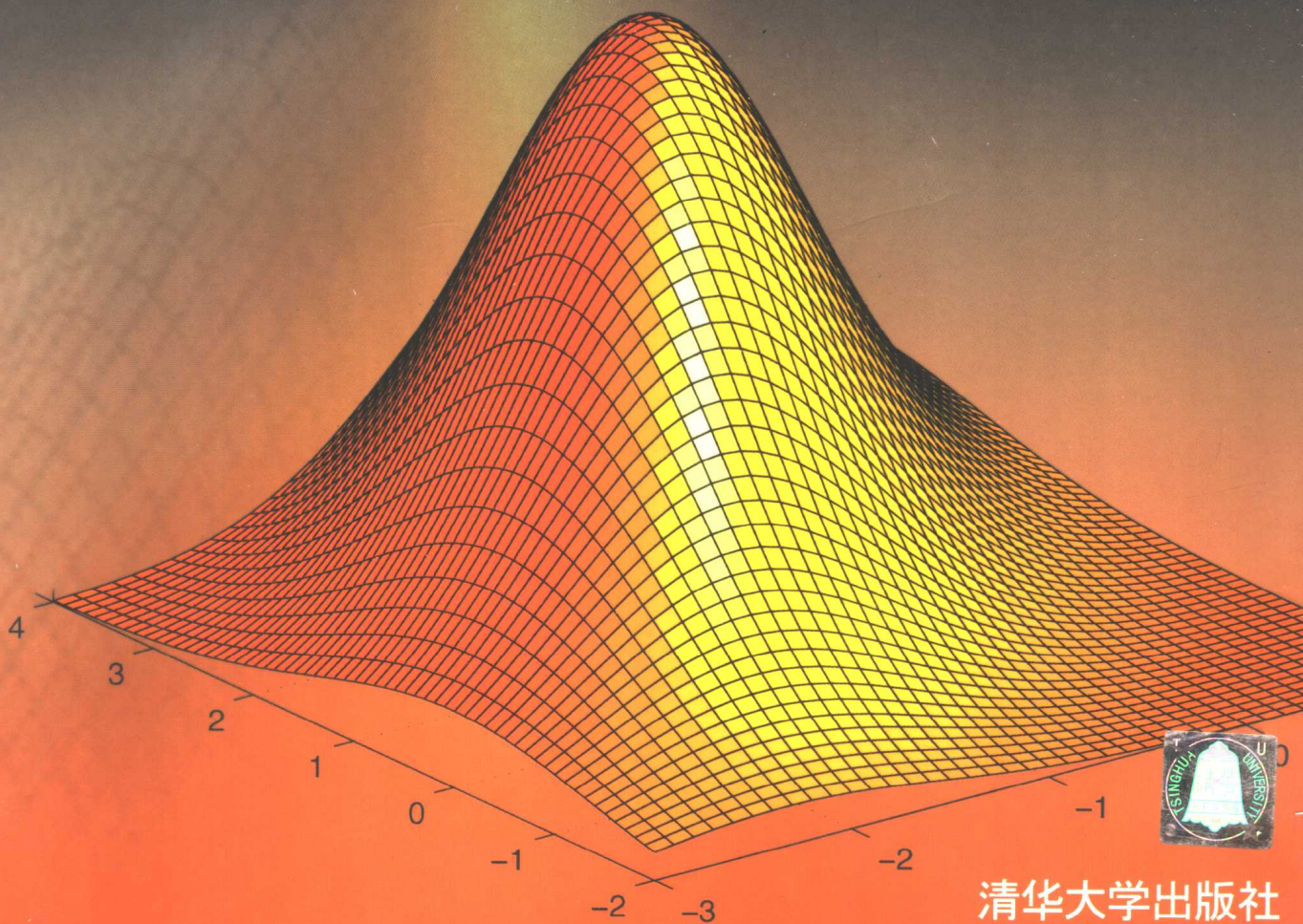




# 高等应用数学问题的 MATLAB求解

薛定宇 陈阳泉 著



清华大学出版社

# 高等应用数学问题的 MATLAB 求解

薛定宇 陈阳泉 著

清华大学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书首先介绍了 MATLAB 语言程序设计的基本内容,在此基础上系统介绍了各个应用数学领域的问题求解,如基于 MATLAB 的微积分问题、线性代数问题的计算机求解、积分变换和复变函数问题、非线性方程与最优化问题、常微分方程与偏微分方程问题、数据插值与函数逼近问题、概率论与数理统计问题的解析解和数值解法等。还介绍了较新的非传统方法,如模糊逻辑与模糊推理、神经网络、遗传算法、小波分析、粗糙集及其分数阶微积分学等领域。

