



中等职业教育国家规划教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

森林计测

(林业专业)

主 编 魏占才



高等教育出版社

中等职业教育国家规划教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

森 林 计 测

(林业专业)

主 编 魏占才
副 主 编 苏杰南
责任主审 王逢瑚
审 稿 郎奎建 范文义



高等教育出版社

内容简介

本书是中等职业教育国家规划教材,是根据教育部2001年颁布的中等职业学校森林计测教学基本要求编写的,并参照了有关行业的职业技能鉴定规范,以及中级技术工人等级考核标准。

全书共分11章,从统计分析入手,阐述了森林计测使用的工具与方法,单木测定、林分测算、森林调查技术等方面的理论和实践知识,并增加了GPS等新知识。本书以森林计测技术为主线,对数理统计、测量学、测树学三部分内容进行了有机整合,综合性强。书后的实训与实习紧紧围绕相关技能点,与理论知识既相互独立又相互联系,要求明确,步骤清楚,可操作性强。

本书是中等职业学校林业类专业及专门化教材,也可作为林业企业的职业培训教材和林业职工的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

森林计测/魏占才主编. —北京:高等教育出版社,
2002(2004重印)
中职林业专业用
ISBN 7-04-010395-8

I. 森... II. 魏... III. 森林—计测学—专业学校—教材 IV. S758

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第030954号

森林计测
魏占才 主编

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 北京市鑫霸印务有限公司

开 本 787×1092 1/16
印 张 23
字 数 560 000

版 次 2002年6月第1版
印 次 2004年4月第3次印刷
定 价 27.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

中等职业教育国家规划教材出版说明

为了贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》精神,落实《面向 21 世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划,根据教育部关于《中等职业教育国家规划教材申报、立项及管理意见》(教职成[2001]1 号)的精神,我们组织力量对实现中等职业教育培养目标和保证基本教学规格起保障作用的德育课程、文化基础课程、专业技术基础课程和 80 个重点建设专业主干课程的教材进行了规划和编写,从 2001 年秋季开学起,国家规划教材将陆续提供给各类中等职业学校选用。

国家规划教材是根据教育部最新颁布的德育课程、文化基础课程、专业技术基础课程和 80 个重点建设专业主干课程的教学大纲(课程教学基本要求)编写,并经全国中等职业教育教材审定委员会审定。新教材全面贯彻素质教育思想,从社会发展对高素质劳动者和中初级专门人才需要的实际出发,注重对学生的创新精神和实践能力的培养。新教材在理论体系、组织结构和阐述方法等方面均作了一些新的尝试。新教材实行一纲多本,努力为教材选用提供比较和选择,满足不同学制、不同专业和不同办学条件的教学需要。

希望各地、各部门积极推广和选用国家规划教材,并在使用过程中,注意总结经验,及时提出修改意见和建议,使之不断完善和提高。

教育部职业教育与成人教育司

二〇〇一年十月

前言

本教材是根据教育部 2001 年颁布的中等职业学校林业专业教学计划和森林计测教学基本要求,并结合我国林业生产和教学实际编写的。适用于全国中等职业学校林业专业,也可作为林业生产单位职工培训和自学参考书。

近些年来,为了适应学校教学改革的要求,各个学校课程设置综合化的比例不断加大,对于教材也有了新的要求,但目前能适应综合课的教材还很少。本教材的编写力图适应教学改革的需要,满足林业专业课程设置综合化的要求。其内容包括数理统计、测量学、测树学等三个教学单元。

1. 全书共分两大部分,其一是理论教学部分,其二是实验实训部分。两部分内容相互独立又相互联系,构造了既有理论又有实践的新模式的教材。

2. 作为综合课程教材,《森林计测》删减了过深部分以及重复部分的教学内容,同时增加了一些新知识,如 GPS 的应用、航空遥感的基本知识等,使教学内容连贯,便于学生掌握森林计测技术,以适应林业专业各岗位群的需要和岗位变化的要求。

