GAODENG SHUXUE

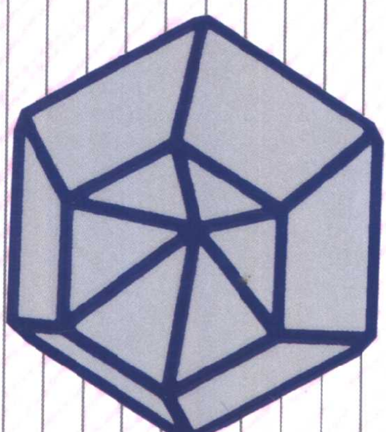
高等数学全程导学（上册）

GAODENG SHUXUE QUANCHENG DAOXUE

同济·高等数学（第五版）题解

刘后邦 侯宾 娄明 刘可 编著

● 大学数学精要辅导丛书（理工科）



湖南科学技术出版社

GAODENG SHUXUE

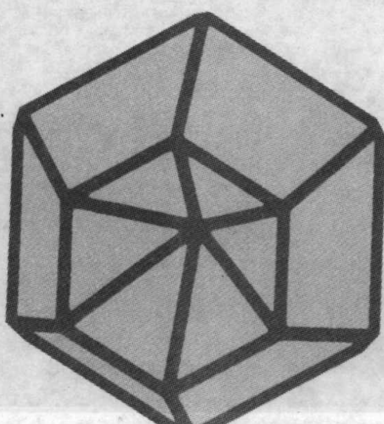
大学数学精要辅导丛书（理工科）

高等数学
全程导学（上册）

GAODENG SHUXUE QUANCHENG DAOXUE

同济·高等数学（第五版）题解

刘后邦 侯宾 娄明 刘可 编著



湖南科学技术出版社

大学数学精要辅导丛书(理工科)

高等数学全程导学(上册)

同济·高等数学(第五版)题解

编　　著：刘后邗　侯　宾　娄　明　刘　可
责任编辑：徐　为
文字编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路280号
http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731—4375808
印　　刷：湖南新华印刷集团有限责任公司（邵阳）
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：邵阳市双坡岭
邮　　编：422001
出版日期：2003年9月第1版第1次
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：12.875
字　　数：337000
书　　号：ISBN 7-5357-3797-8/O·214
定　　价：17.50元

序

本书是高等数学学习与教学的一本指导性参考书，特点如下：

（一）本书的内容严格控制在理工类（非数学专业）专科、本科教学大纲及全国硕士研究生统考大纲范围内，对个别超过大纲而考试中又可能涉及的部分则用“*”号标出．

（二）本书是按教材章节顺序编写的，每章由五部分构成：

1．“要点概述”．包括设置该章的缘由、要解决的问题、重要的概念、定义、定理及各种典型问题的求解程序等，实际上“要点概述”相当于课堂笔记，它是解题必备的理论基础．

2．“疑难解析”．包括了该章重要是非问题的判断、对重要概念、定义、定理的理解、解题中易犯错误的分析等，它们是提高数学素质的重要环节．

众所周知，在数学学习中，解题是掌握理论、促进应用的一个重要手段．实践出真知，多看题解则可见多识广，多做习题则可熟能生巧，作者根据多年从事高等数学教学的经验，把解题训练按难度系数分为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，逐级训练，即为下面的几个部分．

3．“习题选解”．难度系数Ⅰ，选自同济大学应用数学系主编《高等数学》第五版（书中简称同济五版）．此书是全国使用面最广，也是目前已出版的种类繁多的高等数学教材中最优秀的一本．书中配置的习题具有精典

性，对基本功训练是十分必要的，我们去掉了其中少数最简单的、重复性出现的习题，将其余全部习题汇成了“习题选解”，对于专科、本科初学高等数学的同学，这是必须掌握的基础训练，为了便于读者查阅，用了如下编码，例如 3.2.4（2）表示该题选自同济五版第 3 章第 2 节第 4 大题第（2）小题.

4. “练习题选”. 难度系数Ⅱ，选自高校期末考卷及试题库中各种典型考题. 这部分习题，建议读者先动手练练，如有困难，再看附在后面的答案，总结解题的经验教训，这部分练习题的训练将拓宽解题思路，提高解题技巧，无疑对准备参加期末考试的同学是十分有利的.

