21世纪高校保险专业系列教材

非寿险精算

Feishouxian Jingsuan

李恒琦／编著

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

非寿险精算

Feishouxian Jingsuan

李恒琦/编著

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

非寿险精算/李恒琦编著 .—成都:西南财经大学出版社,2004.1

ISBN 7-81088-103-5

Ⅰ.非... Ⅱ.李... Ⅲ.保险—精算学 Ⅳ.F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 047864 号

非寿险精算

李恒琦 编著

责任编辑:李永福

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网 址:	http://www.xcpress.com/
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电 话:	028-87353785 87352368
印 刷:	郫县科技书刊印刷厂
开 本:	890mm×1240mm 1/32
印 张:	15.375
字 数:	386 千字
版 次:	2004 年 1 月第 1 版
印 次:	2004 年 1 月第 1 次印刷
书 号:	ISBN 7-81088-103-5/F·087
定 价:	24.80 元

前　言

2002 年 9 月，在中国保监会主办的“非寿险精算国际研讨会”上，中国保监会副主席冯晓增指出：精算是保险业稳健经营，科学管理的基础手段之一，其作用已渗透到保险公司经营的各个环节。精算行业进入中国的时间不长，尚处于初建发展时期。目前我国已初步建立了一套相对完整的寿险精算体系，但非寿险精算体系在我国才开始启动，亟须进一步完善，从而全面提高我国财产保险业的经营管理水平，促进财产保险公司的经营方式从粗放式向集约式的转变。这对控制财产保险经营风险，切实保护被保险人利益具有积极而长远的意义。

中国保监会将在未来几年内大力推动非寿险精算制度的发展，建立非寿险精算师职业制度。要达到这个目的，首先就要在精算教育中，加强非寿险精算专业知识的介绍，开设非寿险精算专业课程。目前，我国开设非寿险精算专业课程的学校极少，而且多采用国外引入的非寿险精算教科书。然而，事实上，近 20 年来精算学的应用范围正在迅速扩大，特别是面对我国独特的人口结构、地域环境和经济发展水平，精算学将面临许多更复杂的问题。因此，我们必须清醒地看到，我国的问题不可能完全依赖国外现成

的理论得到解决，我们需要有适合自己国情的教材，需要有一大批各种层次的专门人才致力于精算工作，尤其是对起步较晚的非寿险精算，更需要加强这一专业人才的培养，以促进它的应用和研究。

正是在这样的特殊情况下，笔者集几年来“非寿险精算”的教学实践，以及讲授这门课程中的体会、经验，多年教学中寻找到的非寿险精算知识的内涵之所在，结合近五年参与日本精算师在中国的资格考试工作的有关情况，认为对于研究自然灾害、意外事故的出险频率和损失幅度的分布，以及由此产生的一系列计算问题的非寿险精算，其内容主要分为两大部分：第一部分为保险与概率数理统计之间的关系，有的称风险统计，有的称风险理论，本人认为称保险统计为好；第二部分为非寿险精算技术，主要是以保险公司经营保险业务为核心的数量分析及计算方法，如保险费、保险费率的厘定，准备金的提取等。为此写作了两本书：《保险统计》和《非寿险精算》。其目的：一是为精算专业以及保险专业的本科生、研究生提供学习教材；二是为有志于从事精算职业以及参加精算师资格考试者提供基础教材；三是为保险从业的实际工作者提供实用性读物。为此，在《保险统计》中突出了大数法则在保险经营活动中的核心作用，在《非寿险精算》中对建立的诸多非寿险精算模型进行了实证分析。

由于笔者才疏学浅，时间仓促，书中错误之处在所难免，恳请同行、专家及读者指正。

编者

2003 年 11 月

绪论

精算学，又称精算数学、保险数学。保险精算学是以概率和数理统计为基础，研究保险事故的出险规律、保险事故损失额的分布规律、保险人承担风险的平均损失及其分布规律、保险费和责任准备金等保险具体问题计算方法的应用数学。它是一门以现代数学和数理统计学为手段，从数量方面研究保险业经营管理的各个环节的规律和发展，为保险公司进行科学的决策、提高管理水平、解决实际问题提供依据和工具的专门学科。