3. 本教材对一些章进行了调整。全书三个教学单元合并为十一章,如将测树教学单元的伐倒木材积测定、立木材积测定及生长量测定合并为一章,称单木测定等。

4. 本教材对一些节进行了调整。如将所有描述树干形状的内容合并为一节,将测树工具合并为一节等,便于学生得到具体的概念。

5. 本教材针对性强,教学内容上相互补充。如回归分析虽然在统计单元讲授,但融合的教学内容是一元材积表的编制。为适应生产的需要,将测树中所用数理统计的知识,作为统计学中的例题加以介绍。

6. 知识点的连接比以前密切,便于学生自学,同时把一些知识放在最需要的地方。如将地形图和 GPS 应用一章放在第 10 章、第 11 章之前。因为这两章最需要地形图及其分幅的知识。

7. 增加实践教学比例,根据职业教育的特点将实践教学的比例提高到 50% 以上。注意动手能力的培养,充分体现“以能力本位为中心”的职业教育特点。

8. 图文并茂、文随图走是本教材的又一特色。

本书由魏占才(黑龙江林业职业技术学院)任主编(编写绪论、第 7 章、第 10 章、第 11 章),苏杰南(广西林校)任副主编(编写第 8 章、第 10 章第四节),陈日东(广东林校)编写第 5 章、第 6 章、第 9 章,李建娥(河南林校)参加编写第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章。

本书由主编及有关人员编辑统稿,在送交全国中等职业教育教材审定委员会审定之前,特

邀请了曲增禄(齐齐哈尔林校,省级学术带头人)为主审,田立博(黑龙江林业职业技术学院)、汪纯海(黑龙江林业职业技术学院)为参审,他们对书稿进行了认真的审读。

本书在编写过程中,承蒙国家林业局人教司、国家林业局职业教育研究中心和林业职业教育教学指导委员会、高等教育出版社等单位的支持,特别是李葆珍、黄桂荣和苏惠民同志从本专业各主干课教材编写思路的拟定,到编写提纲的落实,都给予了具体的指导;黑龙江林业职业技术学院、广西林校、广东林校、河南林校的领导对教材编写组给予了大力支持,上述学校的有关教师和学生参加了本教材在微机上的文字录入、编辑排版和绘图工作,黑龙江林业职业技术学院崔凤石同志参加了本教材在微机上编辑排版和绘图工作,使教材编写工作顺利完成;在编写中引用、摘录和借鉴了有关文献、教材的材料和图表,在此一并向有关人员致以衷心的感谢!

本教材是以学制为3年、总学时为204学时的教学基本要求编写的。其中,理论教学课时为82学时,课堂实验26学时,机动12学时,教学实习84学时(3周)。教学基本要求中的机动学时用于补充与本课程相关的新知识、新技术、课堂实验,以及不可预见原因所耽误的课时。教学时可根据各学校的具体情况,如学时安排、专业特点和教学要求选择不同的教学内容。

尽管本教材在编写过程中,力求反映一些本学科发展的新内容、新方法。但限于编者水平,书中难免有错误和不妥之处,敬请使用本书者批评指正,不胜感谢。

编 者

2001年6月

目 录

绪 论	1
第 1 章 随机变量	4
第一节 随机变量与概率	4
第二节 随机变量的特征数	16
第三节 随机变量的数据整理	18
第四节 统计量及其分布	29
复习思考题	32
第 2 章 统计推断	35
第一节 总体平均数的估计	35
第二节 总体平均数的假设检验	44
复习思考题	53
第 3 章 试验设计与统计分析	55
第一节 试验设计概述	55
第二节 随机区组试验设计与统计分析	57
第三节 对比排列法试验设计与统计分析	72
第四节 正交试验设计与统计分析	75
复习思考题	80
第 4 章 回归分析	82
第一节 回归分析中的几个基本概念	82
第二节 一元线性回归	84
第三节 可化为直线的曲线回归	94
复习思考题	99
第 5 章 罗盘仪测量	101
第一节 距离测量	101
第二节 直线定向	105
第三节 罗盘仪的构造	108
第四节 罗盘仪测磁方位角	109
第五节 罗盘仪的检验与校正	110
第六节 罗盘仪测绘平面图	111
复习思考题	117
第 6 章 水准测量	118
第一节 高程测量	118

