G633.604/1

高中数学总复习与自学

中央民族学院出版社

高中数学总复习与自学

北京教育学院贾凯力 徐中伟 齐宪代等编

中央民族学院出版社

内 容 簡 介

本书是专为辅导高中课程，帮助克服高中总复习学习中的困难而编写的。编写本书的教师既紧扣高中教学大纲和统编教材，注意全面知识的总复习与自学，又对基础知识中的重点、难点作了精炼的阐述，还对历届高考试题类型和答题方法作了准确的分析和示范，具有总复习明确的目的性和实用性，是正在进行高中毕业升学总复习的指导教师和学生很实用的参考书。

高中数学总复习与自学
北京教育学院贾凯力 徐中伟 齐宪武等编
中央民族学院出版社出版
（北京白石桥路27号）
工程兵机械学校印刷厂印刷
新华书店首都发行所发行　　各地新华书店经售
•
787×1092毫米32开本 印张：11.375 字数：265千字
1989年2月第1版北京第一版第1次印刷
印数：1—17000册
•
ISBN 7-81001-107-3/G·42 定价：3.95 元

前　言

为了帮助高中毕业生深入系统地总结和理解数学知识，提高数学解题能力，也为具有同等学历的青年自学，我们按照现行教学大纲和统编教材对数学的要求，编写了这本《高中数学总复习与自学》。编写时力求加强基础知识和基本技能的训练，适当注意各部分知识的联系和综合运用，还吸取了近年来各地的一些优秀题，可供高中毕业生在进行总复习自学时参考，也可供教师参考。

全书按高中数学内容共分四篇。例题着眼于基本方法和解题思路分析。由于篇幅的原因，有些例题没能涉及的问题，放在习题中作为补充，这样作也有利于学生钻研和进行能力方面的训练。为方便读者，附了习题的参考答案。

本书是《中学自学丛书》之一。丛书主编是北京教育学院贾凯力、徐中伟、齐宪代。本书由俞裕安、陈娴主编。参加编写的还有李松文、赵一西、王永俊、尹濬淼。

本书由于篇幅有限，计算式与证明式的拼排，均系接排，这是请读者在阅读中要注意谅解的地方。由于编写水平有限，难免存在一些错误和缺点，恳请读者提出宝贵意见。

编者

1988年10月·北京

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一篇　代　　数

第一章　集合与函数

一、集合

集合与映射是现代数学的基础之一，掌握好这部分知识的关键是准确地理解概念。

例1　用$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\supseteq$、$\subset$、$\supset$、$=$中最恰当的符号连接下列各式

(1)$7\ \underline{\ \in\ }\ \{x|x=2n+1\ \ n\in z\}$

(2)$0\ \underline{\ \in\ }\ \{x|x=2n+1 n\in Q\}$

(3)$0\ \underline{\ \notin\ }\ \phi$　(4)$\{0\}\ \underline{\ \supset\ }\ \phi$　(5)$\sqrt{2}\ \underline{\ \notin\ }\ \{R\}$

(6)$\phi=\ \underline{\ \in\ }\ \{\phi\}$

分析：(1)$\{x|x=2n+1 n\in z\}$表示奇数组成的集合，7是奇数∴填$\in$。(2)$\in$。(3)0和ϕ不同，0是元素，ϕ是集合，$\{0\}$是以0为元素的集合，∴$0\notin\phi$，(4)$\{0\}\supset\phi$。(5)$\{R\}$表示以实数集为元素组成的集合，它只有一个元素，元素是实数集∴$\sqrt{2}\notin\{R\}$.(6)$\{\phi\}$表示以空集为元素的单元素集合，∴$\{\phi\}$不再是空集，$\phi\subset\{\phi\}$，$\phi\in\{\phi\}$都正确。

例2　已知$A=\{$不超过10的自然数$\}$，$B=\{$质数$\}$，$C=A\cap B$，则C的子集有几个？真子集有几个？

解：∵$C=\{2,3,5,7\}$它有4个元素

∴子集有$2^4=16$个，真子集有$2^4-1=15$个

说明：(1)一个由n个元素组成的集合有子集2^n个，真子集2^n-1个

(2)要会写子集：ϕ、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{5\}$、$\{7\}$、$\{2,3\}$、$\{2,5\}$、$\{2,$

7}、{3,5}、{3,7}、{5,7}、{2,3,5}、{2,3,7}、{2,5,7}、{3,5,7}、{2,3,5,7}.

