实变函数入门

高师交流讲义

嘉兴师专

实变函数入门

朱玉揩 著

嘉兴师专

简　　介

本书精选了实变函数的基本内容，注重观点与方法的阐明，较紧密地结合数学分析，由浅入深地讲述了勒贝格理论的主要原理，还用实变函数的知识，以较高的观点讨论了不少与中学数学密切相关的基本数学概念。

本书新颖简明，尤其注意师范性。可作为师专的试用教材，也可作为师范院校的函授课本。对于自学实变函数的读者又是一本容易引起兴趣的入门书。

特约编辑　王 健 明
封面设计　蒋 文 煌

实变函数入门

朱玉揩　薛　峰

嘉兴师专

*

开本：787×1092 1/32　　印张：6　　字数：138千
1984年5月印刷　　　　印数：1—5500

编 者 的 话

本讲义是我们从77年起讲授《实变函数》课程的实践中形成的。

为适合师专的特点，嘉兴师专数学科曾组织部分同志讨论，由朱玉揩、张本仁同志执笔拟写了《师专实变函数教学大纲》(讨论稿)，并在81年全国师专天津会议上作过交流。79年开始，我们边编边教，由朱玉揩、薛峰同志编写了《实变函数入门》(初复稿)。作为交流讲义，我们广泛征求过兄弟院校专家、同行以及学生们的意见，至83年已四易其稿，充分采纳了各方面的中肯建议。82年起，讲义已作为我科《实变》课程的正式教材。

83年8月，朱玉揩同志作为代表在全国师范院校“实变与泛函”教学交流会上就自编适用教材的特点作了介绍，并记入“会议纪要”。会后，不少兄弟院校要求进行教材交流，目前，已有三十余所院校决定作试用教材。最近，我们对讲义又作了进一步的修改和补充，编出了《实变函数入门》(铅印讲义)，旨在使教材更能适合教学要求，更能体现出师范性。

本讲义在以下几方面作了大胆的尝试：

1.对通常《实变》内容作了精简，运用逼近的思想，注意观点的阐明、突出了Lebesgue理论的三个原则：

(1) 点集(可测集)几乎(近于)是区间或区间之并；

(2) 函数(可测函数)几乎(近于)是连续函数；

(3) 收敛(几乎处处收敛)的函数列在测度有限的集合上是几乎(近于)一致收敛的。

2.由浅入深地讲述Lebesgue理论的主要原理，采用的方法介于Lebesgue方法与Riesz方法之间，该方法兼两家之长，

简明易懂，便于推广。

3.较紧密结合数学分析，注意《实变》与《分析》间的比较与联系，并用《实变》理论解决《分析》中一些较难处理的问题。

4.阐明了重要的几种收敛的充要条件，方便地导出收敛关系图。

5.为了正确运用逻辑思维规律，也为了简化叙述，一开头增设了逻辑一节。

6.为体现师范性，用《实变》知识较详尽地阐述了诸如次序、大小、个数、长度、面积、曲线、函数等与中学数学密切相关的基本数学概念。

北京大学冷生明教授、周民强副教授、李树芳老师，华东师范大学张奠宙副教授，南京邮电学院王健明老师仔细地审阅了我们的初复稿，提出了许多宝贵的意见。冷先生还对定义、定理的叙述作了全面的修改。本书采用了周先生讲义中的一些精辟论述。张先生自始至终指导讲义的编写工作，还为本书作了序。杭州大学陆寿坤老师、上海师院王晓斐老师、赣南师专冯长彬老师、温州师专王铭新、陈永言老师等都对本讲义提供过不少有益的建议。在编写讲义的过程中，还得到华东师范大学程其襄教授和杭州大学谢庭藩教授的热情鼓励；更是得到嘉兴师专校、科领导的大力支持，并得到教研组同志们的热忱帮助，尤其是王湫石、张本仁和沈尔云同志。另外，此讲义能以铅印形式与读者见面，是得到了南京邮电学院领导、印刷厂和数学教研室的热情支持。在此，我们谨向有关领导、专家、老师和同志们表示衷心的感谢。