第二节	水准测量	120
第三节	水准测量的校核	129
复习思考题		134
第 7 章	单木测定	135
第一节	树干的形状	135
第二节	单株树木测定工具	142
第三节	树干材积的近似求积式	148
第四节	枝条、树皮及薪材材积的测定	154
第五节	树木生长量的测定	156
复习思考题		166
第 8 章	林分调查	167
第一节	林分调查因子的测定	167
第二节	标准地调查	180
第三节	林分蓄积量的测定	184
第四节	林分生长量测定	196
复习思考题		199
第 9 章	地形图与 GPS 在林业生产中的应用	200
第一节	地形图的分幅与编号	200
第二节	识别地形图的基本知识	203
第三节	地形图在林业生产的应用	214
第四节	面积计算	220
第五节	GPS 在林业上的应用	223
复习思考题		230
第 10 章	森林抽样调查方法	231
第一节	森林抽样调查概述	231
第二节	简单随机抽样和系统抽样	232
第三节	森林分层抽样	240
第四节	点抽样	247
复习思考题		256
第 11 章	遥感图像在森林调查中的应用	257
第一节	航空摄影的基本知识	257
第二节	航空相片的立体观测	261
第三节	航空相片的森林判读	263
第四节	卫星相片概述	279
复习思考题		282
实训与实习		283
I	实训与实习须知	283
II	实训	286

III 实习	321
附表	339
主要参考文献	355

绪 论

一、概述

测量工作在森林计测中格外重要，是森林计测最主要的工作，是了解、认识、建设林业最基础的工作。统计推断及回归分析是森林计测的理论基础。

对森林进行调查要从单木测定开始，它是调查林分数量的基础。林分调查是在揭示和描述林分调查因子的基础上，介绍林分蓄积量的测定方法等，并涉及林分结构的分析研究。在调查中不仅要查清森林资源数量，同时还要进行质量鉴定，因此还需要林木材种结构和材种出材量的测定的知识。

森林计测的目的和任务：一是为森林调查所要取得的有关木材数量和质量、林分结构和生长规律、质量鉴定、森林资源经济价值评价和森林资源动态及发展趋势提供分析理论、方法和技术；二是为林业各学科提供研究分析森林的测定理论、方法和技术，同时为发挥森林的多种效益、保持森林生态平衡、加强森林资源管理及合理利用等提供基础数据；三是为了林业可持续发展、保护森林环境和生物的多样性，在研究森林与环境的关系中，森林计测也是测定、分析群体动态的生物学依据。

二、我国森林计测概况

新中国成立以前，我国既无林业调查规划设计管理机构，又无调查设计队伍。从 1949 年起，我国的森林调查事业开始进入了一个崭新的时期。50 多年来，从中央到地方陆续建立了森林资源管理体系，基本查清了全国森林资源。在总结新中国成立以来我国森林调查的经验和教训的基础上，结合国内外森林调查的实践，于 1982 年将我国的森林调查科学地分为三类：

1. 全国森林资源清查 一般以省(市、区)、大林区为单位进行。为制定全国林业方针、政策，编制全国、各省(市、区)、大林区的各种林业计划、规划和预测趋势提供依据，简称一类调查。

2. 林业规划设计调查(森林经理调查) 以国有林业局、林场、县(旗)或其他部门所属林场为单位进行，以满足编制森林经营方案、总体设计和县(旗)级林业区划、规划、基地造林规划等的需要，简称二类调查。