本书可作为一般读者学习和掌握 MATLAB 语言的教科书,也可作为高校理工科各类专业的本科生和研究生学习计算机数学语言的教材和参考书,可供科技工作者、教师等作为学习和应用 MATLAB 语言解决实际数学问题的参考资料,还可作为读者查询某数学问题求解方法的手册。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13901104297 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

MATLAB, Simulink, Symbolic Toolbox, Optimization Toolbox, Statistics Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Signal Processing Toolbox, Splines Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, Neural Network Toolbox 等为 The MathWorks 公司的注册商标。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学问题的 MATLAB 求解/薛定宇,陈阳泉著. —北京:清华大学出版社,2004  
ISBN 7-302-09311-3

I. 高… II. ①薛…②陈… III. 应用数学-计算机辅助计算-软件包, MATLAB-高等学校-教材  
IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087084 号

出 版 者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

责任编辑:欧振旭

封面设计:秦 铭

印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×260 印张:27 字数:623 千字

版 次:2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-09311-3/O·392

印 数:1~6000

定 价:43.00 元(附光盘 1 张)

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系  
调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

# 前 言

美国 The MathWorks 公司推出的 MATLAB 语言一直是国际科学界应用和影响最广泛的三大计算机数学语言之一。从某种意义上讲,在纯数学以外的领域中, MATLAB 语言有着其他两种计算机数学语言 Mathematica 和 Maple 无法比拟的优势和适用面。在很多领域, MATLAB 语言是科学研究者首选的计算机数学语言。目前关于 MATLAB 语言和应用的书籍在国际上数以千计,但从其覆盖面和应用水平来说,往往难以达到日益增长的 MATLAB 语言使用者的要求。国内外出版的著作从涵盖面及深度与广度上缺乏高层次、全面系统介绍高等应用数学问题各个分支的计算机求解的书籍<sup>①</sup>。本书试图填补这个空白,在更高层次上系统介绍 MATLAB 语言在高等应用数学的各个分支中的应用,包含的应用数学分支为微积分、线性代数、积分变换和复变函数、非线性方程与最优化、常微分方程与偏微分方程、数据插值与函数逼近、概率论与数理统计以及新的非传统方法,如模糊逻辑与模糊推理、神经网络、遗传算法、小波分析、粗糙集及分数阶微积分学等。本书不同于现有的类似于 MATLAB 手册的著作,不是 MATLAB 有什么内容就介绍什么内容,而是根据系统求解数学问题的需要,组织 MATLAB 语言求解的材料,由浅入深地介绍数学问题的求解方法。本书比作者所见识到的国内外任何一部基于 MATLAB 语言的应用数学著作都要全面、系统。

由于工作性质,作者接触过众多非数学专业的本科生、研究生、博士生,感觉大多数学生缺乏对应用数学问题的较全面了解,他们对什么问题能用数学描述、什么样的数学问题能求解不清楚,以致于在学习与研究中走了很多弯路。作者坚信,通过阅读本书可以使读者的数学能力,尤其是数学问题求解能力上一个很大的台阶。即使读者在阅读本书时对有些数学公式理解得不太透彻,只要学习本书的 MATLAB 求解方法,也能容易地求解类似的数学问题。本书的重要目标是让数学基础不深厚的读者同样能轻易利用计算机解决较高深的应用数学问题。

本书是为东北大学自动化专业新课程“MATLAB 与数学运算”编写的教材,但内容完全脱离了自动化专业的背景,同样适用于其他的理工科专业的本科生、研究生教学。本书的大部分内容在东北大学自动化专业本科生以及全校研究生选修课中讲授过,受到普遍欢迎。由于 MATLAB 语言在很多理工科专业的后续课程中有很大的作用,建议有条件的学校也开设相应的课程,使学生能认识和掌握该语言,提高应用数学问题求解的水平。为此,本书配有全套的、适用于计算机辅助教学的 CAI 课件材料。

作者从 1988 年开始系统地使用 MATLAB 语言进行程序设计与科学研究,积累了丰富的第一手经验,也了解 MATLAB 语言的最新动态。作者用 MATLAB 语言编写的程序曾作为英国 Rapid Data 软件公司的商品在国际范围内发行,新近编写的几个通用程序在