限于我们的水平，加之时间仓促，本讲义中缺点甚至错误不可避免，殷切希望得到专家、同行和读者的批评指正。

1984年3月于湖州

序

《实变函数入门》一书，我觉得很有特点，简洁明瞭，尤其注意师范性，因而是一次很有意义的尝试。

我校(华东师大)是《实变函数》(师范院校用)教学大纲的起草单位。1980年，上海宝山会议上正式通过了该大纲后，程其襄教授和我们又根据大纲编写了《实变函数和泛函分析基础》一书(即将由人民教育出版社出版)。我们在编写过程中，一方面注意为进一步学习现代数学知识打下基础，另一方面也注意了师范性。但是，由于各种原因，该书涉及面还比较宽，要求还是比较高，师范性的考虑也很不够。对于一部分师范专科学校来说，使用起来可能有许多不便之处。

现在，朱玉堦老师主编的《实变函数入门》一书，根据师专的特点，作了一些可贵的努力，也许可以填补这方面的"空白"罢！

我想，对一个合格的中学教师来说，下列问题是应该知道的：什么是多少和大小？什么是次序？复数为什么没有大小？什么是曲线？曲线会不会填满一个正方形？什么是长度？什么是面积？是否每个集合都有长度或面积？什么是集合？集合论基础是否完全可靠？等等。这些问题和中学数学密切相关，又要用《实变函数》知识加以严格叙述。如果对于综合性大学的学生来说，这些问题比较次要，那么对师范院校来说，就是十分重要的了。因此，《实变函数入门》一书对此作了努力，我认为是很可贵的。

另外，《实变函数入门》删简了一些次要内容，却保持勒贝格积分论的主干，对于想进一步学习现代分析知识的读者，它

仍然给了一个扎实的基础，作者在书中的处理是简洁、明快，容易弄懂的。

总之，我认为《实变函数入门》是一本很有特色的书，对于三年制的师专来说，可能更为合适。我们希望，通过师范院校《实变函数》课程教师的共同努力，包括本书作者的尝试，能将《实变函数》的教学提到一个更高的水平。

华东师范大学数学系函数论教研室
张 奠 宙
1983.10.17

目　　录

第一章 集合论初步

集合论是现代数学的基础†，集合论的观点与方法渗入数学分析，便产生了实变函数论．本章只介绍集合论的初步知识，为下面各章的学习提供必要的准备．为了正确运用逻辑思维规律，也为了简化叙述，开头一节我们简单介绍常用的逻辑符号及其逻辑律．

◀内容提要▶ 逻辑符号与逻辑律；集合的对等；可数集与不可数集；次序与大小；基数与序数。

§1 逻辑与“反话”

我们知道，“数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限”的分析定义是“任给 $\varepsilon>0$，存在某个 N_0，使得 $n>N_0$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$”；

其反面，“$\{x_n\}$ 不以 a 为极限”可表达为“存在某个 $\varepsilon_0>0$，无论 N 怎样大，总存在某个 $n_0>N$，使得 $|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$”．

若引进符号“$\forall$”，“$\exists$”，“$\Rightarrow$”，“$\ni$”分别表示“每一个”，“存在”，“若…，则…”，“使得”，则我们可把上述两个表述简洁地写成

$$\text{“}\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0,\ \ni n>N_0\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon\text{”};\tag{1.1.1}$$

$$\text{“}\exists\varepsilon_0>0,\ \forall N,\ \exists n_0>N,\ \ni|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0\text{”}.\tag{1.1.2}$$

上述两式的关系如何？初步看上去，似乎是将“$\forall$”、“$\exists$”

---

† 集合论是十九世纪的数学家试图为微积分奠定坚实的基础而产生的．集合论公认的创始人是德国数学家康托（Georg Cantor，1845—1918）．

互换，并将最后的不等号换成相反的情形．但进一步比较就发现，还有两个符号没有处理好．(1.1.1) 中有"$\Rightarrow$"，但(1.1.2)中没有；另外"$\ni$"的位置在两式中也不同．所以两者的正反规律尚未完全揭示清楚．

为了使 (1.1.1) 与 (1.1.2) 形式地"对偶"起来，我们暂时去掉符号"$\Rightarrow$"与"$\ni$"，并在 (1.1.1) 中添加一个"$\forall$"，这样得到

"$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0$，$\forall n>N_0$，$|x_n-a|<\varepsilon$"； (1.1.1′)

"$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，$\exists n_0>N$，$|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$"． (1.1.2′)

于是，两种表达完全"对偶"了，但美中不足的地方是，(1.1.1′) 不如 (1.1.1) 在语气上更接近于极限的标准定义．因此我们有必要进一步揭示极限及其"反话"的逻辑关系．