3. 作业设计调查 林业基层单位为满足生产需要所进行的伐区设计、造林设计、抚育采伐设计等的调查，均属作业设计调查，其落实资源的单位是具体地块，简称三类调查。

1963 年林业部对 1953—1961 年主要用小班目测法调查数据逐级汇总，统计出全国森林资

源的数据,因调查统计不全面,时间跨度过大,资源数据偏小,可信度不高。

自1973年开始,已进行了三次全国森林资源清查。1973—1976年,我国进行了第一次全国森林资源清查,简称“四·五清查”。这次调查以县(局)为总体、以数理统计为基础、以成数点估计地类面积、以测树样地估计平均蓄积量的双重分层抽样方法,逐级统计出比较可靠的全国森林资源数据。

1977—1981年,在全国建立了27个以省(市、区)为总体的森林资源连续清查体系(不含上海、西藏、台湾),以专业队伍调查为主,共设固定样地14万个,其中有蓄积量的固定样地为5.78万个,采用小班目测、样地实测与双重分层抽样相结合的方法,这样既能把资源数字落实到小班和山头地块,又能保证林业经营单位总资源数据的准确程度,从而取得新的全国森林资源数据。

1984—1988年,在29个省(市、区)开展了全国森林资源连续清查的复查工作,通过设置25.5万余个调查样地,从中取得大量数据,经过计算机处理,获得全国森林资源清查成果,其方法科学,信息量大,数据可靠,达到了20世纪80年代的世界水平。

从1989—1993年开展第四个周期的全国森林资源连续清查的复查工作,每年安排1/5的省、市、区进行复查。通过调查得知,全国活立木蓄积为117.85亿 m^3 ,森林面积为13 370.35万 hm^2 ,森林蓄积量为101.37亿 m^3 ,森林覆盖率为13.90%。

1994—1998年我国进行第五次全国森林资源清查。通过调查得知,全国活立木蓄积为124.88亿 m^3 ,森林面积为15 894.09万 hm^2 ,森林蓄积量为112.67亿 m^3 ,森林覆盖率为16.55%。

为了加强森林资源管理和监督工作,及时掌握森林资源现状和消长变化情况,预测森林资源的发展趋势,从1990年起建立由国家森林资源监测、地方森林资源监测和资源信息通信与管理系统组成的全国森林资源监测体系,提供全国与各省(市、区)森林资源连续清查复查成果。在复查的间隔期间,采用数学模型预测的方法更新当年的森林资源数据,提供年度资源监测成果。随着技术手段的发展,将在监测系统中逐步引进遥感技术,不断提高资源监测的精度和效率,我国的森林调查工作正迅速地向着精度高、速度快、成本低、连续化和自动化的方向发展。

三、森林计测与其他学科的关系

森林计测与其他学科的关系是非常密切的,它依存于一系列的林业科学知识和生产实践,因此,本学科牵涉面广,与很多学科有直接或间接的联系。如在研究单株树木和林木的生长规律时,与树木学和森林经营学发生密切的关系;为了鉴定森林立地条件、评定森林在数量和质量方面的生长能力,又需要运用土壤学的知识,等等。

森林计测不仅是森林经理、森林经营、森林生态学的基础课程,也是整个林业的一门重要的专业基础课,任何林业工作者都需要不同程度地掌握一定的森林计测知识,才能更好地为林业建设服务。

四、《森林计测》的内容及学习要求

森林计测技术发展迅猛。航空遥感和卫星遥感图像的普遍采用,不仅解决了快速测定森林面积和分布的问题,而且进一步解决了林木材积的速测问题,已经成为森林计测不可缺少的部分。统计理论不断发展,森林抽样技术的应用,计算机、抽样调查、遥感技术相互配合,构成了新的森林计测体系,为森林计测工作开辟了新的领域。特别是通过“3S”集成(GPS——全球定位系统, GIS——地理信息系统, RS——遥感技术)建立对地观测系统,可以从整体上解决一切与地学相关的资源与环境问题,实现“定性、定位、定量”的统一。这些高新技术是支撑数字化林业的重要技术,是查清、查准、查明森林资源现状和资源动态变化的前提,也是森林计测工作发展的方向。

