上，过曲线上任意一点的切线都在曲线的下方，则称该曲线是凹的．在某一开区间上，过曲线上任意一点的切线都在曲线的上方，则称该曲线是凸的.

函数$y=x^n$($n\in Q$，$n>0$)，在第一象限中图象的弯曲方向有以下规律：

（1）$n=1$时，图象为过原点和(1，1)点的直线。

（2）$n>1$时，图象向下弯曲（曲线是凹的）。

（3）$0<n<1$时,图象向上弯曲（曲线是凸的）。$n<0$时，幂函数在第一象限中图象的弯曲方向相同都是向下弯曲（凹的）.

其原理要涉及高等数学的知识，因此这里只要求掌握其规律.

如画出下列幂函数的大致图象：

①$y=x^{\frac{4}{3}}$；　②$y=x^{\frac{3}{4}}$；　③$y=x^{\frac{3}{5}}$；

④$y=x^{-\frac{1}{3}}$；　⑤$y=x^{-\frac{1}{4}}$．请见表1—1。

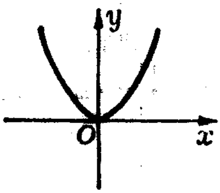
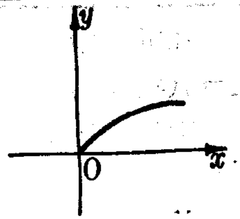
4．函数的单调性和奇偶性是函数的两个十分重要的性质．

（1）函数的单调性是反映函数在其定义域子集上函数值大小变化的一种性质．教材中给了函数在 $[a,b]$ 上是增函数或减函数的定义．例题中也有较简单的函数的单调性证明，这里除要求我们能够利用基本初等函数的图象和性质来确定函数的单调区间外，再介绍一些复合函数单调性的规律．

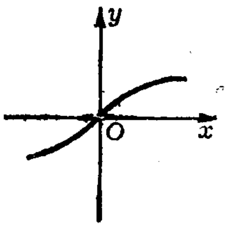
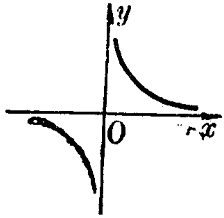
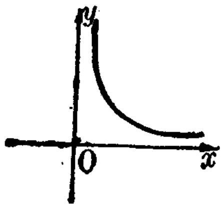
若定义在 $[a,b]$ 上的函数 $t=g(x)$ 是单调函数，$y=f(x)$ 在 $g(x)$ 的值域 $[a',b']$ 上有定义且单调，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $[a,b]$ 上的单调性有如下规律：

若 $t=g(x)$ 和 $y=f(t)$ 同为增函数或减函数，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $[a,b]$ 上递增．若 $t=g(x)$ 和 $y=f(t)$ 中一个增函数，另一个是减函数．那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $[a,b]$ 上是减函数．

表1—1

函数解析式	定义域	奇偶性	在第一象限中函数单调性	在第一象限中曲线弯曲方向	大致图形
$y=x^{\frac{4}{3}}$	$x\in R$ 图象为一条曲线	偶函数，图象关于 y 轴对称	$n=\frac{4}{3}>0$，增函数，图象在第一象限中向上伸展	$n=\frac{4}{3}>1$ 凹（向下弯曲）	
$y=x^{\frac{3}{4}}$	$x\geqslant 0$ 图象为原点出发的一条曲线	非奇非偶函数	$n=\frac{3}{4}>0$，增函数，图象在第一象限中向上伸展	$n=\frac{3}{4}$ $(0<n<1)$，凸（向上弯曲）	

续表

函数解析式	定义域	奇偶性	在第一象限中函数单调性	在第一象限中曲线弯曲方向	大致图形
$y=x^{\frac{3}{5}}$	$x\in R$ 图象为一条曲线	奇函数，图象关于原点成中心对称。	$n=\frac{3}{5}>0$，增函数，图象在第一象限中向上伸展	$n=\frac{3}{5}$ $(0<n<1)$ 凸向上弯曲)	
$y=x^{-\frac{1}{3}}$	$x\neq 0$ 图象为二条曲线	奇函数，图象关于原点成中心对称	$n=-\frac{1}{3}<0$，减函数，图象在第一象限中向下伸展	$n=-\frac{1}{3}<0$ 凹	
$y=x^{-\frac{1}{4}}$	$x>0$ 图象为一条曲线	非奇非偶函数	$n=-\frac{1}{4}<0$，减函数，图象在第一象限中向下伸展	$n=-\frac{1}{4}<0$ 凹	

证明：设x_1，$x_2\in[a,b]$，且$x_1<x_2$，$t_1=g(x_1)$，$t_2=g(x_2)$，t_1、$t_2\in[a',b']$.

①若$g(x)$在$[a,b]$上是增函数，$f(t)$在$[a',b']$上也是增函数.

∵ $x_1<x_2$，则$g(x_1)<g(x_2)$，即$t_1<t_2$.