目前，逻辑符号在使用上并不统一，本讲义采用下列七个：

表 1—1

逻辑符号	$\forall$	$\exists$	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Longleftrightarrow$
意　　义	每一个	存在	非	且	或	若…，则…	当且仅当

表中"$\Longleftrightarrow$"可用"$\equiv$"代替，也可读作"等价于"或"充分必要"．

利用逻辑符号，我们给出如下简明的对比表达：

表 1—2

$x_n\to a\ (n\to\infty)$	$x_n\not\to a\ (n\to\infty)$
$\forall\varepsilon>0$， $\exists N$， $\forall n$， $n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$．	$\exists\varepsilon>0$， $\forall N$， $\exists n$， $n>N\wedge|x_n-a|\geqslant\varepsilon$．

用通常的语言表达，则分别为

表 1—3

$\{x_n\}$以 a 为极限	$\{x_n\}$不以 a 为极限
任给$\varepsilon>0$， 总存在某个N_0， 对于每一个n， 若$n>N_0$，则 $\|x_n-a\|<\varepsilon$.	存在某个$\varepsilon_0>0$， 对任意N， 总存在某个n_0， 虽$n_0>N$，但$\|x_{n_0}-a\|\geqslant\varepsilon_0$.

在表 1—3 中，左边将N换成N_0，右边将ε、n换成ε_0、n_0是为了强调某一个.

利用以下三个逻辑律，表 1—2 左右两边可以互推.

逻辑律1° $\neg[\forall t,\ p(t)]\equiv[\exists t,\ \neg p(t)]$;

逻辑律2° $\neg[\exists t,\ p(t)]\equiv[\forall t,\ \neg p(t)]$;

逻辑律3° $\neg[p\Rightarrow q]\equiv[p\wedge\neg q]$.

我们可这样来分别理解它们:

“所有命题都成立”的反面是“其中有一个命题不成立”;

“诸命题中有一个命题成立”的反面是“所有的命题都不成立”;

“若条件p成立，则结论q成立”的反面是“虽条件p成立，但结论q不成立”.

对于逻辑律 1° 与 2°，学了数学分析后已经相当熟悉，但对逻辑律 3° 往往没有足够重视.

借助于上述三个逻辑律，就可由表 1—2 的左边推出右边.

$$[x_n\not\to a,\ n\to\infty]$$

$$\equiv\neg[x_n\to a,\ n\to\infty]$$

$$\equiv\neg[\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n,\ n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon]$$

$$\equiv[\exists\varepsilon>0,\ \neg[\exists N,\ \forall n,\ n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon]]$$
$$\equiv[\exists\varepsilon>0,\ \forall N,\ \neg[\forall n,\ n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon]]$$
$$\equiv[\exists\varepsilon>0,\ \forall N,\ \exists n,\ \neg[n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon]]$$
$$\equiv[\exists\varepsilon>0,\ \forall N,\ \exists n,\ n>N\wedge\neg[|x_n-a|<\varepsilon]]$$
$$\equiv[\exists\varepsilon>0,\ \forall N,\ \exists n,\ n>N\wedge|x_n-a|\geqslant\varepsilon]$$

熟悉了逻辑律之后，上述手续可以简化. 例如由表 1—2 的左边写出它的右边，只须将“$\forall$”与“$\exists$”互换，将“$n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$”换成它的反面“$n>N\wedge|x_n-a|\geqslant\varepsilon$”.

作为逻辑律 1° 与 2° 的特殊情况，我们有:

$$\left.\begin{aligned}\neg[p\wedge q]&\equiv[\neg p\vee\neg q]\\ \neg[p\vee q]&\equiv[\neg p\wedge\neg q]\end{aligned}\right\}\text{(对偶关系)}$$

另外显然有:

$$\neg[\neg p]\equiv p,$$

$[p\Rightarrow q]\equiv[\neg q\Rightarrow\neg p]$.(原命题等价于逆否命题)

借助逻辑律，我们可“快速”处理下面两例.

