现代数学基础丛书 91

# 发展方程数值计算方法

黄明游 编著

75.26
68

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书　　91

# 发展方程数值计算方法

黄明游　编著

科学出版社

北　京

## 内 容 简 介

本书介绍了求发展方程数值解的原理和计算方法，包括将发展方程定解问题离散化的途径、方法，计算格式的设计和求解算法，以及关于数值方法的理论分析. 本书内容既保留了那些行之有效的传统方法和经典理论结果，更注重于介绍近几十年来兴起的新方法和传统方法的新发展，反映近几十年来发展方程数值方法的研究与应用方面取得的新进展、新成果. 此外，书中列举了若干实际应用问题(多属非线性与耦合问题).

本书可供计算数学、应用数学、力学等专业的研究生、教师以及从事科学与工程计算应用与研究工作的科技人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

发展方程数值计算方法/黄明游编著. —北京：科学出版社，2004
(现代数学基础丛书,91)
ISBN 7-03-012957-1

Ⅰ.发… Ⅱ.黄… Ⅲ.发展方程-数值计算-计算方法 Ⅳ.O175.26

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第012278号

责任编辑 吕 虹 张 扬/责任校对 刘小梅
责任印制 钱玉芬/封面设计 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年6月第一次印刷 印张：10
印数：1—2 500 字数：180 000

**定价：25.00元**
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

# 《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

# 前　言

发展方程(evolution equation)是包含时间变数的许多重要的数学物理偏微分方程的统称，又称演化方程或进化方程. 在物理、力学或其他自然科学中，这类方程用来描述随时间而变化的状态或过程. 诸如热传导方程、声波与弹性波方程、反应扩散与对流扩散方程、流体与气体力学方程组、Schrödinger 方程、KdV 方程等以及由这些方程通过适当方式耦合而得到的耦合方程组，皆属于发展方程的范畴.

在科学与技术的发展中提出了种种发展方程的求解问题，然而在绝大多数情形，这些问题的解不能用解析的公式表达出来，或者表达式过于复杂，因而需要采用数值方法去计算它们的近似解. 有限差分法是求解偏微分方程定解问题的传统数值方法，早在 1928 年 Courant,Friedrichs 和 Lewy 便对偏微分方程的差分方法作过完整论述. 第二次世界大战之后，随着快速电子计算机的诞生与发展，差分方法的应用及其理论得到迅猛发展. 20 世纪中、后期发展起来的有限元方法，为偏微分方程(包括发展方程在内)的近似求解增添了又一强有力的工具，尤其对于处理不规则区域上及一般边值条件的偏微分方程定解问题，有限元方法具有显著的优越性. 其次，数值分析家运用 Sobolev 空间及其插值逼近理论为有限元方法建立起了十分完美的数学理论. 此外，在离散 Fourier 变换快速算法提出之后，历史悠久的谱方法也发展成为求解偏微方程的重要方法之一.

近30年来，在上述基本方法的基础上，针对不同类型的发展方程问题(尤其是各种非线性和耦合问题)，探寻可靠的高效、高精度的数值计算方法的努力始终没有间断过，不断地涌现出新的数值方法，如有限体积法和广义差分法、特征和迎风有限元法、间断有限元法等. 值得重视的还有，由我国学者冯康院士 倡导的从几何角度出发寻求发展方程的保结构算法的研究，这是对于构造数值方法的依据和观念上的一个重大革新. 另外，近 20 年来谱与拟谱方法的研究也取得了很大的进展. 发展方程的数值求解问题在科学与工程计算中处于十分重要的地位，已被广泛的应用于气象预报、地震预测、油田的勘测与开发技术、机翼与汽轮机叶片等工业产品设计、生态与环境的动态模拟等领域. 适应现代科学技术的突飞猛进，关于线性与非线性发展方程数值计算方法的研究必将在理论与应用方面得到更加迅速的发展.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

