

名师精编教辅书 考场竞技掌中宝

专题突破

四所师大与中学名校联手打造

初中数学 方 程

陆书环 冯振举 编著

立足专题 分层讲练
以法统题 以题说法
突出思维 注重综合



金 盾 出 版 社

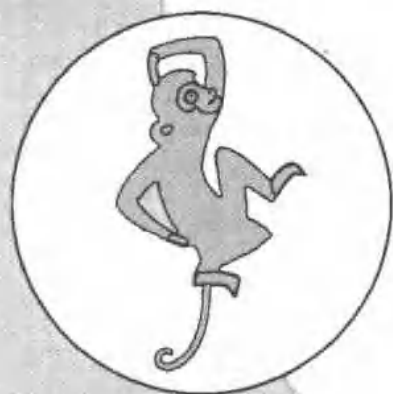
JINDUN CHUBANSHE

专题突破

初中数学

方 程

陆书环 冯振举 编著



金盾出版社

图书在版编目(CIP)数据

专题突破丛书·初中数学方程/陆书环,冯振举编著. —北京:金盾出版社,2003.6

ISBN 7-5082-2623-2

I. 专… II. ①陆…②冯… III. 代数课—初中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 054664 号

金盾出版社出版、总发行

北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)

邮政编码:100036 电话:68214039 66882412

传真:68276683 电挂:0234

封面印刷:北京 2207 工厂

正文印刷:北京金星剑印刷有限公司

各地新华书店经销

开本:850×1168 1/32 印张:8.125 字数:269 千字

2004 年 4 月第 1 版第 2 次印刷

印数:25001—27000 册 定价:9.00 元

(凡购买金盾出版社的图书,如有缺页、
倒页、脱页者,本社发行部负责调换)

序 言

近年来,我国基础教育改革的步伐和素质教育进程明显加快,中学教材出现了“一纲多本”、“一标多本”的多元化格局。为了更好地适应这种不断改革发展的新形势,我们集多位教育专家、出版专家的聪明智慧,精心构思、设计了这套《专题突破》系列丛书的选题及编写框架。金盾出版社文化教育编辑室组织山东师范大学、天津师范大学、安徽师范大学、曲阜师范大学四所很有影响的大学,联合数所知名度很高的中学,一起编著了这套系列丛书。

提起“专题”,早在上世纪50年代我国就出版过这种形式的教学辅导用书。这些小册子当时深受中学师生的喜爱。“专题”论述灵活、深入,并具有一定的长效性。这些图书的出版,对我国人才的培养和成长起到了十分积极的作用。

“专题”之所以深受欢迎,其主要原因是:一、针对性强,可由专题讲练有效地实现知识和能力的升华和突破;二、内容讲述的空间大,并且很少受教材变动的影响;三、读者可以根据自己的需要,灵活购买、阅读某些分册。

这套系列丛书的鲜明特色和深度魅力,主要体现在以下四个方面:

层次分明,讲练结合。按“专题”的知识板块,分多种层次,高地进行讲与练,并搭建起读者探究的阶梯。

突出重点,注重方法。突出重点、难点与中高考热点,注重思维方法,努力构建知识体系和方法体系。注重启发,发掘潜能,教学互动。

深化主题,提高能力。精析、深化主题,注重难点、疑点、重点、易错点综合分析,对其相关内容适度涉猎,以便快速、有效地提高学生分析、解决实际问题的能力。

理念新颖,面向备考。锁定中考、高考,将素质教育与应试备考紧密结合,汲取近年来中、高考考题的精华,分析、跟踪、把握考题设计趋向,使学生及时参考,即学即会,成功迈进重点学校。

全套丛书每册内容分为三篇。第一篇“基础知能”是基础篇,对专题内容进行重点讲解和训练。突出重点,突破难点,消除疑点,矫正误点。第二篇“思维方法”是提高篇,以法统题,以题说法,从思维方法的角度精心设计和解析典型例题,使学生领略到思维方法是整个方法体系的核心,是从知识上升到能力的阶梯。第三篇“综合应用”是综合篇,按“热点”讲练,注重过程和方法,脉络清晰,条分缕析,非常便于读者提高综合应用能力。