<sup>①</sup>由对 The MathWorks 图书网站列出的全部相关书目及目录的分析得出的结论。

The MathWorks 公司的网站上可以下载, 其中反馈系统分析与设计程序 CtrlLAB 长期高居控制类软件的榜首, 已经用于国际上很多高校的实际教学。

多年来, 作者一直在试图以最实用的方式将 MATLAB 语言介绍给国内的读者, 并在清华大学出版社出版了 4 部有关 MATLAB 语言及其应用方面的著作, 受到了国内外广大中文读者的普遍欢迎, 其中, 1996 年出版的《控制系统计算机辅助设计——MATLAB 语言与应用》一书被公认为国内关于 MATLAB 语言方面书籍中出版最早、影响最广的著作, 被国内期刊文章引用近千次。

本书合作者陈阳泉博士现在美国 Utah 州立大学任教, 任自组织与先进智能控制中心执行负责人, IEEE 学会高级会员, 在先进智能控制、分数阶系统理论及设计、机器人导航与控制等领域均有很深的造诣和学术影响, 2002 年与本人合作在清华大学出版社出版的《基于 MATLAB/Simulink 的系统仿真技术与应用》在中文读者中有很大影响, 并被广为引用。

本书主要介绍目前最新的 MATLAB 7.0 版, 即 MATLAB Release 14, 但相应的内容对 MATLAB 及相关工具箱的版本依赖程度不高, 所以这里介绍的算法函数绝大部分均可以在 MATLAB 6.x 甚至更早期版本下正常运行。同时, 考虑到在将来很长一段时间内两个版本可能并存, 所以在很多地方也将介绍 MATLAB 6.x 的解法。

本书从使用者的角度出发, 并结合作者数十年的实际编程经验和丰富的教学经验, 系统地介绍 MATLAB 语言的编程技术及其在科学运算中的应用, 书中融合了作者的许多编程思想和第一手材料, 内容精心剪裁, 相信仍然会受到读者的欢迎。

作者的一些同事、同行和朋友也先后给予作者许多建议和支持, 包括东北大学信息学院的徐心和教授、东北大学信息学院院长王福利教授、北京交通大学机电学院院长朱衡君教授等, 还有在互联网上交流的众多知名的和不知名的同行与朋友。本书部分内容由博士生张雪峰、潘峰编写, 部分辅助程序与模型由硕士生陈大力同学编写, 计算机辅助教学材料由硕士生刘莹莹同学开发, 在此表示深深的谢意。

本书的出版得到了清华大学出版社欧振旭编辑细心的加工, 得到清华大学出版社蔡鸿程主编的关怀, 本书的出版还得到了美国 The MathWorks 公司图书计划的支持, 在此表示谢意, 并特别感谢 Noami Fernandez 女士、Courtney Esposito 先生为作者提供的各种帮助, 感谢大连威尔思德科技发展有限公司王龙飞先生为教学网站 MATLAB 大观园提供的各种帮助。

由于作者水平所限, 书中的缺点和错误在所难免, 欢迎读者批评指教。

谨以此书献给我的妻子杨军和女儿薛杨。在编写本书时花费了大量本该陪伴她们的业余时间, 没有她们一如既往的鼓励、支持和理解, 本书不可能顺利完成。

薛定宇

2004 年 7 月 6 日于沈阳东北大学

# 目 录

<b>第1章 计算机数学语言概述</b>	<b>1</b>
1.1 数学问题计算机求解概述	1
1.1.1 为什么要学习计算机数学语言	1
1.1.2 数学问题的解析解与数值解	3
1.1.3 数学运算问题软件包发展概述	4
1.2 计算机数学语言概述	5
1.2.1 计算机数学语言	5
1.2.2 3个代表性计算机数学语言	6
1.3 关于本书及相关内容	6
1.3.1 本书框架设计及内容安排	6
1.3.2 本课程与其他相关课程的关系	7
1.4 本章要点简介	8
1.5 习 题	8
<b>第2章 MATLAB 语言程序设计基础</b>	<b>9</b>
2.1 MATLAB 程序设计语言基础	10
2.1.1 MATLAB 语言的变量与常量	10
2.1.2 数据结构	10
2.1.3 MATLAB 的基本语句结构	12
2.1.4 冒号表达式与子矩阵提取	13
2.2 基本数学运算	14
2.2.1 矩阵的代数运算	14
2.2.2 矩阵的逻辑运算	15
2.2.3 矩阵的比较运算	16
2.2.4 解析结果的化简与变换	17
2.2.5 基本数论运算	18
2.3 MATLAB 语言的流程结构	20
2.3.1 循环结构	20
2.3.2 转移结构	22
2.3.3 开关结构	23
2.3.4 试探结构	24
2.4 函数编写与调试	24