本书是在全国数学研究生暑期学校(2002年, 长春)课程"发展方程数值计算方法"讲稿的基础上, 经过充实、改写而成, 它凝聚了作者多年来在吉林大学为研究生开设相关课程时所积累的资料. 在本书中, 我们将通过几类重要并具代表性的发展方程, 介绍求发展方程数值解的原理和计算方法, 以及相关的理论问题. 这里, 包括将发展方程定解问题离散化的途径、方法, 计算格式的设计和求解算法, 以及关于数值方法的理论分析(稳定性、收敛性和误差估计等). 本书基本覆盖了发展方程数值计算方法的主要内容, 既保留了那些行之有效的传统方法和经典理论结果(如求解波动和一阶双曲方程问题的差分方法、关于差分格式收敛性与稳定性的理论), 更注重于介绍近几十年来兴起的新方法(有限元法、有限体积和广义差分法、保结构计算方法等)和传统方法的新发展(基于正交多项式逼近的谱与拟谱方法、人工边界上无反射近似边值条件的构造方法等). 此外, 书中列举了若干实际问题(多属非线性和耦合问题), 以帮助读者了解数值方法是怎样应用的以及其广阔应用前景. 本书力求反映近几十年来发展方程数值方法的研究与应用方面取得的新进展、新成果. 然而, 由于此领域涉及的范围广, 受到篇幅的限制, 不得不在内容方面有所取舍, 会有某些方面的题材没有介绍到. 作者的初衷是编写一本基本反映发展方程数值计算方法全貌的简练教材, 供计算数学与应用数学专业研究生使用, 同时希望本书也能够成为有关科技工作者, 特别是从事科学与工程计算人员所喜爱的参考书之一.

本书吸取了国内外同行的科研成果和他们著作中的部分内容, 在此向他们表示敬意和感谢. 这本书的初稿曾在第八届全国数学研究生暑期学校讲授过, 大部分内容亦在吉林大学的研究生课程中多次讲授过, 这里向对书稿提供宝贵修改意见的同事和学员们表示衷心的感谢. 此外, 也向为本书的排版、校对付出了辛勤劳动的宫成春、尹丽、张凯、徐英祥等同学表示感谢.

由于作者的水平、经验有限, 本书会有许多不足乃至错误, 恳请读者批评、指正.

作　者

2003 年 8 月于吉林大学

# 目　　录

# 第一章　抛物问题的有限元方法

二阶抛物方程用于描写热的传播、溶质在液体中的弥散、多孔介质中渗流等随时间发展 (演化) 的现象和过程，是一类基本的发展型偏微分方程. 求解抛物方程的初边值问题在科学与工程中有着广泛的应用. 有限差分法可用于并曾经是近似求解抛物问题的数值方法，但在空间区域几何形式或者边值条件比较复杂的情形，该方法显得很笨重并且难于提高方法的精确度. 由于抛物方程的初边值问题与椭圆方程的边值问题之间的密切关系，在近代有限元法诞生并成功的用于求解椭圆方程的边值问题之后，不久便被推广、应用于求解抛物方程的初边值问题，并建立起完善的数学理论. 本章主要介绍求解二阶线性抛物方程初边值问题的有限元方法. §1.1 介绍抛物问题的有关理论知识. §1.2 介绍解初边值问题的 Galerkin 有限元法. §1.3 介绍抛物问题有限元分析的基本方法和理论结果. §1.4 介绍基于一般椭圆逼近的有限元方法.

## §1.1　二阶线性抛物方程的初边值问题

设 $\Omega$ 是 $d$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界区域，其边界记为 $\Gamma$. 考虑如下二阶线性抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Au=f(x,t)\,,\qquad x\in\Omega\,,\quad 0<t\le T,\tag{1.1}$$

其中 $A$ 是由下式给出的一个微分算子

$$Au\equiv-\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+c(x)u,$$

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\,,\quad c(x)\ge 0\,.$$

如果下述条件成立，即

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\alpha\sum_{i=1}^{d}|\xi_i|^2\,,\quad \alpha\text{为某一正常数},$$

$$\text{对一切 } x\in\Omega \text{ 和 } \xi\in\mathbb{R}^d\,,$$

则称 $A$ 为一致强椭圆微分算子, 此时 (1.1) 属于抛物型方程. 其次, 给定如下 Dirichlet 型边值条件 (齐次)

$$u=0\,,\qquad \text{当 } x\in\Gamma\,,\ 0<t\le T\tag{1.2}$$

和初值条件

$$u(x,0)=u^0(x)\,,\qquad x\in\Omega.\tag{1.3}$$

寻求一个函数 $u(x,t): x \in \overline{\Omega}$ , $t \in [0,T]$ 同时满足方程 (1.1) 和条件 (1.2) 、(1.3) 的定解问题称为抛物方程 (1.1) 的一个初边值问题. 除了形如 (1.2) 的边值条件外, 还有形如

$$\left( \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{ij} n_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_{x \in \Gamma} = 0$$

或者

$$\left( \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{ij} n_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta u \right)_{x \in \Gamma} = 0 , \qquad \beta \geq 0$$

的第二类和第三类边值条件, 其中 $\underline{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_d)$ 代表 $\Gamma$ 上的单位外法向量.