鉴于《专题突破》系列的册数较多,我们拟分两批出版。第一批先推出初、高中的数学、物理、化学三科的各分册;第二批再推出初、高中的语文、英语等学科的各分册。

本册的编著者还有袁芳、姜晶、庄志宏、李静等。

我们深信,这套系列丛书很好地体现了最新教改精神和新课标要求,具有很强的生命力,一定会成为广大中学师生的良师益友。

我们还衷心希望,各位老师和中学生朋友们在阅读、使用这套系列丛书时提出宝贵的修改意见,以便修订再版时改正,使其不断臻于完善。

《专题突破》丛书总策划 卢祥之 方明

目 录

第一篇 基础知能

一、一元一次方程	(1)
1. 简易方程	(1)
重点·难点与中考热点	(1)
知识点精析与应用拓展	(2)
典型题解析与释疑解惑	(3)
基础知能测试与答案提示	(7)
2. 等式和方程	(10)
重点·难点与中考热点	(10)
知识点精析与应用拓展	(10)
典型题解析与释疑解惑	(12)
基础知能测试与答案提示	(16)
3. 一元一次方程和它的解法	(18)
重点·难点与中考热点	(18)
知识点精析与应用拓展	(19)
典型题解析与释疑解惑	(21)
基础知能测试与答案提示	(26)
4. 一元一次方程的应用	(28)
重点·难点与中考热点	(28)
知识点精析与应用拓展	(29)
典型题解析与释疑解惑	(31)
基础知能测试与答案提示	(36)
二、二元一次方程组	(38)
1. 二元一次方程组及解法	(38)
重点·难点与中考热点	(38)

知识点精析与应用拓展	(39)
典型题解析与释疑解惑	(40)
基础知能测试与答案提示	(43)
2. 三元一次方程组的解法及一次方程组的应用	(46)
重点·难点与中考热点	(46)
知识点精析与应用拓展	(46)
典型题解析与释疑解惑	(47)
基础知能测试与答案提示	(50)
三、分式方程	(54)
1. 含有字母系数的一元一次方程	(54)
重点·难点与中考热点	(54)
知识点精析与应用拓展	(54)
典型题解析与释疑解惑	(55)
基础知能测试与答案提示	(60)
2. 可化为一元一次方程的分式方程	(62)
重点·难点与中考热点	(62)
知识点精析与应用拓展	(62)
典型题解析与释疑解惑	(64)
基础知能测试与答案提示	(71)
3. 分式方程的应用	(73)
重点·难点与中考热点	(73)
知识点精析与应用拓展	(74)
典型题解析与释疑解惑	(76)
基础知能测试与答案提示	(80)
四、一元二次方程	(82)
1. 用公式法解一元二次方程	(82)
重点·难点与中考热点	(82)
知识点精析与应用拓展	(83)
典型题解析与释疑解惑	(86)
基础知能测试与答案提示	(88)
2. 用因式分解法解一元二次方程	(91)
重点·难点与中考热点	(91)

知识点精析与应用拓展	(92)
典型题解析与释疑解惑	(93)
基础知能测试与答案提示	(95)
3. 一元二次方程的根的判别式	(97)
重点·难点与中考热点	(97)
知识点精析与应用拓展	(97)
典型题解析与释疑解惑	(98)
基础知能测试与答案提示	(102)
4. 一元二次方程的根与系数的关系	(105)
重点·难点与中考热点	(105)
知识点精析与应用拓展	(105)
典型题解析与释疑解惑	(107)
基础知能测试与答案提示	(110)
5. 二次三项式的因式分解(用公式法)	(113)
重点·难点与中考热点	(113)
知识点精析与应用拓展	(114)
典型题解析与释疑解惑	(115)
基础知能测试与答案提示	(117)
6. 一元二次方程的应用	(118)
重点·难点与中考热点	(118)
知识点精析与应用拓展	(119)
典型题解析与释疑解惑	(120)
基础知能测试与答案提示	(123)
7. 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程	(125)
重点·难点与中考热点	(125)
知识点精析与应用拓展	(126)
典型题解析与释疑解惑	(128)
基础知能测试与答案提示	(133)
8. 简单的二元二次方程组	(136)
重点·难点与中考热点	(136)
知识点精析与应用拓展	(137)
典型题解析与释疑解惑	(138)

基础知能测试与答案提示	(142)
-------------------	-------

第二篇 思维方法

一、化归思想方法	(147)
方法点击与重要应用	(147)
范例精析与思维技巧	(148)
思维能力测试与答案提示	(153)
二、分类思想	(159)
方法点击与重要应用	(159)
范例精析与思维技巧	(160)
思维能力测试与答案提示	(164)
三、换元法	(172)
方法点击与重要应用	(172)
范例精析与思维技巧	(172)
思维能力测试与答案提示	(177)
四、消元、降次法	(183)
方法点击与重要应用	(183)
范例精析与思维技巧	(184)
思维能力测试与答案提示	(189)