例1.1.1　数列$\{x_n\}$

$$\text{“}\{x_n\}\text{有界”}\equiv[\exists M_0,\ \forall n,\ |x_n|\leqslant M_0];$$
$$\text{“}\{x_n\}\text{无界”}\equiv\neg[\exists M_0,\ \forall n,\ |x_n|\leqslant M_0]$$
$$\equiv[\forall M,\ \exists n_0,\ |x_{n_0}|>M].$$

例1.1.2　若$\{x_n\}$为有界数列，则

$$\text{“}\sup_n\{x_n\}=b\text{”}$$
$$\equiv[\forall n,\ x_n\leqslant b]\wedge[\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\ x_{n_0}>b-\varepsilon];$$
$$\text{“}\sup_n\{x_n\}\neq b\text{”}$$
$$\equiv\neg[\forall n,\ x_n\leqslant b]\vee\neg[\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\ x_{n_0}>b-\varepsilon]$$
$$\equiv[\exists n_0,\ x_{n_0}>b]\vee[\exists\varepsilon_0>0,\ \forall n,\ x_n\leqslant b-\varepsilon_0].$$

即 $\{x_n\}$ 不以 b 为上确界是指:

1） b 不是 $\{x_n\}$ 的上界，

或 2） 有比 b 更小的数为 $\{x_n\}$ 的上界.

§2 集合的概念及集合之间的关系

集合或集是数学中的一个基本概念. 在中学数学里已介绍过一些集合知识. 但真正要把集合说清楚并不容易，它如同几何学中的点、线、面一样，是一个原始概念. 在现代集合论里，是用公理定义的. 本课程不涉及一般的集合论，我们用通常的描述方法进入这一领域. 例如自然数全体组成的集合称为自然数集合，记为 N. 同样我们可以描述有理数集合 Q，实数集合 R，复数集合 C 等. 又如 $[a, b]$ 上的连续函数的全体组成了一个集合，记为 $C[a, b]$. 一般地，把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来考虑时，这个整体就称为一个集合，简称为集，其中的成员称为这个集合的元素或元. 给定一个集合，我们就应该能明确地判别任何一个个体是否在此集合中，其根据就是组成此集合元素的确定性.

通常我们用大写字母 A，B，X，Y …表示集合，小写字母 a，b，x，y …表示元素. 元素 x 在集合中记为 $x\in A$；否则，记为 $x\overline{\in} A$. 例如 $\frac{1}{3}\in Q$，$\sqrt{2}\overline{\in} Q$，但 $\sqrt{2}\in R$.

表示集合有两种方法，其一是列举法. 例如由数 1，2，3，4，…，100组成的集合 A，用

$$A=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$$

来表示，也就是说在花括号内将其元素一一列举出来. 其二是描述法. 例如上述集合中的元素具有特征：它们是“自然数且不超过 100”. 所以该集合又可写成

$$A=\{x;\ x\in N \wedge x\leqslant 100\}.$$

或按通常写法 $A=\{x;\ x\in N,\ x\leqslant 100\}$，其中逗号“，”表示“且”.

一般地，$\{x;\ p(x)\}$ 表示具有性质 $p(x)$ 的 x 的全体. 于是

$$x\in\{x;\ p(x)\}\Longleftrightarrow x \text{ 具有性质 } p(x).$$

例如，$2\in\{x;\ (x-2)(x-3)=0\}$，因为当 $x=2$ 时，$(x-2)(x-3)=0$.

又如，$4\overline{\in}\{x;\ (x-2)(x-3)=0\}$，因为当 $x=4$ 时，$(x-2)(x-3)\neq 0$. 即 $x=4$ 时，$(x-2)(x-3)=0$ 不成立.

由上可见，当 x_0 取定时，$p(x_0)$ 即表示一个命题. $p(x_0)$ 为真时，$x_0\in\{x;\ p(x)\}$；反之，若 $p(x_0)$ 为假时，则 $x_0\overline{\in}\{x;\ p(x)\}$.

$\{x;\ p(x)\}$ 也可表成 $\{x\mid p(x)\}$ 或 $\{x:\ p(x)\}$.

集合之间的关系有包含、相等、相交、相离等.

定义1.2.1 对于集合 A 与 B，若 A 的元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的一个子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

这定义可用符号表示为

$$\text{“}A\subset B\text{”}\Longleftrightarrow\text{“}\forall x:\ x\in A\Rightarrow x\in B\text{”}.$$

例 1.2.1 $\{1,2,3\}\subset\{1,2,3,4\}$.

例 1.2.2 $N\subset Q$，$Q\subset R$.

例 1.2.3 $\{x;\ f(x)>1\}\subset\{x;\ f(x)>0\}$.