5. “典型范例”. 难度系数Ⅲ，包括 1987 ~ 2002 年全国研究生入学考试几乎全部的统考试题［题后标注“(考研××××)”，例如“(考研 2002)”是表示该题选自 2002 年研究生入学试题］及具有类似难度的典型题. 对准备考研的读者，在阅读完“要点概述”及“疑难解析”后，可直接阅读“典型范例”，掌握考研动态，锻炼解题灵活性，极大提高解题能力.

在浩如烟海的数学题中，怎样取材选题，有针对性地指导读者用最少的时间，循序渐进、高效益地在期末考试或考研中取得好成绩是一个很值得探讨的问题，作者不揣冒昧，在这方面进行了一些探索，不足之处，敬请行家及读者批评指正.

此外，随书还附录了两份期末考卷及两份 2003 年最新考研试题及解答，供读者复习时参考.

张宜老师参与了本书的校稿，在此表示诚挚的谢意。

刘后邘

于中南大学荷花村

2003 年 7 月 26 日

目　录

第一章
函数与极限

HANSHU YU JIXIAN

一、要点概述

Ⅰ 问题的提出

本章是高等数学的开篇，高等数学主要内容是微积分. 微积分研究的对象是变量以及变量与变量之间的关系，于是就引入了函数概念；我们是用辩证的观点，即运动的观点研究函数，于是引入了极限概念. 在函数中有一类函数具有一个特性：当自变量趋于 x 时，函数的极限即为 $f(x)$，这种函数称为连续函数. 今后我们将看到连续函数具有许多优良性质，例如可导函数一定连续，连续函数一定可积等. 于是连续概念成为了本章引入的又一个重要概念.

总之，本章有三个重要概念：函数、极限、连续.

Ⅱ 函数

设数集 $D\subset R$，则映射 $f: D\to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$ 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

1. 映射概念

设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每一个元素 x，按法则 f，在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 称为 y(在映射 f 下)的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(x)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射(或双射).

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每一个 $y\in R_f$，有惟一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$，于是我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g: R_f\to X,$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$，这个映射 g 称为 f 的逆

映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f}^{-1}=R_{f}$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

设有两个映射 $g: X\to Y_1$，$f: Y_2\to Z$,其中 $Y_1\subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映射成 $f[g(x)]\in Z$，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，称它为映射 g 和 f 构成的复合映射记作 $f\circ g$，即

$$f\circ g: X\to Z; \qquad f\circ g(x)=f[g(x)],\ x\in X.$$

2. 从实数集(或其子集) X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

函数概念中有两个要素：

①定义域 D，常根据下面两方面确定

$$\begin{cases}\text{使实际问题有意义}\\ \text{使表达式有意义}\end{cases}$$

$$\text{例如：}\begin{cases}\dfrac{1}{u(x)}: & u(x)\neq 0;\\ \sqrt{u(x)}: & u(x)\geqslant 0;\\ \ln u(x): & u(x)>0;\\ \arcsin u(x): & |u(x)|\leqslant 1.\end{cases}$$

②对应法则：通常用表达式、表格、图像表出.

3. 函数可分为

①显函数：从方程 $F(x, y)=0$ 中解出了 y 的函数.

②隐函数：由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$.

4. 函数特性

1) 有界性：它有两个等价定义：

①若 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in D$，则称 $f(x)$ 为有界函数，否则称为无界函数.

②若 $\exists a,b$ 为实数，$a\leqslant b$，使得 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，$x\in D$，则称 $f(x)$ 为有界函数，否则称为无界函数.

2) 单调性：设 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\in D$，若对 I 上任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，记为 $\nearrow$；反之则称单调减少，记为 $\searrow$.

3) 奇偶性：若 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，对任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数；恒有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数图像关于原点对称，偶函数图像关于 y 轴对称；显然奇 + 奇 = 奇，偶 + 偶 = 偶，奇 × 奇 = 偶，偶 × 偶 = 偶，奇 × 偶 = 奇.

4) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使

得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为周期．通常称 $f(x)$ 的最小正周期为周期．

5. 反函数：设 $y=f(x)$，W 为值域，D 为定义域，若对任意数值 $y\in W$，在 D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应，使适合 $f(x)=y$，则称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，有时也记为 $x=f^{-1}(y)$．

反函数不一定是单值函数，但若函数是单值单调函数，则反函数亦是单值函数．由于本课程只研究单值函数，故只研究主值区间的反函数，例如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等；反函数的值域为函数的定义域，反函数的定义域为函数的值域；求反函数步骤是：①反解；②改写．函数与反函数（经过改写的）其图像关于 $y=x$ 对称．

6. 初等函数

(1) 基本初等函数：包括以下五类函数简称“三指幂反对”．①三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$．②指数函数：$y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$．③幂函数：$y=x^\mu(\mu\neq 0)$．④反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$．⑤对数函数：$y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$．

(2) 复合函数：设 $y=y(u)$，$u=u(x)$，则 $y=y(u(x))$ 称为复合函数，$u=u(x)$ 为中间变量．把复合函数分解的步骤是：由外向内，层层引入中间变量，使每一个中间表达式都形如基本初等函数或它们与常数通过四则运算构成的式子．例如，$y=e^{\cos\sqrt{3x^2+\ln^3 x}}$ 可分解为

$$y=e^u,\quad u=\cos v,\quad v=t^{\frac{1}{2}},\quad t=3x^2+w^3,\quad w=\ln x.$$

(3) 初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

7. 几个常见重要函数：

(1) 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) $y=[x]$ （y 为 x 的最大整数部分）．

(3) 狄利克雷函数 $y=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时};\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$

(4) 双曲函数　双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切 $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

显然　$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$.

Ⅲ　极限

当自变量在某过程下，数列(或函数)无限趋近于数 A(或∞)时，引出极限概念.

①数列极限：数列 x_n 可视为自变量为正整数的函数：$x_n=f(n)$：过程 $n\to\infty$ 可用时刻 $N>0$ 刻画，极限 $x_n\to A$ 可用围墙 $\varepsilon>0$ 刻画：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

直观理解：在 A 附近任意筑一道围墙(ε)，存在一个时刻(N)，只要过这个时刻($n>N$)，x_n 即落在围墙内：($|x_n-A|<\varepsilon$). 下面定量描述(ε-N 语言).

定义　$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，只要 $n>N$，就有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

②函数极限：由于自变量 x 的变化过程有 6 种：$x\to x_0$(x_0^+，x_0^-，$+\infty$，$-\infty$，∞)，函数 $f(x)$的变化趋势有 4 种：$f(x)\to A$($+\infty$，$-\infty$，∞)，故函数极限总共有 24 种.

在函数极限定义中：

过程 $x\to x_0$($+x_0$，$-x_0$)用"时刻"$\delta>0$ 刻画；

$x\to\infty$($+\infty$，$-\infty$)用"时刻"$X>0$ 刻画.

变化趋势：$f(x)\to A$　用"围墙"$\varepsilon>0$ 刻画；

$f(x)\to\infty$($+\infty$，$-\infty$)用"围墙"$M>0$ 刻画.

例如：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$　(ε-δ 语言)：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有

$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，即右极限　($\varepsilon$-$\delta$ 语言)：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $0<x-x_0<\delta$，就有

$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，即左极限　($\varepsilon$-$\delta$ 语言)：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $0<x_0-x<\delta$，就有

$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$　(X-M 语言)：

$\forall M>0$，$\exists X>0$，只要 $x>X$，就有 $|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$　(M-δ 语言)：

$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，只要 $0<x_0-x<\delta$，就有 $f(x)<-M$.

1. 极限性质：①惟一性. ②有界性. ③保号性. ④常数极限为本身.

2. 极限运算性质：若存在$\lim f(x)$，$\lim g(x)$，则

$$\lim(f(x)+g(x))=\lim f(x)+\lim g(x),$$
$$\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x),$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}[\text{要求}\lim g(x)\neq 0],$$
$$\lim Cf(x)=C\lim f(x).$$

3. 极限不存在分类：

①在给定过程下函数趋于$\infty(+\infty,-\infty)$，这类极限不存在又称为“极限”为$\infty(+\infty,-\infty)$，并可用语言描述(见前)，例如