下面, 引入一些函数空间和记号.

$H = L^2(\Omega)$ 是由定义在 $\Omega$ 上的所有平方可积

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty$$

的实值可测函数 $v$ 构成的空间. 对于 $u, v \in H$, 定义内积

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

而 $\|v\| = (v,v)^{\frac{1}{2}}$ 则表示 $v$ 在 $H$ 中的范数. 另外, 定义空间

$$H^k = \{ v : \ D^\alpha v \in H, \ \ |\alpha| \leq k \},$$

其中 $D^\alpha v = \partial^{|\alpha|} v / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}$ 代表函数 $v(x)$ 的 $\alpha$ 阶广义导数, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$. $H^k$ 中的内积与范数分别为

$$(v,w)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha v , D^\alpha w) , \qquad \|v\|_k = (v,v)_k^{\frac{1}{2}}.$$

在广义函数论中, 称 $H^k$ 是指数为 $k$ 的 Sobolev 空间.

另外, 用记号 $C(0,T;X)$ 表示映射族 $\{v(t):(0,T) \to X\}$, 其中任一 $v(t)$ 关于 $t \in (0,T)$ 按空间 $X$ 的度量是连续的. 类似的记号还有 $L^2(0,T;X)$ , $L^\infty(0,T;X)$ 等, 无需再解释.

关于初边值问题 (1.1)~(1.3) 的解的存在性和正则性, 有如下结果 (参看 [4]) :

**定理 1.1** 假定

$$u^0 \in H^{s+1}, \qquad f \in L^2(0,T;H^s) , \quad s \geq 0 \text{为整数},$$

则初边值问题 (1.1)~(1.3) 存在惟一的解 $u(x,t)$, 满足

$$u \in L^2(0,T;H^{s+2}), \qquad u_t \in L^2(0,T;H^s)$$

和估计式

$$\int_0^t \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u(\cdot,\tau)\|_{H^s}^2 \,\mathrm{d}\tau \le C_0 \left( \|u^0\|_{H^{s+1}}^2 + \int_0^t \|f(\cdot,\tau)\|_{H^s}^2 \,\mathrm{d}\tau \right).$$

考虑相应的齐次问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = 0\,, & x \in \Omega\,, \quad s < t < +\infty, \\ u = 0\,, & x \in \Gamma\,, \\ u(x,s) = u^s(x)\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

显然，此问题的解仅仅依赖于在 $t=s$ 时刻指定的初值 $u^s$, 记为 $u(t)=E(t,s)u^s$ , $t\in[s,+\infty)$ , 称 $E(t,s)$ 为问题 (1.4) 的基本解算子，它具有性质:

$$E(s,s) = I, \qquad \text{单位算子},$$

$$E(t,\tau)\cdot E(\tau,s) = E(t,s)\,, \qquad \text{当} \quad 0 \le s \le \tau \le t\,.$$

借助算子 $E(t,s)$, 由叠加原理可将非齐次问题 (1.1)~(1.3) 的解表示为 (Duhamel 公式):

$$u(t) = E(t,0)u^0 + \int_0^t E(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.5}$$

关于算子 $E(t,s)$ 可证明下列估计：对于任意 $k\,,l\ge 0$ , 成立

$$\|E(t,s)v\|_k \le C(t-s)^{-\frac{k}{2}}\|v\|, \qquad \text{当} \quad 0 \le s < t < +\infty\text{时},$$

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l E(t,s)v \right\| \le C(t-s)^{-l}\|v\|, \qquad \text{当} \quad 0 \le s < t < +\infty\text{时}.$$

由此可看出：当 $f=0$ 时，问题 (1.1)~(1.3) 的解 $u(x,t)$ 当 $t\to+\infty$ 时是衰减的.