《森林计测》是一门内容广泛、技术性和政策性较强的学科,要求综合运用林业专业各方面的技术和技能,因此要求学生面向基层,深入实际,充分利用资源,经过科学的分析和综合研究,在实践中不断地摸清林业生产的客观规律,积极采用先进技术,努力提高森林计测工作水平。

《森林计测》是根据我国中等职业学校林业专业的要求及林业发展的特点编写的,共分为11章,即随机变量、统计推断、试验设计与统计分析、回归分析、罗盘仪测量、水准测量、单木测定、林分调查、地形图及GPS在林业生产中的应用、森林抽样调查方法、遥感图像在森林调查中的应用,以及实训与实习。

五、森林计测常用的符号和单位

主要调查因子	常用符号	单位名称	单位符号	精度要求
直径	D 或 d	厘米	cm	0.1
树高	H 或 h	米	m	0.1
长度	L 或 l	米	m	0.1
断面积	G 或 g	平方米	m^2	0.000 01
林分蓄积量	M 或 m	立方米	m^3	0.000 1
材积	V 或 v	立方米	m^3	0.000 1
形数	F 或 f	—	—	0.001
形率	Q 或 q	—	—	0.01

第1章 随机变量

本章提要

林业调查或试验的目的往往是通过局部观测或实验资料对全局作出科学的估计或推断。本章主要介绍与此有关的一些基本知识：随机变量的概率分布、随机变量的数据整理，以及几个重要的抽样分布。

第一节 随机变量与概率

一、随机现象与随机试验

（一）随机现象与随机试验

在自然界、日常生活和科学试验中有两类现象：一类现象是在一定条件下进行试验或观察时有确定的结果。例如在一个标准大气压下^①，纯水加热到 100℃ 必然沸腾；向上抛一枚石子必然下落等等，这类现象我们称为确定性现象。另一类现象是在一定的条件下进行试验和观察，其结果不能事先确定。例如，抛掷一枚硬币，是正面朝上还是背面朝上，这在抛掷之前是无法确定的；播一粒种子是发芽还是不发芽，这在播种前也是无法肯定的等等，这类现象我们称为随机现象。

随机现象广泛存在，例如在条件相同的几块土地上，种植同一品种的果树，即使管理措施相同，其单位面积产量有高有低；同龄纯林中的林木粗细不一，高矮各异；同一段距离多次量测的结果不完全相同等等，这些都是随机现象。

对随机现象进行观察和科学试验，叫随机试验。随机试验应具有以下特点：①在相同的条件下试验可以重复进行；②试验之前能够明确指出它的所有可能结果；③每次试验结果事先不能确定。

例如：掷一枚硬币，观察出现正面还是反面，这就是一个随机试验；又如从某片同龄纯林中抽一株树木测其胸径，这也是一个随机试验。为方便起见，随机试验简称为试验。

（二）随机现象的统计规律性

人们经过长期的社会实践逐步认识到，随机现象虽然就每次试验或观察结果来说，具有不

^① 一个标准大气压为 1.013Pa。

确定性,但在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性。例如,多次重复抛掷一枚硬币,正面朝上与背面朝上发生次数的比率总是近于一比一,而且抛掷的次数越多,越接近这个比率;若做相当数量的种子发芽试验,则发芽种子所占的比率,稳定于某一数值;在某同龄纯林中调查大量林木的胸径,就会发现中等粗度的林木占多数,向两极(最粗,最细)株数逐渐减少等等。这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性就是随机现象的统计规律性。通过以后的学习,我们会初步掌握揭示随机现象统计规律性的一些基本方法。

二、随机事件与概率

(一) 随机事件与事件间的关系

1. 随机事件 随机试验的每一个可能结果称为随机事件,简称事件,常用字母 $A, B, C, \dots$ 或 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 表示。