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

②振荡不存在：在给定过程下，函数无变化趋势．例如$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在．

Ⅳ 无穷小与无穷大

在给定过程下，其极限为零的变量称为无穷小量(无穷小)；在给定过程下，其绝对值无限制变大的变量称为无穷大量(无穷大)．

1. 性质．

①有限个无穷小之和为无穷小；

②有限个无穷小之积为无穷小；

③无穷小乘有界变量为无穷小；

④无穷大加有界变量为无穷大；

⑤有限个无穷大之乘积为无穷大；

⑥$\dfrac{1}{\text{无穷大}}$为无穷小；

⑦$\alpha(x)$为无穷小且$\alpha(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{\alpha(x)}$为无穷大．

2. 极限存在的两个充要条件．

① $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$．

② $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$为无穷小，即

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

3. 无穷小比较．设在同一过程下α，β为无穷小，若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$称$\beta$为$\alpha$的高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$．

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq 0)$，称$\beta$与$\alpha$为同阶无穷小．

特别若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，称$\beta$为$\alpha$的等价无穷小；若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}(k>0)=C(C\neq 0)$，称

β 为 α 的 k 阶无穷小. 显然这时 $\beta \sim C\alpha^k$，称 $C\alpha^k$ 为 β 的主部.

记住几个常用等价无穷小：当 $x \to 0$ 时，

$$\sin x \sim x, \ \tan x \sim x; \ e^x - 1 \sim x; \ \ln(1+x) \sim x; \ \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

V 连续

两个等价定义：

①若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

②若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 (\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))$，称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

定义①与定义②是等价的.

1. 连续三要素：① $f(x)$ 在 x_0 处有定义，② $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，③ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. 三要素中缺一称 $f(x)$ 在 x_0 处间断.

2. 间断点分类：设 x_0 为间断点，若要素②成立，称 x_0 为第一类间断点.

当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，称 x_0 为一类可去间断点.

当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，称 x_0 为一类跳跃间断点(或一类不可去间断点).

若要素②不成立，则 x_0 为第二类间断点.

当左、右极限中至少有一个为 $\infty(+\infty, -\infty)$，称 x_0 为二类无穷间断点，否则称 x_0 为二类振荡间断点.

3. 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 右连续；

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 左连续. 显然：$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处有左、右连续.

4. 连续函数性质：

①连续函数和、差、积、商(要求分母 $\neq 0$)仍连续.

②连续函数复合在其有意义点上仍连续.

③若 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 $x = \varphi(y)$ 在对应区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), \ x \in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

④一切初等函数在其定义区间内都连续.

⑤闭区间连续函数性质：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则

a. 最值定理：$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可以达到最大值、最小值.

b. 有界定理：$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

c.介值定理：设 $f(a)=A$，$f(b)=B$，$A\neq B$，对任给的 C：$A\cdots C\cdots B$，则至少存在一点 $\zeta\in(a,b)$，使 $f(\zeta)=C$.

d.零点定理：设 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\zeta\in(a,b)$ 使 $f(\zeta)=0$.

5. 求极限方法(小结)：

①代入法：若 $f(x)$ 为初等函数，$f(x_0)$ 有意义，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

②利用初等数学技巧计算：这些技巧包括变量代替、通分、约分、有理化、积化和差、求和公式、提取公因式等.

③利用两个重要极限计算：

重要极限一：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

重要极限二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

④利用等价无穷小代替求极限(只限于对因子进行等价无穷小代替).

⑤利用两个极限存在准则求极限：

准则Ⅰ：(夹逼定理)设 $v(x)\leqslant f(x)\leqslant u(x)$，又 $\lim v(x)=\lim u(x)=A$，则

$$\lim f(x)=A.$$

准则Ⅱ：单调递增有上界的数列(或单调递减有下界的数列)必有极限.

* 这里单调递增包括单调不降；单调递降包括单调不增.

⑥利用求极限法则及连续函数性质求极限.

二、疑难解析

1. 常数函数 $y=1$ 是幂函数.

答 非. 幂函数形如 $y=x^{\mu}$，但 $\mu\neq 0$.

2. $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 是奇函数.

答 非. 因奇偶函数定义域必关于原点对称.

3. 定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

答 是. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 上任意一个函数，令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，显知 $\varphi(x)$ 为偶函数；$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，显知 $\psi(x)$ 为奇函数，而 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$.