## §1.2 Galerkin 有限元法 (半离散近似)

本节讨论抛物方程初边值问题 (1.1)~(1.3) 的 Galerkin 有限元近似 (空间变量的离散化). 首先，借助虚功原理将问题改写成变分形式.

记 $H_0^1=\{v\in H^1: v=0 \text{ 当 } x\in\Gamma\}$. 设 $f\in C(0,T;H)$, 用函数 $v(x)\in H_0^1$ 与方程 (1.1) 的两端作内积，有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + (Au, v) = (f, v).$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

利用 Green 公式,

$$
\begin{aligned}
(Au,v)= & \int_\Omega\left(\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+cuv\right)\mathrm{d}x \\
& -\int_\Gamma\left(\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_{ij}n_i\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)v\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因 $v=0$ 当 $x\in\Gamma$, 故上式右端第二项为零. 引进双线性泛函

$$
a(u,v)=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+cuv\right)\mathrm{d}x\ , \tag{1.6}
$$

那么可得如下方程:

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial u}{\partial t},v\right)+a(u,v)=(f,v), & \forall\ v\in H_0^1,\\
u(\cdot,0)=u^0(\cdot),
\end{cases} \tag{1.7}
$$

我们称方程 (1.7) 为问题 (1.1)~(1.3) 的变分 (弱) 形式. 显然, 初边值问题 (1.1)~(1.3) 的解 $u$ 必定满足 (1.7), 而问题 (1.7) 的解 $u(t):[\,0\,,T\,]\to H_0^1$ 则称为原问题 (1.1)~(1.3) 的弱解, 它被视作一个从 $\bar I=[\,0\,,T\,]$ 到空间 $H_0^1$ 的映射.

由假设: $a_{ij}=a_{ji}$ 和定义式 (1.6), 对任意 $u,v\in H^1$ , $a(u\,,v)=a(v\,,u)$ , 即 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的双线性泛函. 另外, 根据关于算子 $A$ 是一致强椭圆微分算子的假设, 可知存在常数 $\gamma>0$, 使得

$$
a(v,v)\ge\gamma\|v\|_1^2\ ,\qquad \forall\ v\in H_0^1, \tag{1.8}
$$

即 $a(\cdot,\cdot)$ 在空间 $H_0^1$ 上是正定的. 从 $a(\cdot,\cdot)$ 的定义还可看出, 当 $a_{ij}(x)\ ,c(x)\in C(\overline{\Omega})$ 时, 便有

$$
|a(u,v)|\le M\|u\|_1\|v\|_1\ ,\qquad \forall\ u,v\in H^1, \tag{1.9}
$$

其中 $M$ 为某一正常数.

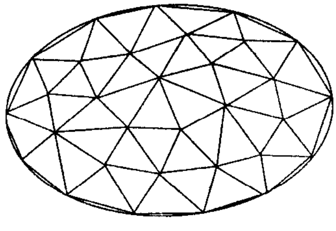

图 1.1

有限元近似的第一步, 是将求解空间区域 $\Omega$ 剖分成有限个互不重叠的子区域 (称为 **元素** 或 **单元**) 的集合. 例如, 图 1.1 所示是一个二维区域 $\Omega$ 的由三角形单元构成的剖分. 用 $h$ 表示剖分中单元的最大直径, 记相应的剖分为 $\mathcal{J}_h$ , $\{\mathcal{J}_h,0<h<h_0\}$ 代表一个剖分族, 当 $h$ 减小时, 剖分就愈来愈细. 以 $\rho(K)$ 和 $\sigma(K)$ 分别表示 $\mathcal{J}_h$ 中单元 $K$ 的外接圆和内切圆的直径. 如果存在不依赖于 $h$ 的常数 $C$, 使得

$$
\rho(K)/\sigma(K)\le C,
$$

则称剖分族 $\{\mathcal{J}_h, 0<h<h_0\}$ 是 **正则的**(regular).