易见，集合的包含关系有如下性质：

1° $A\subset A$； （反射性）

2° $A\subset B,\ B\subset C\Rightarrow A\subset C$； （传递性）

显然，

$$\text{“}\forall x:\ x\in A\Rightarrow x\in B\text{”}\Longleftrightarrow\text{“}\forall x:\ x\overline{\in} B\Rightarrow x\overline{\in} A\text{”}.$$

考察集合$\{x; x \neq x, x \in R\}$，它不含任何元素，这是因为不等于自身的实数是不存在的．我们把这种不含任何元素的集合，称为空集合，记为$\varnothing$(丹麦文，读“欧”)．若集合的元素只有有限个（空集的元素个数认为是零)，则称它为有限集．一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集．

例 1.2.4　$\{x; x^2+1=0, x \in R\} = \varnothing$.

我们认为空集$\varnothing$是一切集合的子集．即$\forall A$，$\varnothing \subset A$．其合理性的理由如下：

$$\forall x: x \bar{\in} A \Rightarrow x \bar{\in} \varnothing.$$

定义 1.2.2　若集合A与B的元素完全相同，则说A与B相等，记作$A=B$．用符号表示：

$$\text{“}A=B\text{”} \Longleftrightarrow \text{“}\forall x: x \in A \Longleftrightarrow x \in B\text{”}.$$

由此易见，

$$\text{“}A=B\text{”} \Longleftrightarrow \text{“}(A \subset B) \wedge (A \supset B)\text{”}.\dagger$$

上式是证明两个集合相等的基本方法．

例1.2.5　若$A=\left\{x; f(x)=\dfrac{1}{2}\right\}$，$B=\{x; 2f(x)=1\}$，则　$A=B$.

事实上，

1)　$\forall x$: $x \in A \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2f(x)=1 \Rightarrow x \in B$.

$\therefore A \subset B$;

2)　$\forall x$:　$x \in B \Rightarrow 2f(x)=1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x \in A$.

$\therefore B \subset A$.

从而　$A=B$.　　□（此处□表示证明终结，后同）

---

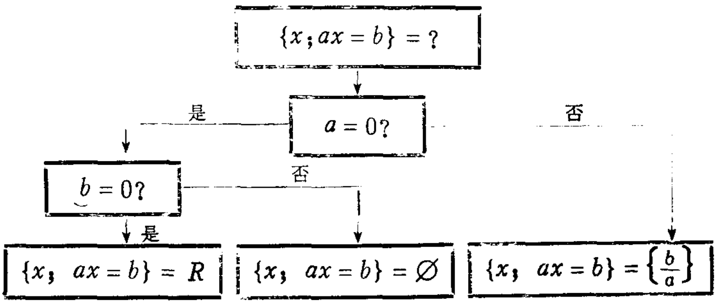
† 这表明集合中的包含关系“$\subset$”还具有性质：

(3) $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A=B$　(反对称性)

例 1.2.6 设 a，$b\in R$．在实数范围内求方程 $ax=b$ 的解集（满足 $ax=b$ 的一切 x 的集合）.

解 可将思考过程列表如下：

表 1—4



读者可按通常表达方式，写出完整解答.

定义 1.2.3 对于集合 A 与 B，若 $A\subset B$，且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的一个真子集．记为 $A\subsetneqq B$．（或 $A\subsetneq B$）.

此时，1) $\forall x$:

$x\in A\Rightarrow x\in B$；

2) $\exists x_0$:

$(x_0\in B)\wedge(x_0\notin A)$.

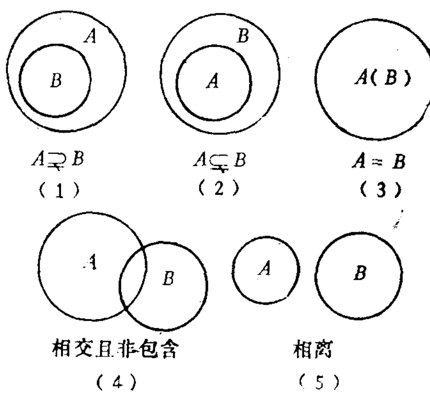


图 1—1

例 1.2.7 $\{1,2\}\subsetneqq\{1,2,3\}$.

例 1.2.8 $N\subsetneqq Q\subsetneqq R\subsetneqq C$.

任意两个集合 A、B 之间的关系如图1—1所示.