例3 设全集I={小于10的自然数}，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，求$A$和$B$。

解：利用文氏图分析最简明清楚(图1—1)

可知 $A=\{2,3,5,7\}$、$B=\{2,4,6,8\}$

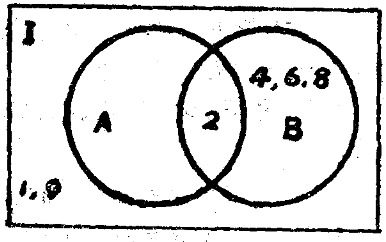

图 1—1

二、映射与函数概念

函数概念建立在集合与映射基础上，构成函数的要素是定义域、值域、对应法则。只要这三者完全相同就认为是同一个函数。(事实上只需定义域和对应法则相同，值域必相同)。函数与解析几何中曲线的方程有区别，对函数来说：每个自变量x在定义域内每取一个值时，函数y值唯一存在，而曲线方程中每个x值在定义域内取一个值时，y值可以是一个，也可以是多个。反函数则只有一一映射确定的函数才有，它们的图象关于$y=x$直线对称，性质也只是将x、y互换即可得到。

例4 集合A中有元素a、b、c，集合B中有元素m、n、p，问不同的集合A到集合B的映射共有多少个？

解：注意映射的概念，要求集合A中每个元素在集合B中都有象，且只有一个象。所以元素a的象有3种可能，b的象也有3种可能，c的象也有3种可能。∴共有$3^3=27$种不同的映射。

例5 指出下列各函数中的相同函数：

$f_1(x)=x$、$f_2(x)=(\sqrt{x})^2$、$f_3(x)=\sqrt{x^2}$、$f_4(x)=$

$\frac{x(x-2)}{x-2}$、$f_5(x)=\sqrt[3]{x^3}$、$f_6(x)=2^{\log_2 x}$、$f_7(x)=|x|$、$f_8(x)=\sin(\arcsin x)$。

解：$f_1(x)$与$f_5(x)$是同一个函数，$f_3(x)$与$f_7(x)$是同一个函数。由于它们的定义域、值域、对应法则都相同，而其他不尽相同。

例6　已知 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases} x & (x<0) \\ x^2 & (x\geqslant 0)\end{cases}$

求　$f[f(x)]$、$f[g(x)]$、$g[g(x)]$

解：$f(x)$可以化为$f(x)=\begin{cases} 0(x<0) \\ x(x\geqslant 0)\end{cases}$

$$\therefore f[f(x)]=\begin{cases} 0(x<0) \\ x(x\geqslant 0)\end{cases}$$

$$f[g(x)]=\begin{cases} 0\ (x<0) \\ x^2(x\geqslant 0)\end{cases}\qquad g[g(x)]=\begin{cases} x\ (x<0) \\ x^4(x\geqslant 0)\end{cases}$$

例7　已知 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x>0) \\ 2 & (x=0) \\ 0 & (x<0)\end{cases}$

求 $f\{f[f(-2)]\}$，$f[f(x)]$

解：$f\{f[f(-2)]\}=f\{f(0)\}=f\{2\}=3$

$$f[f(x)]=\begin{cases} x^4-2x^2 & (x>1) \\ 2 & (x=1) \\ 0 & (0<x<1) \\ 3 & (x=0) \\ 2 & (x<0)\end{cases}$$

说明：由于$0<x<1$时，$f(x)$按x^2-1对应法则$\therefore f(x)<0$ $\therefore f[f(x)]=0$　$x>1$时$x^2-1>0$　$\therefore f[f(x)]=(x^2-1)^2-1$