第三篇 综合应用

一、学科内综合应用	(195)
1. 与方程的判别式、根与系数的关系有关的问题	(195)
热点提要与知识背景	(195)
范例解析与思维发散	(195)
综合知能测试与答案提示	(198)
2. 方程与不等式的问题	(203)
热点提要与知识背景	(203)
范例解析与思维发散	(203)
综合知能测试与答案提示	(207)

3. 方程与函数的问题	(211)
热点提要与知识背景	(211)
范例解析与思维发散	(212)
综合知能测试与答案提示	(216)
4. 方程与几何有关的问题	(223)
热点提要与知识背景	(223)
范例解析与思维发散	(224)
综合知能测试与答案提示	(232)
二、跨学科综合应用	(242)
热点提要与知识背景	(242)
范例解析与思维发散	(242)
综合知能测试与答案提示	(246)

第一篇 基础知能

一、一元一次方程



1. 简易方程

重点·难点与中考热点



本节的重点是简易方程的解法。目前,我们有两种方法解简易方程:一种是小学经常采用的算术方法;另一种是用代数方法解方程。随着知识的深入,我们会逐渐看到用代数方法解方程的优越性。本节是承前启后的一节,既复习了小学学习的数学知识,也为今后学习方程知识打下了基础。方程是初中数学中的重要内容之一,因此熟练掌握简易方程的解法是学好这一重要内容的一个好的开端。



列出方程来解应用问题,利用方程解应用题,关键是列方程。先要选取适

当的未知数(有时还需设辅助未知数,设而不求),然后根据题中的等量关系列出方程.可借助线段示意图、表格等形式来分析数量关系.明确等量关系.此外,熟悉一些基本规律(如工作总量=工作时间 $\times$ 工作效率,路程=时间 $\times$ 速度,溶质=溶液 $\times$ 浓度,溶液=溶质+溶剂等)也是解题的关键.掌握这部分内容,努力学会分析问题,解决问题的方法至关重要.因此,应适当练习一些不同类型的题目,以提高独立分析问题、解决问题的能力.

中考热点

用代数法解简易方程,列方程解应用题是中考考查的热点.单独考查以填空、选择、解答题为主;综合考查主要以函数等知识为背景进行考查.

知识点精析与应用拓展

知识点精析

1) 方程的有关概念

- (1) 方程:含有未知数的等式叫做方程.
- (2) 方程的解:使方程左右两边的值相等的未知数的值,叫做方程的解.
- (3) 解方程:求方程的解的过程,叫做解方程.

2) 简易方程的解法

两种方法:一种是算术方法;另一种是代数方法.二者相比,用代数方法解方程具有优越性.其基本方法是:将方程两边同时加上(或减去)一个适当的数,或者是将方程两边同时乘以(或除以)一个适当的数,最终求出方程的解.

解方程的关键是方程两边必须进行同一数的同种运算.

3) 列方程解应用题的一般步骤

先要审题,然后设未知数,找相等关系列方程,检验,最后写出答案.这里的检验指验证所求值是否是方程的解和这个解是否符合题意.

利用方程解应用题的关键是列方程.先要选取适当的未知数,然后利用题中的相等关系列方程.

应用拓展

(1) 解方程时,方程两边都乘以(或除以)同一个数时,要注意这个数要适当,尤其是除数不能为零.

(2) 检验一个数值是不是方程的解可以通过解这个方程来检验,也可以把这个数值代入原方程检验.如果题目是应用题中的方程,还要看这个解是否符合题意.

(3) 给出关于 x 的简易方程,然后求一个含有 x 的代数式,这类题目的基本思路是先求出所给方程的解,再依方程中解出的 x 的值代入代数式求值.

(4) 小学里,我们习惯用算术方法来解应用题.学习用列方程(用代数方法)的方法来解应用题,其优点是把未知量设定为一个未知数后,这个未知数就可看做一个已知量介入等量关系并体现在一个方程中.列方程的过程,就是把问题中的数量关系,直接简明地用等式表示出来.这样算术解法中的许多困难、曲折的思考过程,在代数解法中通过未知数这座“桥”就能体现.

(5) 将未知量用字母替换后,要参与运算.这是列方程解应用题的实质.刚开始学习列方程解应用题,要尽量避免犯这样的错误:未知量用字母替换,但求解还是用算术方法.

典型题解析与释疑解惑

例1 下列各方程后面括号内分别给出了一组数,从中找出方程的解:

(1) $5x - 2 = 13$ (1, 2, 3)

(2) $3x + 1 = 2x + 8$ (4, 6, 7)

(3) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (2, 3, 4)

思路分析

检验一个数值是不是方程的解可以解方程,也可以把这个数值代入原方程检验.