2.4.1	MATLAB 语言函数的基本结构	25
2.4.2	可变输入输出个数的处理	28
2.4.3	inline 函数与匿名函数	29
2.5	二维图形绘制	29
2.5.1	二维图形绘制基本语句	29
2.5.2	其他二维图形绘制语句	32
2.5.3	隐函数绘制及应用	33
2.5.4	图形修饰	34
2.6	三维图形表示	37
2.6.1	三维曲线绘制	37
2.6.2	三维曲面绘制	37
2.6.3	三维图形视角设置	41
2.7	本章要点简介	42
2.8	习 题	44
<b>第 3 章</b>	<b>微积分问题的计算机求解</b>	<b>46</b>
3.1	微积分问题的解析解	46
3.1.1	极限问题的解析解	46
3.1.2	函数导数的解析解	48
3.1.3	积分问题的解析解	53
3.2	函数的级数展开与级数求和问题求解	56
3.2.1	Taylor 幂级数展开	56
3.2.2	Fourier 级数展开	59
3.2.3	级数求和的计算	61
3.3	数值微分	63
3.3.1	数值微分算法	64
3.3.2	中心差分方法及其 MATLAB 实现	65
3.3.3	二元函数的梯度计算	66
3.4	数值积分问题	68
3.4.1	由给定数据进行梯形求积	68
3.4.2	单变量数值积分问题求解	70
3.4.3	双重积分问题的数值解	73
3.4.4	三重定积分的数值求解	75
3.5	曲线积分与曲面积分的计算	76
3.5.1	曲线积分及 MATLAB 求解	76
3.5.2	曲面积分与 MATLAB 语言求解	78
3.6	本章要点简介	80
3.7	习 题	81



<b>第 4 章 线性代数问题的计算机求解</b>	84
4.1 特殊矩阵的输入	84
4.1.1 数值矩阵的输入	84
4.1.2 符号矩阵的输入	89
4.2 矩阵基本分析	91
4.2.1 矩阵基本概念与性质	91
4.2.2 逆矩阵与广义逆矩阵	98
4.2.3 矩阵的特征值问题	103
4.3 矩阵的基本变换	107
4.3.1 矩阵的相似变换与正交矩阵	107
4.3.2 矩阵的三角分解和 Cholesky 分解	108
4.3.3 矩阵的 Jordan 变换	113
4.3.4 矩阵的奇异值分解	115
4.4 矩阵方程的计算机求解	118
4.4.1 线性方程组的计算机求解	118
4.4.2 Lyapunov 方程的计算机求解	122
4.4.3 Sylvester 方程的计算机求解	125
4.4.4 Riccati 方程的计算机求解	127
4.5 非线性运算与矩阵函数求值	128
4.5.1 面向矩阵元素的非线性运算	128
4.5.2 矩阵函数求值	128
4.6 本章要点简介	136
4.7 习 题	138
<b>第 5 章 积分变换与复变函数问题的计算机求解</b>	141
5.1 Laplace 变换及其反变换	141
5.1.1 Laplace 变换及反变换定义与性质	141
5.1.2 Laplace 变换的计算机求解	142
5.2 Fourier 变换及其反变换	146
5.2.1 Fourier 变换及反变换定义与性质	146
5.2.2 Fourier 变换的计算机求解	147
5.2.3 Fourier 正弦和余弦变换	149
5.2.4 离散 Fourier 正弦、余弦变换	151
5.3 其他积分变换问题及求解	152
5.3.1 Mellin 变换	152
5.3.2 Hankel 变换及求解	153
5.4 Z 变换及其反变换	154
5.4.1 Z 变换及反变换定义与性质	154