例(1.1) 从某批侧柏种子中任意抽取一粒做发芽试验,用 A 表示“种子发芽”, B 表示“种子不发芽”,则 A, B 是两个随机事件。进行随机试验,如果某个试验结果被观测到,我们就说该事件发生或该事件出现,否则就说该事件没有发生或没有出现。例(1.1)中,如果抽取的一粒侧柏种子,经过试验真的发芽了,我们就说事件 A 发生,而事件 B 没有发生。

在随机试验中,不能再分的事件称为基本事件;由若干个基本事件复合而成的事件称为复合事件。

例(1.2) 在桌面上抛掷一枚骰子,观察所出现的点数。我们知道,出现 1 至 6 个不同的点数都是可能的试验结果。分别用 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 表示,显然 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 是该随机试验中的六个随机事件,它们是不能再分的随机事件,是基本事件。在这个随机试验中,还有别的随机事件,例如:“出现 3 的倍数点”也是一个随机事件,用 B 表示它,显然事件 B 由两个基本事件 A_3, A_6 复合而成,是复合事件。

一个事件如果在条件实现之下必然发生,称为必然事件,用 U 表示;一个事件如果在条件实现之下恒不发生,称为不可能事件,用 V 表示。

例(1.3) 某片林地中,林木胸径最大为 32.4 cm,最小为 5.0 cm,则“所抽取的林木胸径在区间 $[5.0, 32.4]$ 之内”是必然事件;“抽取的林木胸径大于 32.4 cm”为不可能事件。

事实上,必然事件与不可能事件,它们不是随机事件。但为了今后讨论方便,把它们当做特殊的随机事件。

2. 事件间的关系

(1) 事件的和。事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这个事件称为事件 A 与事件 B 的和,记作 $A + B$ 。例如:甲、乙两射手同时射击一个目标。令 A 表示“甲射中”, B 表示“乙射中”, C 表示“目标被射中”。因为“目标被射中”,即为“甲或乙至少有一个射中”,所以 $C = A + B$ 。

一般地,事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 至少有一个发生,这个事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和,记作 $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ 。

(2) 事件的交。事件 A 与事件 B 同时发生,这个事件称为事件 A 与事件 B 的交,记作 AB 。例如,一种苗木地径和高度都合格才算合格苗木,令 A 表示“地径合格”, B 表示“高度合格”, C 表示“苗木合格”,显然 $C = AB$ 。

一般地, 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生, 这个事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交, 记作 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 。

(3) 互不相容。如果两个事件 A 与 B 不能同时发生, 则称事件 A 与事件 B 互不相容, 记作 $AB = V$, 这就表明 A 与 B 不含相同的基本事件。如从装有红、黄、白三种颜色球的袋中任取一球, 令 A 表示“取到红球”, B 表示“取到白球”, 显然 A 与 B 互不相容, 记作 $AB = V$ 。

一般地, 如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任何两个事件都是互不相容的, 称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成一个互不相容的事件组。

(4) 对立事件。“事件 A 不发生”这个事件叫做 A 的对立事件, 记作 $\bar{A}$ (A 的逆)。例如掷一枚硬币, A 表示“正面朝上”, B 表示“反面朝上”, A 与 B 互为对立事件, 即 $\bar{A} = B$ 。

显然 A 与 $\bar{A}$ 不能同时发生, 即 A 与 $\bar{A}$ 的交是不可能事件, 即 $A\bar{A} = V$; 另一方面, A 与 $\bar{A}$ 在一次试验中必有一个发生, 也就是说 A 与 $\bar{A}$ 的和是必然事件, 即 $A + \bar{A} = U$ 。所以对任何一个事件 A , 均有 $A\bar{A} = V$, $A + \bar{A} = U$ 。

注意: 对立事件一定是互不相容事件, 反之, 互不相容事件不一定是对立事件。

例(1.4) 播两粒种子, 用 A_1 表示“第一粒种子发芽”, 用 A_2 表示“第二粒种子发芽”。试表示下列各事件: ①两粒种子均发芽; ②两粒种子均未发芽; ③至少有一粒种子发芽; ④第一粒种子发芽而第二粒种子未发芽; ⑤恰有一粒种子发芽。