$=x^4-2x^2$。

例8 已知函数 $f(x)$ 对于 $x>0$ 有意义，且同时适合(1) $f(2)=1$，(2) $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$，(3) $x>y \Leftrightarrow f(x)>f(y)$.(1)求证 $f(1)=0$，(2)求 $f(4)$ 的值，(3)求满足 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$ 的 x 取值范围。

解：(1)令 $x=y=1$ 则 $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$
即 $f(1)=2f(1)$ $\therefore f(1)=0$ 得证

(2)令 $x=y=2$ 得 $f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)$ $\because f(2)=1$
$\therefore f(4)=2\cdot f(2)=2$

(3) $\because f(x)+f(x-3)=f[x(x-3)]$ $2=f(4)$
$\because f(x)+f(x-3)\leqslant 2 \Leftrightarrow f[x(x-3)]\leqslant f(4)$

由 $x>y \Leftrightarrow f(x)>f(y)$ 性质知 $x(x-3)\leqslant 4$

$\therefore x^2-3x-4\leqslant 0$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 4$

但满足定义域 $x>3$ $\therefore$ 满足关系 $3<x\leqslant 4$

例9 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\geqslant 0) \\ -x^2+1 & (x<0)\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数。

解：$x\geqslant 0$ 时 $y=x^2+1$ $x=\sqrt{y-1}$ $\therefore$ 反函数是
$y=\sqrt{x-1}$ $x\geqslant 1$

$x<0$ 时 $y=-x^2+1$ $x=-\sqrt{1-y}$ $\therefore$ 反函数是 $y=-\sqrt{1-x}$ $x<1$

$\therefore$ 反函数是 $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1} & (x\geqslant 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1)\end{cases}$

三、函数的图象

根据函数式画图象的基本方法是描点法(列表、描点、连线)，很多函数是经过变换(对称、平移等)得到的，掌握变换规律能更好地画出图象。

例10 画出下列各函数的图象：(1) $y=\dfrac{6x+5}{4x-2}$；(2) $y=|2^x-2|$；(3) $y=\dfrac{|1-x^2|x}{x^2-1}$；(4) $y=10^{|\lg(x-1)|}$。

解：(1) 化为 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(y-\dfrac{3}{2}\right)=2$ 图1—2(A)

(2) 化为 $y=\begin{cases}2^x-2 & (x\geqslant 1)\\ 2-2^x & (x<1)\end{cases}$ 图1—2(B)

(3) 化为 $y=\begin{cases}-x & |x|<1\\ x & |x|>1\end{cases}$ 图1—2(C)

(4) 化为 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & (1<x<2)\\ x-1 & (x\geqslant 2)\end{cases}$ 图1—2(D)

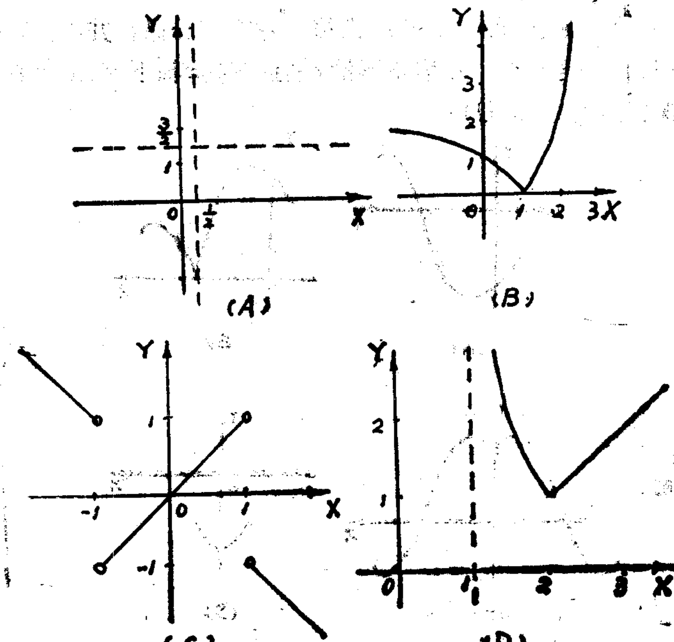

图 1—2

例11 已知 $y=f(x)$ 的图象如图1—3，画出下列各函数的图象：(1) $y=-f(x)$；(2) $y=|f(x)|$；(3) $y=f(|x|)$；(4) $y=-f(-|x|)$。