有限元近似的第二步，是构造 $H_0^1$ 的一族有限维子空间 $\{S_h, 0<h<h_0\}$, 要求它具有如下逼近性质：对于某一整数 $r \geq 2$, 有

$$\begin{aligned}&\inf_{v_h\in S_h}\{\ \|v-v_h\|+h\|v-v_h\|_1\ \}\leq Ch^s\|v\|_s,\ 1\leq s\leq r,\\&\qquad\qquad\text{对任意 } v\in H^s\cap H_0^1.\end{aligned}\tag{1.10}$$

通常， $S_h$ 是通过在剖分 $\mathcal{J}_h$ 上作分片多项式插值的方法去构造的. 由 Sobolev 空间插值理论 (参见 [1], § 3.1) 可知，当剖分族 $\{\mathcal{J}_h, 0<h<h_0\}$ 为正则时，由 $\mathcal{J}_h$ 上所有属于 $C(\Omega)$ 的、次数 $\leq r-1$ 的分片多项式组成的子空间 $S_h$ 满足条件 (1.10).

在取定有限元空间 $S_h \subset H_0^1$ 后，初边值问题 (1.1)~(1.3) 的有限元近似定义为：求映射 $u_h(t): \bar{I}=[0,T]\to S_h$, 它满足

$$\begin{cases}(\dfrac{\partial u_h}{\partial t},v_h)+a(u_h,v_h)=(f,v_h)\ ,\quad \forall\, v_h\in S_h,\\ u_h(0)=u_h^0,\end{cases}\tag{1.11}$$

其中 $u_h^0 \in S_h$ 是函数 $u^0(x)$ 的某个近似. 这里，我们看到问题 (1.11) 是变分问题 (1.7) 的一种近似.

设 $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^{N_h}$ 是空间 $S_h$ 的一个基底，则近似问题 (1.11) 又可以表述为：求函数表达式

$$u_h(x,t)=\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j(t)\phi_j(x)$$

即确定其中系数 $\{\alpha_j(t)\}_{j=1}^{N_h}$, 使得

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{N_h}\dot{\alpha}_j(t)(\phi_j,\phi_i)+\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j(t)a(\phi_j,\phi_i)=(f,\phi_i)\ ,\\ \qquad i=1,2,\cdots,N_h,\\ \alpha_j(0)=r_j\ ,\qquad j=1,2,\cdots,N_h,\end{cases}\tag{1.12}$$

其中 $\dot{\alpha}_j=\dfrac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t}$, $r_j$ 为 $u_h^0(x)=\sum\limits_{j=1}^{N_h}r_j\phi_j(x)$ 的系数. 可以看出，(1.12) 是以 $\{\alpha_j(t)\}_{j=1}^{N_h}$ 为未知函数的一个一阶常微分方程组. 由于这里时间变量 $t$ 仍然是一个连续变量，所以说 (1.12) 是问题 (1.7) 的一个半离散近似.

引进矩阵记号:

$$
\begin{aligned}
&M=(m_{ij})_{N_h\times N_h}, \quad m_{ij}=(\phi_i,\phi_j),\\
&B=(b_{ij})_{N_h\times N_h}, \quad b_{ij}=a(\phi_i,\phi_j),\\
&\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\cdots,\alpha_{N_h}(t))^{\mathrm{T}},\\
&F=(f_1,f_2,\cdots,f_{N_h})^{\mathrm{T}}, \quad f_i=(f,\phi_i),\\
&r=(r_1,r_2,\cdots,r_{N_h})^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

其中 $M$ 是一个 Gram 矩阵, 称为“质量矩阵”, 它是非奇异的, 故 $M^{-1}$ 存在. 利用上述记号, 半离散问题 (1.12) 又可以写成

$$
\begin{cases}
\dot{\alpha}(t)+M^{-1}B\alpha(t)=M^{-1}F\ , \quad 0<t\le T,\\
\alpha(0)=r.
\end{cases}
\tag{1.13}
$$

由常微理论可知, 初值问题 (1.13) 对于任意 $F$ 和 $r$ 存在惟一的解 $\alpha(t)$, 从而近似问题 (1.11) 存在惟一解 $u_h(x,t)$.

最后补充一点, 即当初边值问题中的边值条件不是 Dirichlet 型条件时, 那么需要适当的修改变分陈述. 例如, 在边值条件属于第三类条件:

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u\right)_{x\in\Gamma}=0\ , \qquad \beta\ge 0,
\tag{1.14}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial \nu}=\sum_{j=1}^{d}\nu_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\ , \qquad \nu_j=\sum_{i=1}^{d}a_{ij}n_i
$$

的情形, 变分陈述 (1.7) 中的 $a(\cdot,\cdot)$ 应当修改为

$$
\begin{aligned}
a(u,v)=\ &\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+cuv\right)\mathrm{d}x\\
&+\int_\Gamma \beta uv\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

并且尚需将其中的空间 $H_0^1$ 改换为 $H^1$.