精算学起源于寿险的保费计算，它的发展与寿险有着深厚的渊源关系。目前，许多人把精算学理解为寿险专有的学科，实际上随着科学技术的发展，精算技术已逐渐在非寿险的各个领域中得到广泛应用。在第二次世界大战后，适合非寿险的风险理论开始建立，使非寿险的精算技术和理论得到突飞猛进的发展，到20世纪70年代形成了非寿险精算学。它与寿险精算学的内容有较大区别。因为寿险和非寿险在保险标的、保额、保险期限、保险合同的性质、承保风险的均匀性、保费的估算方法上都有所不同，所以对二者的精算方法也不同。对寿险精算来说，一个重要课题就是估计被保险人的生、死、病、残的概率；对非寿险精算来说，

因保险事故造成的损失受很多不确定因素的影响，如何估计未来损失的分布就显得尤其重要。非寿险问题的数量分析较之寿险问题的数量分析更为困难，它有这样三个特点：非寿险是纯粹的风险保险；非寿险承保的风险在多数情况下都存在不均匀性；非寿险的赔付额是一个随机变量。为此，非寿险精算的内容和理论自成体系，已发展成为一门独立的分支学科。

当前社会出现了两个重要的进展，直接影响着精算数学的环境：其一，在20世纪80年代初，瑞士洛桑大学商学院教授兼精算研究所所长盖伯所著《人寿保险数学》的出版，在该书中彻底采用了能更好反映保险机制实质的随机模型，采用概率的途径，使保险的任一数量分析处理均必将越来越多地用到概率论。而当今一代人已十分熟悉概率论，他们很容易地就接受随机模型能更贴切地反映保险的机制这一观点。其二，高效与价格适宜的计算机的问世，使得一度十分繁琐的计算问题在许多场合几乎变得轻而易举了。因而“为何”要进行某项计算的问题就显得比“如何”实施这项计算的问题更为重要了。现在，新的概率途径已在国际精算界获得了普遍的认可。正基于此，精算科学超越了在保险上的应用，目前已广泛应用于金融、投资、社会保障、军事等方面的风险分析。

在美国、日本等先进发达国家，精算学实际上已经成为一门集数学、统计学、计算科学、会计学、金融保险学、经济学于一体的综合性边缘性科学。从事这项工作的精算师已分布在商业保险公司、银行、投资咨询公司、大型跨国公司、会计师事务所、政府机构、社会保险机构，以及私人的财务设计等部门担当重任，成为核心决策人物。

为了发展精算学，培养更多的精算师，本人编著了《非寿险精算》。本书是精算系列课程的基础课教材之一，它涉及非寿险精算的运行基础，主要介绍非人寿保险（如财产损失保险、机动车

辆保险、责任保险）的保险费率、保险费收取方式、保险赔偿额、准备金的建立、责任准备金的提取等方面的数量分析方法和模型运用。在写作上，本书每一章都首先以概率与数理统计为基础建立理论模型，然后根据实务操作的各种因素建立对理论模型的修正方法，从而建立起实务操作中能应用的非寿险精算模型。本书对建立的各个非寿险精算模型都做了实例分析，力求使读者在阅读、学习中，既能知道理论依据，又能通过案例分析，掌握非寿险精算模型的实施方法。

目 录

第一章　损失与理赔分布的拟合方法

由于损失和理赔都是不确定并可以用货币来衡量的，因此常用随机变量来描述。从概率统计中知道，对于随机变量来说，最重要的是知道它的概率分布，在本章将讨论损失分布和理赔分布的拟合方法。它也是讨论各种精算问题的基础。

第一节　损失分布的拟合工具

描述统计包括统计资料的收集以及对收集到的资料用图表和一些概括性的数字做说明等统计方法。对已得到的一批数据资料，常用的描述性统计方法包括计算样本的各种数字特征，如样本均值、样本方差、偏度、峰度、样本中位数及任意分位数、众数等。关于数据的描述性分析，本节介绍直方图、经验分布和样本分位数这三个常用方法，它们是损失分布拟合中的重要工具。