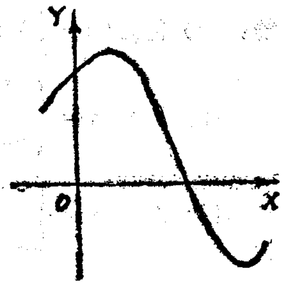

图 1—3

解：(1)将原图象沿 x 轴整个翻转成原图象的对称图象；(图1—4(A))

(2)将图象 x 轴下方部分，沿 x 轴翻转到上方，原下方部分不保留；(图1—4(B))

(3)将图象 y 轴左方部分去掉，右方部分保留并沿 y 轴翻转到左方，成为以 y 轴为对称轴的对称图象；(图1—4(C))

(4)将图象 y 轴右方部分去掉，左方部分保留并沿 y 轴翻转到右方，再将整个对称图形沿 x 轴翻转到 x 轴下方，上方部分不保留。(图1—4(D))

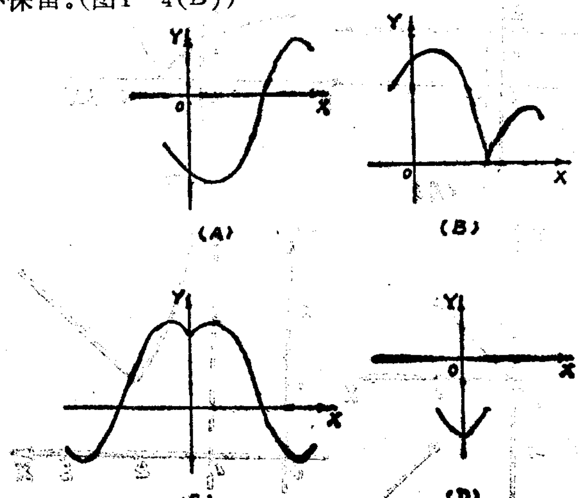

图 1—4

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例12 已知函数图象如图1—5，求它的函数解析式。

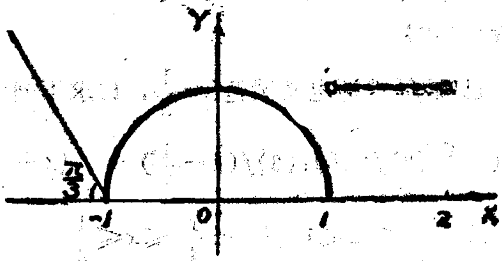

图 1—5

解

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{3}(x+1) & (x<-1)\\ \sqrt{1-x^2} & (-1\leqslant x\leqslant 1)\\ 1 & (1<x<2)\end{cases}$$

四、函数的性质

要从不同角度深刻认识各种性质的本质含意，切忌表面化和死背定义，注意规律性的结论，从而使研究函数更加简化。

1.定义域

例13 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{\sqrt{|x-1|-2}}{1-\lg(7-2x)}$；(2) $y=\sqrt{x^2-16}+\sqrt{\sin x}$。

解：(1) $\begin{cases}|x-1|-2\geqslant 0\\ 7-2x>0\\ 1-\lg(7-2x)\neq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x\leqslant -1\text{或}x\geqslant 3\\ x<\dfrac{7}{2}\\ x\neq\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\therefore\ x\leqslant -1$且$x\neq-\dfrac{3}{2}$ 或 $3\leqslant x<\dfrac{7}{2}$

(2) $\begin{cases}x^2-16\geqslant 0\\ \sin x\geqslant 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x\leqslant -4\text{或}x\geqslant 4\\ 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi \qquad k\in z\end{cases}$

$\therefore\ -2\pi\leqslant x\leqslant -4$ 或 $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi$