**注** (1.14) 中的 $\underline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_d)$ 称为 $\Gamma$ 上的单位拟法向量.

## §1.3 收敛性分析与误差估计

本节介绍抛物问题有限元法的理论分析方法, 将通过能量估计法证明有限元法的收敛性和近似解的误差估计式.

首先，介绍与抛物问题 (1.1)~(1.3) 相关的伴随椭圆边值问题. 考虑如下边值问题：

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)+c(x)\,w=f\ , & x\in\Omega, \\ w=0\ , \quad x\in\Gamma\ . \end{cases} \tag{1.16}$$

当 $f$ 不依赖于 $t$, 则 (1.16) 的解 $w(x)$ 可视作初边值问题 (1.1)~(1.3) 的定常解，也就是说，如果 (1.1)~(1.3) 的解 $u(x,t)$ 在 $t\to+\infty$ 时存在极限，那么

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=w(x)\ .$$

一般地，称 (1.16) 为抛物问题 (1.1)~(1.3) 的伴随椭圆问题.

利用 §1.2 中的有限元空间 $S_h\subset H_0^1$, 可以定义边值问题 (1.16) 的一个有限元近似：求 $w_h\in S_h$, 使得

$$a(w_h,v_h)=(f,v_h)\ ,\qquad \forall\ v_h\in S_h, \tag{1.17}$$

其中 $a(\cdot,\cdot)$ 是 §1.2 中所定义的双线性泛函. 因 $a(\cdot,\cdot)$ 是正定的，由 Lax-Milgram 定理 (见 [3]) 可知，有限元方程 (1.17) 存在惟一的解 $w_h\in S_h$.

**引理 1.1** 假定空间 $S_h$ 具有逼近性质 (1.10), 边值问题 (1.16) 的解 $w\in H^s\cap H_0^1$, 则由 (1.17) 所定义的近似解 $w_h$ 是收敛的，并满足

$$\|w_h-w\|+h\|w_h-w\|_1\le Ch^s\|w\|_s,\qquad 1\le s\le r\ . \tag{1.18}$$

**证明** 显然，(1.16) 的解 $w$ 满足

$$a(w,v_h)=(f,v_h)\ ,\qquad \forall\ v_h\in S_h,$$

由此式与 (1.17) 相减可得

$$a(w-w_h,v_h)=0\ ,\qquad \forall\ v_h\in S_h. \tag{1.19}$$

于是，利用 $a(\cdot,\cdot)$ 所满足的假定条件 (1.8) 和 (1.9) (见 §1.2), 有：对任意 $v_h\in S_h$,

$$\gamma\|w_h-w\|_1^2\le a(w_h-w,w_h-w)=a(w_h-w,v_h-w)$$

$$\le M\|w_h-w\|_1\|v_h-w\|_1.$$

消去上式两端公共因子并由 $S_h$ 的逼近性质 (1.10), 便知

$$\|w_h-w\|_1\le\frac{M}{\gamma}\inf_{v_h\in S_h}\|v_h-w\|_1\le Ch^{s-1}\|w\|_s\ . \tag{1.20}$$

为进一步估计 $\|w_h - w\|$, 令 $\Psi = \Psi(x)$ 为下述辅助问题的解

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}\right) + c\,\Psi = \phi(x)\ , & x \in \Omega, \\ \Psi = 0\ , \quad x \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.21}$$

已知, 对任意 $\phi \in L^2(\Omega)$, 问题 (1.21) 存在惟一的解 $\Psi(x) \in H^2(\Omega)$ 并有估计:

$$\|\Psi\|_2 \le C\|\phi\| \qquad \text{(椭圆方程的正则性)}\ . \tag{1.22}$$

由 (1.19), 可知: 对任意 $v_h \in S_h$,

$$\begin{aligned}(w_h - w, \phi) &= (w_h - w, A\Psi) = a(w_h - w, \Psi) \\ &= a(w_h - w, \Psi - v_h) \le M\|w_h - w\|_1\|\Psi - v_h\|_1.\end{aligned}$$

从而, 由 (1.20) 和 $S_h$ 的逼近性质, 得到

$$\begin{aligned}(w_h - w, \phi) &\le Ch^{s-1}\|w\|_s \inf_{v_h \in S_h}\|\Psi - v_h\|_1 \\ &\le Ch^s\|w\|_s\|\Psi\|_2 \le Ch^s\|w\|_s\|\phi\|,\end{aligned}$$

由此推出

$$\|w_h - w\| = \sup_{0 \ne \phi \in L^2(\Omega)}\frac{(w_h - w, \phi)}{\|\phi\|} \le Ch^s\|w\|_s,$$

至此定理证毕. 上面关于 $w_h - w$ 的 $L^2$ 范数的估计方法就是著名的"尼采 (Nitsche) 技巧".