解 (1) 解方程 $5x - 2 = 13$, 得 $x = 3$.

所以 $x = 3$ 是方程 $5x - 2 = 13$ 的解.

(2) 解方程 $3x + 1 = 2x + 8$, 得 $x = 7$.

所以 $x = 7$ 是方程 $3x + 1 = 2x + 8$ 的解.

(3) 把 $x = 2$ 代入原方程的左右两边: 左边 $= 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 + 6 - 10 = 0 =$ 右边,

所以 $x = 2$ 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解.

把 $x = 3$ 代入原方程的左右两边: 左边 $= 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 + 6 - 15 = 0 =$ 右边,

所以 $x = 3$ 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解.

把 $x = 4$ 代入原方程的左右两边: 左边 $= 4^2 - 5 \times 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2 \neq 0$,
所以 $x = 4$ 不是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解.

故 2, 3 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解.

释疑解惑 当解方程比较容易时, 就直接解方程; 当方程较复杂或不容易解时, 就把数值代入原方程一一检验. 例如:

已知 $x = 1$ 是关于 x 的方程 $3x - 1 = 2m$ 的解, 则 m 的值是_____.

思路分析 $x = 1$ 是这个方程的解, 就把它代入到方程中去, 求出 m 的值.

解 把 $x = 1$ 代入方程 $3x - 1 = 2m$, 得 $2m = 2$, 所以 $m = 1$.

例 2 解方程:

$$(1) \frac{3}{4}x - 3 = 3 \quad (2) 0.6x + 1.2 = 1.8 - 0.3x$$

思路分析 用代数方法解简易方程主要是根据等式的基本性质, 按解方程步骤解出这个方程的解.

解 (1) 方程两边都加上 3, 得 $\frac{3}{4}x = 6$. 方程两边都除以 $\frac{3}{4}$, 得 $x = 8$.

(2) 方程两边都加上 $(0.3x - 1.2)$, 得 $0.6x + 1.2 + (0.3x - 1.2) = 1.8 - 0.3x + (0.3x - 1.2)$, 即 $0.9x = 0.6$. 方程两边同除以 0.9, 得 $x = \frac{2}{3}$.

释疑解惑 本例考查方程的解法. 解题关键是灵活根据方程特点, 在两边同时加上(或减去)同一个数, 同时乘以(或除以)同一个非零数.

例 3 甲、乙两地相距 2760 千米, 客车以每小时 140 千米的速度由甲地开往乙地, 货车以每小时 90 千米的速度从乙地开往甲地, 若客车、货车同时从甲、乙两地出发, 多少小时后两车相遇?

思路分析 相遇时两车行驶的距离之和等于两地的距离.

相遇时两车行驶的时间相同.

距离 = 速度 $\times$ 时间

解 设 x 小时后两车相遇, 则客车在 x 小时内行驶了 $140x$ 千米, 货车在 x 小时内行驶了 $90x$ 千米.

根据题意得方程:

$$140x + 90x = 2760$$

$$230x = 2760$$

$$x = 12$$

答 两车同时出发后 12 小时相遇.

释疑解惑 列方程的依据是题目中隐含的等量关系:客、货两车相遇时行驶的距离之和等于两地的距离,并且它们走的时间是相同的。

例4 甲、乙两人在400米环形跑道上练习长跑,同时从同一起点出发,甲的速度是6米/秒,乙的速度是4米/秒,乙跑几圈后,甲可超过乙一圈?

思路分析 注意本题的一个重要条件是甲、乙两人跑的时间相同,由于甲、乙两人的速度不同,所以甲比乙多跑了1圈(400米)。

解 设 x 秒后甲比乙多跑了一圈,则甲在 x 秒内跑的距离为 $6x$,乙在 x 秒内跑的距离为 $4x$ 。

由已知,得方程

$$6x = 4x + 400$$

解方程得 $x = 200$

则乙跑的圈数为

$$(4 \times 200) \div 400 = 2 \text{ (圈)}$$

即乙跑2圈后甲可超过乙一圈。

答 乙跑2圈后甲可超过乙一圈。

释疑解惑 解本题时要从距离入手找相等关系,不要先想乙跑了几圈,求出跑的时间后,再解决圈数就容易了。

注意:此题设未知数的方法叫间接设法,不是题目求什么就设什么为 x 。

例5 某项工作,甲单独做3小时,乙单独做5小时完成,两人合着做完成工作量的 $\frac{4}{5}$,要几小时?