解 ①“两粒种子均发芽”, 指 A_1, A_2 都发生, 用 $A_1 A_2$ 表示。

②“两粒种子均未发芽”, 指 A_1, A_2 都不发生, 用 $\bar{A}_1 \bar{A}_2$ 表示。

③“至少有一粒种子发芽”, 指 A_1 或 A_2 至少有一个发生, 用 $A_1 + A_2$ 表示。

④“第一粒种子发芽而第二粒种子未发芽”, 指 A_1 发生而 A_2 不发生, 用 $A_1 \bar{A}_2$ 表示。

⑤“恰有一粒种子发芽”, 有两种情况: 第一粒种子发芽而第二粒种子未发芽或者第一粒种子未发芽而第二粒种子发芽, 因而用 $A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$ 表示。

(二) 事件的概率

我们观察一个随机试验的各种结果时, 一般说来, 总会发现有些事件发生的可能性大些, 有些事件发生的可能性小些。这里, 刻画随机事件发生可能性大小的数值就称为概率。概率因定义不同, 有统计概率与古典概率之分。

1. 统计概率 什么是统计概率呢? 我们通过实例予以说明。

从一大批侧柏种子中任意抽取一粒种子做发芽试验, 观察种子是否发芽。在这个随机试验中, 我们来研究事件 A (种子发芽) 发生可能性的大小。河南农学院林学系 1956 年 9 月在室内做侧柏种子发芽试验, 得到的资料如表 1-1。

表 1-1 侧柏种子发芽频率表

实验种子数 n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
发芽种子数 m	91	175	265	354	445	530	615	710	804	890
频率 $\frac{m}{n}/\%$	91.0	87.5	88.3	88.5	89.0	88.3	87.9	88.8	89.3	89.0

在这里, 一粒种子的发芽试验是一次随机试验。做了 100 次试验, 发芽种子有 91 粒, 即 100 次试验中事件 A 发生了 91 次, 占 91%。同理, 在 500 次试验中事件 A 发生了 445 次, 占

89%。在 1 000 次试验中事件 A 发生了 890 次,占 89%。我们把 n 次试验中事件 A 发生的次数 m 称为事件 A 发生的频数,频数 m 与试验次数 n 的比 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 的频率。从表 1-1 可以看出随着试验次数的增多,事件 A (种子发芽)发生的频率愈来愈稳定,与数值 89% 相差无几。

这个实例说明,大量重复进行某一随机试验,事件 A (侧柏种子发芽)发生的频率在某一常数 p 附近摆动,而且一般说来,随着试验次数的充分增大,频率总是稳定于常数 p 附近,偏离的可能性很小。这一规律称为频率的稳定性。随机事件频率的稳定性是随机现象固有的客观规律。从这一客观规律出发,可以用频率的稳定值即常数 p 刻画事件 A 发生可能性的大小,并把数值 p 称为事件 A 的概率。

设在相同的条件下重复进行某一试验,如果试验次数充分增大时,事件 A 发生的频率稳定地在一个常数 p 附近作微小的摆动,那么,称常数 p 为事件 A 发生的概率,并用符号 $P(A)$ 表示事件 A 的概率,写作 $P(A) = p$ 。

像这种根据事件发生频率稳定性确定的概率称为事件的统计概率。

在一般情况下,常数 p 是不能准确得到的,通常当试验次数 n 充分大时,可把事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 作为 $P(A)$ 的近似值,即

$$P(A) \approx \frac{m}{n}.$$

上例中, $P(A) \approx 0.89$ 。

2. 古典概率

我们以掷一枚骰子为例,说明古典概率的想法。我们知道,在这个随机试验中,一次试验可能出现 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个不同的点数,即全部事件由六个基本事件 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 组成。由于骰子很匀称,我们没有任何理由认为某一个点数比其他点数更容易发生些,自然认为六个基本事件发生的可能性大小相等,即各个基本事件的发生具有等可能性。因为出现奇数点的事件 C 包含了三个基本事件 A_1, A_3, A_5 , 就是说在六个等可能的结果中占有三次机会。所以,人们有理由认为“掷一枚骰子出现奇数点”这个事件发生的概率为 $\frac{3}{6}$, 即 $P(C) = \frac{3}{6} = 0.5$ 。