5.4.2	Z 变换的计算机求解	155
5.5	复变函数问题的计算机求解	156
5.5.1	留数的概念与计算	156
5.5.2	有理函数的部分分式展开	158
5.5.3	基于部分分式展开的 Laplace 变换	164
5.5.4	封闭曲线积分问题计算	165
5.6	本章要点简介	166
5.7	习 题	168
<b>第 6 章</b>	<b>代数方程与最优化问题的计算机求解</b>	<b>170</b>
6.1	代数方程的求解	170
6.1.1	代数方程的图解法	170
6.1.2	多项式型方程的准解析解法	172
6.1.3	一般非线性方程数值解	176
6.2	无约束最优化问题求解	179
6.2.1	解析解法和图解法	179
6.2.2	基于 MATLAB 的数值解法	181
6.2.3	全局最优解与局部最优解	182
6.2.4	利用梯度求解最优化问题	184
6.3	有约束最优化问题的计算机求解	186
6.3.1	约束条件与可行解区域	186
6.3.2	线性规划问题的计算机求解	187
6.3.3	二次型规划的求解	190
6.3.4	一般非线性规划问题的求解	191
6.4	整数规划问题的计算机求解	194
6.4.1	整数线性规划问题的求解	194
6.4.2	一般非线性整数规划问题与求解	196
6.4.3	0-1 规划问题求解	198
6.5	本章要点简介	199
6.6	习 题	200
<b>第 7 章</b>	<b>微分方程问题的计算机求解</b>	<b>203</b>
7.1	常系数线性微分方程的解析解方法	203
7.1.1	线性常系数微分方程解析解的数学描述	203
7.1.2	微分方程的解析解方法	204
7.1.3	Laplace 变换在线性微分方程求解中的应用	206
7.1.4	特殊非线性微分方程的解析解	208
7.2	微分方程问题的数值解法	209
7.2.1	微分方程问题算法概述	210

7.2.2	四阶定步长 Runge-Kutta 算法及 MATLAB 实现	211
7.2.3	一阶微分方程组的数值解	212
7.2.4	微分方程转换	217
7.3	特殊微分方程的数值解	224
7.3.1	刚性微分方程的求解	224
7.3.2	隐式微分方程求解	227
7.3.3	微分代数方程的求解	230
7.3.4	延迟微分方程求解	233
7.4	边值问题的计算机求解	234
7.4.1	线性方程边值问题的打靶算法	235
7.4.2	非线性方程边值问题的打靶算法	237
7.4.3	线性微分方程的有限差分算法	239
7.5	偏微分方程求解入门	240
7.5.1	偏微分方程组求解	241
7.5.2	二阶偏微分方程的数学描述	242
7.5.3	偏微分方程的求解界面应用举例	244
7.6	微分方程的框图求解	250
7.6.1	Simulink 简介	250
7.6.2	Simulink 相关模块	251
7.6.3	微分方程的 Simulink 建模与求解	252
7.7	本章要点简介	255
7.8	习 题	257
<b>第 8 章</b>	<b>数据插值、函数逼近问题的计算机求解</b>	<b>260</b>
8.1	插值与数据拟合	260
8.1.1	一维数据的插值问题	260
8.1.2	已知样本点的定积分计算	263
8.1.3	二维网格数据的插值问题	265
8.1.4	二维一般分布数据的插值问题	267
8.1.5	高维插值问题	270
8.2	样条插值与数值微积分	271
8.2.1	样条插值的 MATLAB 表示	271
8.2.2	基于样条插值的数值微积分运算	275
8.3	由已知数据拟合数学模型	277
8.3.1	多项式拟合	277
8.3.2	给定函数的连分式展开及基于连分式的有理近似	280
8.3.3	有理式拟合——Padé 近似	282
8.3.4	函数线性组合的曲线拟合方法	284

8.3.5	最小二乘曲线拟合	286
8.4	信号分析与数字信号处理基础	288
8.4.1	信号的相关分析	288
8.4.2	快速 Fourier 变换	291
8.4.3	滤波技术与滤波器设计	292
8.5	本章要点简介	295
8.6	习 题	297
<b>第 9 章</b>	<b>概率论与数理统计问题的计算机求解</b>	<b>299</b>
9.1	概率分布与伪随机数生成	299
9.1.1	概率密度函数与分布函数概述	299
9.1.2	常见分布的概率密度函数与分布函数	300
9.1.3	概率问题的求解	307
9.1.4	随机数与伪随机数	308
9.2	统计量分析	309
9.2.1	随机变量的均值与方差	309
9.2.2	随机变量的矩	310
9.2.3	多变量随机数的协方差分析	312
9.2.4	多变量正态分布的联合概率密度即分布函数	313
9.3	数理统计分析方法及计算机实现	314
9.3.1	参数估计与区间估计	314
9.3.2	多元线性回归与区间估计	316
9.3.3	非线性函数的最小二乘参数估计与区间估计	318
9.4	统计假设检验	322
9.4.1	统计假设检验的概念及步骤	322
9.4.2	假设检验问题求解	323
9.5	方差分析及计算机求解	326
9.5.1	单因子方差分析	327
9.5.2	双因子方差分析	328
9.5.3	多因子方差分析	331
9.6	本章要点简介	331
9.7	习 题	333
<b>第 10 章</b>	<b>数学问题的非传统解法</b>	<b>337</b>
10.1	模糊逻辑与模糊推理	337
10.1.1	经典集合论和模糊集	337
10.1.2	隶属度与模糊化	340
10.1.3	模糊推理系统建立	343
10.1.4	模糊规则与模糊推理	345