1.1　直方图

表 1－1 列出了 $n=110$ 起汽车碰撞损失额 X 的分组数据，数

据共分为 $m=10$ 组，每组包括组上限，即分组为 (C_{i-1}, C_i)，$i=1, \cdots, m$. 左端点是开区间，右端点是闭区间，其中，$C_0=0$，C_m 的理论值是 $+\infty$，但在实际问题中 C_m 通常是某个有限的数值。表中第 5 列 $\hat{p}_i=f_i/n$ 是每组的频率，当分组数据的组距 $d_i=C_i-C_{i-1}$ 不全相等时，不能直接用此频率画直方图，而要计算消除组距因素影响后的标准化频率 r_i，其计算公式为

$$r_i=\frac{f_i}{nd_i}=\frac{f_i}{n(C_i-C_{i-1})} \tag{1.1.1}$$

由此计算出的标准化频率满足 $d_1r_1+\cdots+d_mr_m=1$

表 1-1　　汽车碰撞损失分组数据

序号 i	组上限 C_i（元）	组距 $d_i=C_i-C_{i-1}$	频数 f_i	频率 $\hat{p}_i$	累积频率	标准化频率 r_i (10^{-3})
1	750	750	2	0.018	0.018	0.022
2	1 500	750	11	0.100	0.118	0.121
3	2 000	500	18	0.164	0.281	0.298
4	3 000	1 000	24	0.218	0.500	0.198
5	4 000	1 000	15	0.136	0.636	0.124
6	5 000	1 000	9	0.082	0.718	0.074
7	6 000	1 000	8	0.073	0.791	0.066
8	7 500	1 500	9	0.082	0.873	0.050
9	10 000	2 500	10	0.091	0.964	0.033
10	12 500	2 500	4	0.036	1.000	0.013
合计	—	12 500	110	1.000	—	—

这里要求 C_m 是有限数值，否则第 m 组的标准化频率 r_m 将为零。当实际资料中没有给出 C_m 的数值时，则要根据具体情况而推定 C_m 的值。一种简单的方法是令第 m 组与第 $m-1$ 组的组距相等，即令

$$C_m=C_{m-1}+(C_{m-1}-C_{m-2})$$

$$=2C_{m-1}-C_{m-2} \tag{1.1.2}$$

本例中计算得 $C_m=12\,500$. 表中最后一列是标准化频率 r_i. 为了书写简便，表中 r_i 的值都乘以了 1 000，因此实际的 r_i 值是表中的值再乘以 10^{-3}. 由此画出直方图如图 1－1 所示，图中横轴的刻度单位是 10^3，纵轴的刻度单位是 10^{-3}.

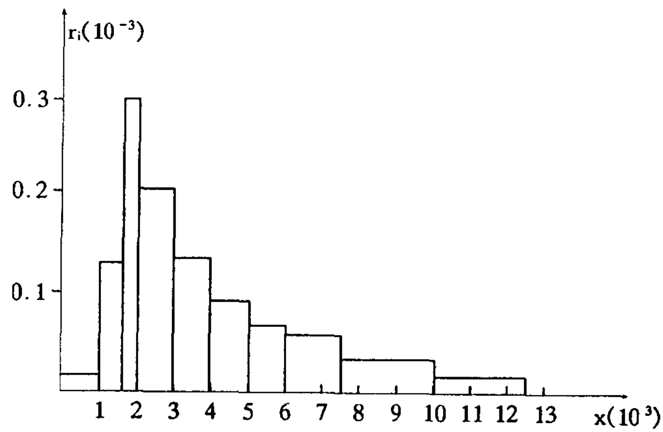

图 1－1　直方图

从直方图看出，该组数据的分布属于右偏型，右侧的尾部下降的速度缓慢。这是多数损失分布所共同具有的性质。

频率直方图中的直方图的底为各组的组距，高为频率/组距，这样就保证了所有直方图面积之和等于 1. 频率折线所代表的函数记为 $f_n(x)$，近似于密度函数，而相应于 $f_n(x)$ 的累积频率函数记为 $F_n(x)$，称为经验分布函数。