思路分析 把工作总量看做1,则甲1小时做 $\frac{1}{3}$,乙1小时做 $\frac{1}{5}$,那么两人合着做1小时完成工作量的 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$,由工作总量 = 工作时间 $\times$ 工作效率列出方程。

解 设两人合着做完成工作量的 $\frac{4}{5}$ 要 x 小时,则 $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x = \frac{4}{5}$,解得 $x = 1.5$ 。

答 两人合着做完成工作量的 $\frac{4}{5}$ 要1.5小时。

释疑解惑 本题要抓住关键:工作总量 = 工作时间 $\times$ 工作效率;将工作总量看做1。

例 6 今年国家为了继续刺激消费,规定私人购买耐用消费品,不超过其价格 50% 的款项可以用抵押方式向银行贷款,蒋老师欲购买一辆家用轿车,他现在的全部积蓄为 P 元,只够购车款的 60%,则蒋老师应向银行贷款多少元?

思路分析 设这辆汽车的价格为 x 元,那么由题目中的等量关系 $60\%x = P$, 求出 x , 则 $x - P$ 就是所求的贷款数.

解 设这辆汽车的价格为 x 元, 则

$$60\%x = P$$

$$x = \frac{5}{3}P$$

$$\text{应贷款为 } x - P = \frac{5}{3}P - P = \frac{2}{3}P$$

答 蒋老师应向银行贷款 $\frac{2}{3}P$ 元.

释疑解惑 此题用的是间接设法. 直接设贷款 x 元也可以, 利用等量关系 $60\%(x + P) = P$ 求出 x .

例 7 李明同学的父亲一年内在银行存了三次钱, 第一次为一年期整存整取, 银行年利率为 2.25%, 第二次为半年期整存整取, 年利率为 2.16%, 第三次为三个月期, 整存整取, 年利率为 1.98%. 已知李明父亲第二次存的款是第一次的 $\frac{1}{2}$, 第三次存的款是第一次存款的 $\frac{1}{5}$, 期后李明的父亲共得利息 92.45 元 (扣除 20% 的利息税, 最后结果精确到 0.01 元). 问李明的父亲三次各存了多少元? 共存入银行多少元 (最后结果精确到元)?

思路分析 解这个题要分别把三次存款的利息分别用代数式表示出来, 必须注意银行的利率都是年利率. 因此, 当年利率为 2.16% 时, 半年期的利率则为 1.08%, 当年利率为 1.98%, 三个月期的利率为 0.495%.

解 设第一次存入的钱数为 x ,

则第二次存入的钱数为 $\frac{x}{2}$,

第三次存入的钱数为 $\frac{x}{5}$.

由此可知:

第一次存款的利息为 $x \times \frac{2.25}{100}$,

第二次存款的利息为 $\frac{x}{2} \times \frac{1.08}{100}$,

第三次存款的利息为 $\frac{x}{5} \times \frac{0.495}{100}$,

存款三次共得利息为:

$$\left(x \times \frac{2.25}{100}\right) + \left(\frac{x}{2} \times \frac{1.08}{100}\right) + \left(\frac{x}{5} \times \frac{0.495}{100}\right)$$

扣除利息税后实际共得利息为:

$$\left[\left(x \times \frac{2.25}{100}\right) + \left(\frac{x}{2} \times \frac{1.08}{100}\right) + \left(\frac{x}{5} \times \frac{0.495}{100}\right)\right] \times \left(1 - \frac{20}{100}\right)$$

根据题意,得方程

$$\left[\left(x \times \frac{2.25}{100}\right) + \left(\frac{x}{2} \times \frac{1.08}{100}\right) + \left(\frac{x}{5} \times \frac{0.495}{100}\right)\right] \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 92.45$$

解这个方程,得

$$x = 4000$$

所以

$$\frac{x}{2} = 2000$$

$$\frac{x}{5} = 800$$

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 6800 \text{ 元}$$

答 李明的父亲第一次存入银行 4000 元,第二次存入银行 2000 元,第三次存入 800 元,三次共存入 6800 元.

释疑解惑 本题的关键是根据利息 = 存款 × 利率列出三次存款所得利息的代数式.

基础知能测试与答案提示

一、填空题

1. 方程 $\frac{2}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ 的解是_____.

2. x 的 30% 比 20 的 $\frac{1}{3}$ 少 1, 列出方程为_____.

3. 当 $x =$ _____时, 代数式 $\frac{2}{3}x - 2$ 的值等于 4.

4. 在 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ 中, _____是方程 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ 的解.