**引理 1.2** (Gronwall 不等式) 设 $y(t)$ 于 $[0, T)$ 上连续并满足

$$y(t) \le y_0 + \int_0^t \lambda(\tau)y(\tau)d\tau, \tag{1.23}$$

其中 $\lambda(\tau) \ge 0$ 且 $\lambda(\tau) \in L^1(0, T)$, 则

$$y(t) \le y_0 \exp(\int_0^t \lambda(\tau)d\tau). \tag{1.24}$$

**证明** 令 $Y(t) = \int_0^t \lambda(\tau)y(\tau)d\tau$. 由 (1.23), 有

$$Y'(t) \le \lambda(t)y_0 + \lambda(t)Y(t),$$

此式两端乘以 $\exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)$ 后得到

$$\begin{aligned}\left[Y(t)\exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)\right]' &\le \lambda(t)y_0\exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right) \\ &= -y_0\left[\exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)\right]'.\end{aligned}$$

由上式积分并注意到 $Y(0)=0$, 进而有

$$Y(t) \le y_0 \exp\left(\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right) - y_0,$$

将它代入 (1.23) 即得估计式 (1.24).

现在开始讨论抛物问题 Galerkin 有限元法 (半离散近似) 的一些理论性质. 首先, 对于半离散非齐次方程 (1.11) 证明其解所满足的一个先验估计式.

**定理 1.2** 半离散方程 (1.11) 的解 $u_h(t), 0 \le t \le T$ 满足

$$\|u_h(t)\| + \gamma\int_0^t \|u_h(\tau)\|_1 d\tau \le \|u_h(0)\| + \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau. \tag{1.25}$$

**证明** 在方程 (1.11) 中取 $v_h = u_h$, 可得

$$\|u_h(t)\|\frac{d}{dt}\|u_h(t)\| + a(u_h(t), u_h(t)) \le \|u_h(t)\|\|f(t)\|.$$

注意到 $a(u_h, u_h) \ge \gamma\|u_h(t)\|_1^2 \ge \gamma\|u_h(t)\|_1\|u_h(t)\|$, 消去上式两端的公共因子, 即得

$$\frac{d}{dt}\|u_h(t)\| + \gamma\|u_h(t)\|_1 \le \|f(t)\|,$$

再对 $t$ 积分上式, 即证定理的估计式.

估计式 (1.25) 表明了半离散问题 (1.11) 的适定性. 特别地, 对于齐次抛物方程 ($f=0$ 情形), 由定理 1.2 可知: $\|u_h(t)\| \le \|u_h(0)\|, \forall t > 0$, 即半离散齐次方程的解在 $L^2(\Omega)$ 范数意义下是稳定的.

关于非齐次半离散问题 (1.11) 的解的误差估计, 有如下基本结果.

**定理 1.3** 假定空间 $\{S_h, 0 < h < h_0\}$ 具有逼近性质 (1.10), 并且近似初值 $u_h^0$ 满足

$$\|u_h^0 - u^0\| \le Ch^r\|u^0\|_r, \tag{1.26}$$

则半离散问题 (1.11) 的解 $u_h(t)$ 满足

$$\|u_h(t) - u(t)\| \le Ch^r\{\|u^0\|_r + \int_0^t \|u_t(\tau)\|_r d\tau\}. \tag{1.27}$$

(这里, 为使估计式有意义, 需要假设真解具有一定的正则性, 如保证右端的积分项是有界的.)

**证明** 作为比较, 引进真解 $u(t)$ 的椭圆投影 $P_1u(t) \in S_h$, 它由下式定义

$$a(P_1u, v_h) = a(u, v_h), \ \ \forall v_h \in S_h, \tag{1.28}$$

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com