---

10.2 神经网络及其在数据拟合中的应用	347
10.2.1 神经网络基础知识	348
10.2.2 神经网络界面	355
10.3 遗传算法及其在最优化问题中的应用	357
10.3.1 遗传算法的基本概念介绍及 MATLAB 实现	358
10.3.2 遗传算法在求解最优化问题中的应用举例	359
10.3.3 遗传算法在有约束最优化问题中的应用	367
10.4 小波变换及其在数据处理中的应用	369
10.4.1 小波变换及基小波波形	369
10.4.2 小波变换技术在信号处理中的应用	374
10.4.3 小波问题的程序界面	377
10.5 粗糙集理论与应用	377
10.5.1 粗糙集理论介绍	377
10.5.2 粗糙集数据处理问题的 MATLAB 求解	380
10.6 分数阶微积分学及其应用	383
10.6.1 分数阶微积分的定义	384
10.6.2 分数阶微积分的计算	385
10.6.3 分数阶微分方程的求解方法	396
10.7 本章要点简介	401
10.8 习题	403
<b>附录 A 自由数学语言 Scilab 简介</b>	<b>405</b>
A.1 Scilab 简介	405
A.2 Scilab 的程序设计基础	405
A.2.1 Scilab 变量、常量与数据结构	405
A.2.2 Scilab 的基本语句结构	406
A.2.3 Scilab 语言的流程控制语句结构	407
A.2.4 Scilab 编程	408
A.2.5 Scilab 与 MATLAB 的接口	408
A.3 Scilab 绘图语句及功能	408
A.3.1 二维图形绘制	409
A.3.2 三维图形绘制	409
A.4 Scilab 下的基于模型的仿真方法	410
A.5 基于 Scilab 的数学问题求解	410
A.5.1 数值微积分问题求解	411
A.5.2 数值线性代数问题求解	411
A.5.3 积分变换与复变函数	412
A.5.4 最优化问题的求解	413

---

A.5.5 微分方程的数值解 . . . . .	413
A.5.6 数据处理的实现 . . . . .	414
A.5.7 概率论与数理统计 . . . . .	415
A.6 本章要点简介 . . . . .	415
A.7 习 题 . . . . .	415
<b>参考文献</b>	<b>417</b>

# 第1章 计算机数学语言概述

## 1.1 数学问题计算机求解概述

### 1.1.1 为什么要学习计算机数学语言

求解数学问题时手工推导当然是有用的，但并不是所有的问题都是能手工推导的，故需要由计算机来完成相应的任务。用计算机的方式也有两种，其一是用成型的数值分析算法、数值软件包与手工编程的方法相结合的求解方法，其二是采用国际上有影响的专门计算机语言来求解问题，这类语言包括 MATLAB、Mathematica、Maple 等，本书统一称之为计算机数学语言。顾名思义，用数值方法只能求解数值计算的问题，至于像公式推导等数学问题，例如求解  $x^3 + ax + c = d$  方程的解，在  $a, c, d$  不是给定数值时，数值分析的方式是没有用的，必须使用计算机数学语言来求解。

在系统介绍本书的内容之前，先介绍几个例子，读者可以思考其中提出的问题，从中体会学习本书的必要性。

【例 1-1】大学的高等数学课程学习了微分与积分的概念和数学推导方法，但实际应用中可能遇到高阶导数的问题。已知  $f(x) = \sin x / (x^2 + 4x + 3)$  这样的简单函数，如何求解出  $d^4 f(x) / dx^4$ ？当然，用手工推导是可行的，由高等数学的知识先得出  $df(x)/dx$ ，对结果求导数得出二阶导数，对结果再求导得出三阶导数，对其再求导一步就能求出所需的  $d^4 f(x) / dx^4$ ，重复此方法还能求出更高阶的导数。这个过程比较机械，适合计算机实现，所以用现有的计算机数学语言可以由一条语句得出结果为