由频率直方图可以获得一条频率折线，频率直方图和频率折线都是密度函数的近似，通过光滑过程就能得到频率密度函数曲线和相应的累积频率分布曲线。

例 1－1　某公司在 1970～1989 年间所发生的火灾损失记录如下：

表 1－2

990	1 700	750	1 995	4 000
1 020	2 700	2 980	3 900	150
3 300	750	4 950	2 300	1 300
210	970	100	2 600	1 200
5 200	350	125	200	1 050
2 000	3 800	1 100	555	2 900
2 000	500	1 100	2 500	3 965

试画出损失记录的频率直方图。

解：先对损失记录按从小到大的递增顺序整理为：

100	125	150	200	210
350	500	555	750	750
970	990	1 020	1 050	1 100
1 100	1 200	1 300	1 700	1 995
2 000	2 000	2 300	2 500	2 600
2 700	2 900	2 980	3 300	3 800
3 900	3 965	4 000	4 950	5 200

根据整理后的数据记录可确定以下标志值：

最小损失	最大损失	平均损失	中位数
100	5 200	1 863.143	1 300

把数据按不同规模分组，每组中的记录次数称为频数，频数与记录总数之比即为频率。以 1 000 为组距分组得：

序　号	分　组	频　数	频　率
1	100～1 100	16	45.7%
2	1 101～2 100	6	17.1%
3	2 101～3 100	6	17.1%
4	3 101～4 100	5	14.3%
5	4 101～5 200	2	5.8%
合　计		35	100%

根据此表可画出如下频率直方图和相应的分布函数图：

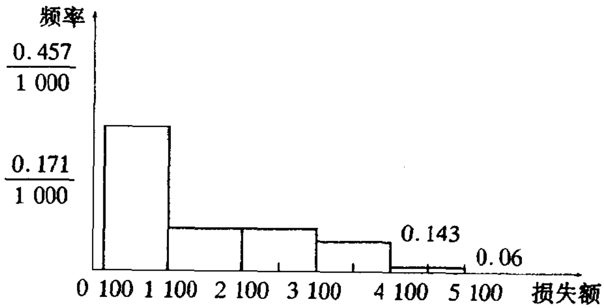

图 1－2　频率直方图

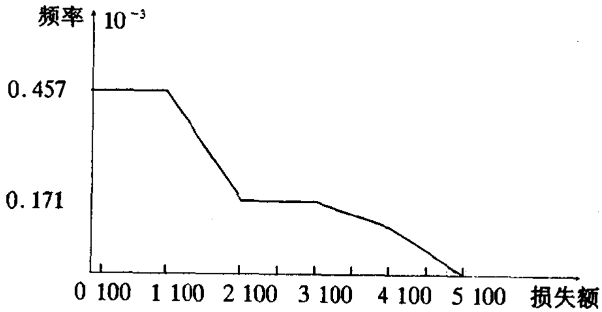

图 1－3　频率折线图

1.2 经验分布

经验分布就是累积频率。设有样本 X_1，X_2，$\cdots X_n$，及 x 轴的分割点 $c_0<c_1<c_2<\cdots<c_{k-1}<c_k$，且一般有：$c_0\leqslant \min(x_i)$，$c_k\geqslant \max(x_i)$，$c_j$（$j=1,2\cdots,k-1$）不与任何样本 x_i 重合。分割点 $c_0<c_1<c_2<\cdots<c_{k-1}<c_k$ 不要求等距离，但必须使连接 $[c_0, F_n(c_0)=0]$，　$[c_1, F_n(c_1)]$，$\cdots$ $[c_{k-1}, F_n(c_{k-1})]$，$[c_k, F_n(c_k)]$等点的折线较好地拟合经验分布函数 $F_n(x)$.