根据这种想法,人们利用研究对象的物理或几何性质具有的对称性,确定了计算事件概率的一种方法。一个随机试验,如果满足下列两个条件:

(1) 全部基本事件只有有限个;

(2) 各个基本事件的发生具有等可能性,也就是说,各个基本事件发生的概率相等,则称该随机试验为古典概率。在古典概率中,用 n 表示基本事件的总个数,用 m 表示事件 A 包含基本事件的个数,那么事件 A 的概率由下式计算

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1-1)$$

并把式(1-1)确定的概率称为事件 A 的古典概率。

3. 概率的基本性质 由概率的定义可以得到概率的下列基本性质:

性质(1) 不可能事件的概率等于 0, 必然事件的概率等于 1, 即 $P(V) = 0, P(U) = 1$;

性质(2) 任何事件的概率都在0与1之间, 即 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

(三) 概率加法公式与独立事件的概率乘法公式

1. 概率加法公式

(1) 互不相容事件的概率加法公式。若事件 A 与事件 B 互不相容, 即 $AB = \emptyset$, 则

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (1-2)$$

由互不相容事件的概率加法公式可以得到两个推论:

推论① 事件 A 的对立事件 $\bar{A}$ 的概率为

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

推论② 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一个互不相容的事件组, 则

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

(2) 任意两事件的概率加法公式

设 A, B 是两个任意事件, 则

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1-3)$$

2. 独立事件的概率乘法公式

(1) 事件的独立性。若事件 A 的发生与否不影响事件 B 的概率, 则称事件 A, B 互相独立。例如分别播种两粒种子, 令 A 表示“第一粒发芽”, B 表示“第二粒发芽”, 显然事件 A 发生与否不影响 B 发生的概率, 则 A, B 互相独立。

可以证明: 若事件 A 与 B 互相独立, 则 A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也是互相独立的。

(2) 独立事件的概率乘法公式。若事件 A, B 互相独立, 则

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1-4)$$

推论: 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一个互相独立的事件组, 那么

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \quad (1-5)$$

例(1.5) 某地区造林, 一穴栽植两株苗木, 设每株苗木成活的概率为0.6, 两株苗木的成活是互相独立的, 试求下列各事件的概率: ①一穴中两株苗木均成活; ②一穴中两株苗木均未成活; ③至少有一株成活; ④恰有一株成活。

解 设 A_1 表示第一株苗木成活, A_2 表示第二株苗木成活, 则 $\bar{A}_1$ 表示第一株苗木未成活, $\bar{A}_2$ 表示第二株苗木未成活。

根据题意: $P(A_1) = P(A_2) = 0.6$, $P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = 0.4$

① “两株苗木均成活”用 $A_1 A_2$ 表示, A_1 与 A_2 是互相独立的, 由式(1-4)得

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$$

② “两株苗木均未成活”用 $\bar{A}_1 \bar{A}_2$ 表示, $\bar{A}_1$ 与 $\bar{A}_2$ 也是互相独立的, 于是所求的概率

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

③ “至少有一株苗木成活”用 $A_1 + A_2$ 表示。所求的概率为:

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= 0.6 + 0.6 - 0.6 \times 0.6 = 0.84 \end{aligned}$$

④ “恰有一株苗木成活”包括两种情况: 第一株成活而第二株未成活, 用 $A_1 \bar{A}_2$ 表示, 第一株未成活而第二株成活, 用 $\bar{A}_1 A_2$ 表示。因此, “恰有1株苗木成活”用 $A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$ 表示,