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = & \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 3} + 4 \frac{\cos x (2x + 4)}{(x^2 + 4x + 3)^2} - 12 \frac{\sin x (2x + 4)^2}{(x^2 + 4x + 3)^3} + 12 \frac{\sin x}{(x^2 + 4x + 3)^2} - 24 \frac{\cos x (2x + 4)^3}{(x^2 + 4x + 3)^4} \\ & + 48 \frac{\cos x (2x + 4)}{(x^2 + 4x + 3)^3} + 24 \frac{\sin x (2x + 4)^4}{(x^2 + 4x + 3)^5} - 72 \frac{\sin x (2x + 4)^2}{(x^2 + 4x + 3)^4} + 24 \frac{\sin x}{(x^2 + 4x + 3)^3} \end{aligned}$$

当然，经过计算机化简，还可以得出更简的形式为

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = & 8(x^5 + 10x^4 + 26x^3 - 4x^2 - 99x - 102) \frac{\cos x}{(x^2 + 4x + 3)^4} + \\ & (x^8 + 16x^7 + 72x^6 - 32x^5 - 1094x^4 - 3120x^3 - 3120x^2 + 192x + 1581) \frac{\sin x}{(x^2 + 4x + 3)^5} \end{aligned}$$

显然，若依赖手工推导，得出这样的结果需要很繁杂、细致的工作，稍有不慎就可能得出错误的结果，由此，手工推导出结果的可信度有时是值得怀疑的。如果能采用计算机代替手工推导则会既省力，又增加可信度，故需要计算机数学语言来解决这样的问题。实践表明，利用著名的 MATLAB 语言，在 1.5 秒内<sup>①</sup>就可以精确地求出  $d^{100} f(x) / dx^{100}$ 。

<sup>①</sup>本书中涉及的求解时间均指作者使用的 PIII 1.12MHz/256MB 的笔记本计算机上测出的，且 CPU 的不同运行状态下测出的时间也有差异。





采用计算机数学语言, 如 MATLAB 中的延迟微分方程求解函数 `dde23()` 或图形化建模仿真工具 Simulink 来求解这样的问题。在本书后面相应的内容中将介绍此方程的解法。

【例 1-5】考虑最优化问题, 假设线性规划问题的数学描述如下:

$$\begin{aligned} & \min && (-2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 - x_5) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 54 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 \leq 62 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 3.32, x_4 \geq 0.678, x_5 \geq 2.57 \end{cases} \end{aligned}$$

因为是有约束问题, 不能用高等数学中的令目标函数导数为 0, 得出若干方程再求解方程的方式求解最优化问题, 而必须用线性规划中介绍的算法求解之, 得出  $x_1 = 19.7850$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 3.3200$ ,  $x_4 = 11.3850$ ,  $x_5 = 2.5700$ 。

这样的求解借助数值分析或最优化方法等课程介绍的数值算法可以容易地实现。但如果再添加约束, 例如需要得出该最优化问题的整数解, 原来的问题就变成了整数规划问题。很少有相关书籍、软件能直接求解这样的问题。而利用计算机数学语言可以求出该整数规划问题的解为  $x_1 = 19$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = 10$ ,  $x_5 = 5$ 。

【例 1-6】许多后续课程将用到的高等应用数学分支, 如积分变换、复变函数、偏微分方程、数据插值与拟合、概率论与数理统计、数值分析等, 课程考试之后您还记得其中问题的求解方法吗?

很多专门的学科, 如电路、电子技术、电力电子技术、电机与拖动、自动控制原理等, 在介绍原理与方法时一般采用简单的例子, 回避高阶的或复杂的例子。究其原因, 是当时缺少高水平计算机数学语言甚至是数值分析技术的支持, 所以在相关学科中的很多方法不一定适合于复杂的问题求解。在实际研究中遇到稍复杂一点的问题时, 只靠手工推导的方法是得不出精确结果的, 所以需要特殊的专业软件或语言来解决问题, 而计算机数学语言, 如 MATLAB 语言, 通常可以较好地解决相关问题。

从上面的例子可以看出, 解决数学问题用手工推导的方法虽然有时可行, 但对很多复杂问题不现实或不可靠, 用传统数值分析课程甚至成型的软件包(如在国际上享有盛誉的 *Numerical Recipes*<sup>[39]</sup>) 得出的结果有时也是错误的, 故需要学习计算机数学语言, 以更好地解决以后学习和研究中遇到的问题。