$$F_n(x)=\frac{\{x_1,\cdots x_n\}\text{ 中小于或等于 } x \text{ 的数目}}{n} \quad (1.2.1)$$

$$-\infty<x<\infty$$

$F_n(x)$ 是 x 的跳跃增函数，在每个无重复值 x_i 处跳跃 $1/n$，$0\leqslant F_n(x)\leqslant 1$. 当 x_1，$\cdots x_n$ 互不相等时，把这 n 个值按从小到大的顺序排列，记为 $x_{(1)}<x_{(2)}<\cdots<x_{(n)}$，则

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & x<x_{(0)}\\ k/n & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)} \quad k=1,\cdots,n-1\\ 1 & x\geqslant x_{(n)}\end{cases} \quad (1.2.2)$$

当 X_1，$\cdots$，X_n 是某总体 $X\sim F(x)$ 的独立同分布的样本时，统计学上可以证明 $F_n(x)$ 依概率收敛到 $F(x)$，所以当 n 比较大时，可以用 $F_n(x)$ 近似代替 $F(x)$.

一般地，在保证一定的拟合情况下选用尽可能少的直线段，当然，这样的选择具有一定的主观性，将这些直线段连结而成的折线函数记为 $H(x)$，即为经验分布光滑曲线。其函数表达式为：

$$H(c_0)=0,\ H(x)=H(c_{i-1})+\frac{F_n(c_i)-F_n(c_{i-1})}{c_i-c_{i-1}}x,$$

$$c_{i-1}<x\leq c_i,\ i=1,2\cdots,k \quad (1.2.3)$$

经验分布光滑曲线较经验分布函数更为直观，可以大致看出该样本可能属于的分布族。

此外，由于非寿险中常考虑巨灾损失引起的准备金、再保险安排等问题，损失分布的尾部常常受到特别关注，常常只考虑一定金额值以上的期望值，即用尾部期望函数来描述它。

例 1-2 对表 1-1 中的汽车碰撞损失数据计算经验分布函数，并画出图形。

解：经验分布函数的数值即表 1-1 中的累积频率，其图形如图 1-4. 其中横轴的刻度单位是 10^3. 可以看出，分组数据的经验分布仍是阶梯跳跃形式，每次跳跃的值为 $p_i=f_i/n$. 把经验分布图形的顶点用虚折线连接起来，这条虚折线函数记为 $F_n^*(x)$，称为修匀的经验分布函数。从直观上看，用 $F_n^*(x)$ 做为总体分布函数的近似会更合理，首先这条虚折线是连续的，做为连续型分布函数 F(x) 的近似当然更好。另外，在除去各组端点 C_i 处 $F_n^*(x)$是可异的。分布函数 F(x) 的导函数 $f(x)=F'(x)$ 是概率密度函数，而标准化频率 r_i 对应的直方图也恰好表示分组数据的密度，由此可见用修匀的经验分布 $F_n^*(x)$ 代替 $F_n(x)$ 更合理。对于未分组数据，当 n 比较大时（n>50)，可以先分组然后再求经验分布 $F_n(x)$，由此得到修匀的经验分布 $F_n^*(x)$。当 n 不大时，也可以考虑对经验分布 $F_n(x)$ 做修匀。

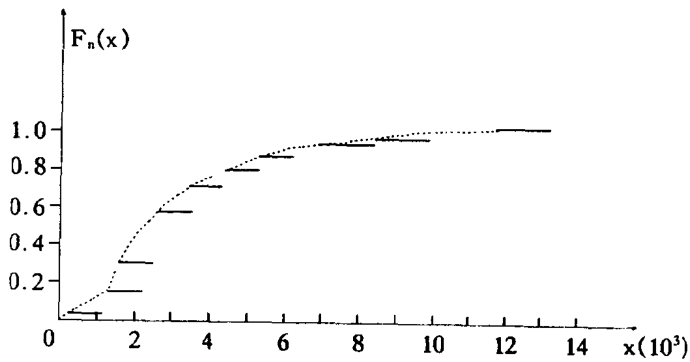

图 1-4 分组数据经验分布图