### 1.1.2 数学问题的解析解与数值解

现代科学与工程的发展离不开数学。数学家们感兴趣的问题和其他科学家、工程技术人员所关注的问题是不同。数学家往往对数学问题的解析解, 或称闭式解 (closed-form solution) 和解的存在性严格证明感兴趣, 而工程技术人员一般对如何求出数学问题的解更关心。换句话说, 能用某种方法获得问题的解则是工程技术人员更关心的问题。而获得这样解的最直接方法就是通过数值解法技术。

解析解不存在的情况在数学上并不罕见, 甚至可以说, 这样的现象是常见的。例如, 定积分  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2} dx$  在上限为有穷时就没有解析解。数学家可以用新的函数  $\text{erf}(a)$  去定义这样的解, 但解的值到底多大却不是一目了然的。所以, 在这样的情况下, 要想获得积分的值, 就必须采用数值解技术。

再例如, 圆周率  $\pi$  的值本身就没有解析解, 中国古代的数学家、天文学家祖冲之早在公元 480 年就算定了该值在 3.1415926 和 3.1415927 之间。在一般科学与工程应用中, 取这样的值就能保证较高的精度, 而对于粗略估算来说, 使用公元前 250 年 (?) 阿基米德的 3.1418 也未尝不可, 而没有必要非去追求不存在的解析解不可。所以在这样的问题上, 数值解法的优势就显示出来了。

数学问题的数值解法已经成功地应用于各个领域。例如, 在力学领域, 常用有限元法求解偏微分方程; 在航空、航天与自动控制领域, 经常用到数值线性代数与常微分方程的数值解法等解决实际问题; 在工程与非工程系统的计算机仿真中, 核心问题的求解也需要用到各种差分方程、常微分方程的数值解法; 在高科技的数字信号处理领域, 离散的快速 Fourier 变换 (FFT) 已经成为其不可或缺的工具。在科学工程研究中能掌握一个或多个实用的计算工具, 无疑会为研究者提供解决实际问题的强有力手段。

### 1.1.3 数学运算问题软件包发展概述

数字计算机的出现给数值计算技术的研究注入了新的活力。在数值计算技术的早期发展中, 出现了一些著名的数学软件包, 如美国的基于特征值的软件包 EISPACK<sup>[10, 42]</sup> 和线性代数软件包 LINPACK<sup>[7]</sup>, 英国牛津数值算法研究组 (Numerical Algorithm Group, NAG) 开发的 NAG 软件包<sup>[34]</sup> 及享有盛誉的著作 *Numerical Recipes*<sup>[39]</sup> 中给出的程序集等, 这些都是国际上广泛流行的、有着较高声望的软件包。

美国的 EISPACK 和 LINPACK 都是基于矩阵特征值和奇异值解决线性代数问题的专用软件包。限于当时的计算机发展状况, 这些软件包大都是由 Fortran 语言编写的源程序组成的。

例如, 若想求出  $N$  阶实矩阵  $A$  的全部特征值 (用  $W_R, W_I$  数组分别表示其实虚部) 和对应的特征向量矩阵  $Z$ , 则 EISPACK 软件包给出的子程序建议调用路径为

```
CALL BALANC(NM,N,A,IS1,IS2,FV1)
CALL ELMHES(NM,N,IS1,IS2,A,IV1)
CALL ELTRAN(NM,N,IS1,IS2,A,IV1,Z)
CALL HQR2(NM,N,IS1,IS2,A,WR,WI,Z,IERR)
IF (IERR.EQ.0) GOTO 99999
CALL BALBAK(NM,N,IS1,IS2,FV1,N,Z)
```

由上面的叙述可以看出, 要求取矩阵的特征值和特征向量, 首先要给一些数组和变量依据 EISPACK 的格式作出定义和赋值, 并编写出主程序, 再经过编译和连接过程, 形成可执行文件, 最后才能得出所需的结果。

英国的 NAG 软件包和美国学者的 *Numerical Recipes* 工具包则包括了各种各样数学问题的数值解法, 二者中 NAG 的功能尤其强大。NAG 的子程序都是以字母加数字编号的形式命名的, 非专业人员很难找到适合自己问题的子程序, 更不用说能保证以正确的格式去调用这些子程序了。这些程序包使用起来极其复杂, 谁也不能保证不发生错误, NAG 数百页的使用手册就有十几本之多!

*Numerical Recipes* 一书中给出的一系列算法语言源程序也是一个在国际上广泛应用