$(k\in z$ 且 $k\neq -1,0)$

例14 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[-\frac{1}{2},1]$ 求下列函数的定义域：(1) $f(2x)$；(2) $f(x^2)$；(3) $f(x-\frac{1}{2})+f(x+\frac{1}{2})$。

解：(1) 取 $-\frac{1}{2}\leqslant 2x\leqslant 1$ 得 $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$

$\therefore$ 定义域是 $[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

(2) 取 $-\frac{1}{2}\leqslant x^2\leqslant 1$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 1$ $\therefore$ 定义域是 $[-1,1]$

(3) 取 $\begin{cases}-\frac{1}{2}\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant 1\\ -\frac{1}{2}\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant 1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\\ -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ $\therefore$ 定义域是 $[0,\frac{1}{2}]$

例15 已知 $f(x-1)+f(x+1)$ 的定义域是 $[-1,1]$ 求 $f(x)$ 的定义域。

解：由 $x\in[-1,1]$ 得 $x-1\in[-2,0]$，$x+1\in[0,2]$

$\therefore f(x)$ 的定义域应是 $[-2,2]$

2.值域

例16 求下列各函数的值域：(1) $y=\sqrt{x^2-2x+4}-3$；(2) $y=\frac{2x-1}{3x+2}$；(3) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$；

解：(1) $y=\sqrt{(x-1)^2+3}-3\geqslant\sqrt{3}-3$ $\therefore$ 值域是 $[\sqrt{3}-3,\infty)$（用配方法）

(2) $y=\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2}{3}-\frac{7}{3(3x+2)}$ $\therefore$ $y\neq\frac{2}{3}$（实际是分子与分母中x项系数之比为不可取的值）。

(3)将原式化为$yx^2-yx+y-x^2-x-1=0$

$(y-1)x^2-(y+1)x+(y-1)=0$ $\because x\in R$

$\therefore\triangle\geqslant0$ 即$(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant0$ 解得 $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant3$

$\therefore$值域是$\left[\frac{1}{3},3\right]$ （用判别式法）

例17 已知函数$y=\lg(-x^2+4x-3)$ $(1<x<2)$ 求它的反函数及反函数的定义域和值域。

解：$y=\lg(-x^2+4x-3)$ $\therefore-(x-2)^2+1=10^y$

解出 $x-2=-\sqrt{1-10^y}$ （$\because1<x<2$）

$\therefore$反函数是 $y=2-\sqrt{1-10^x}$

反函数的定义域是$(-\infty,0)$，值域是$(1,2)$

3.奇偶性

函数的奇偶性反映了图象的对称性，一个函数可能是奇函数，可能是偶函数，也可能是非奇非偶函数。还可能既是奇函数又是偶函数，如$y=0$，其中定义域是关于原点的对称区间。从函数奇偶性的定义可以知道，奇函数、偶函数的定义域都是关于原点的对称区间，若定义域不是关于原点的对称区间，必不是奇函数也不是偶函数。判断奇偶性的基本方法是根据定义，但若掌握了一些简单函数的奇偶性以后经常可以按如下规律：奇＋奇＝奇、奇＋偶＝非、偶＋偶＝偶、奇×奇＝偶、奇×偶＝奇、偶×偶＝偶。其中“奇”表示奇函数但不是偶函数，“偶”表示偶函数但不是奇函数、“非”表示非奇非偶函数。

例18 判断下列各函数的奇偶性：(1) $y=x+\sin x$；(2) $y=x^2\cos x \quad x\in(-2\pi,4\pi)$；(3) $y=\sin x+\cos x$；

(4) $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{1-|x|}$；(5) $y=\dfrac{x(a^x+1)}{a^x-1}$；

(6) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$。

解：(1)奇函数；(2)非奇非偶函数；(3)非奇非偶函数；(4)偶函数；(5)偶函数；(6)奇函数。

例19 若 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时 $f(x)=x(2-x)$，求 $x<0$ 时 $f(x)$ 的表达式。

解：当 $x<0$ 时 $-x>0$，$\therefore f(-x)=(-x)(2+x)$ $\because f(x)$ 是奇函数 $\therefore f(-x)=-f(x)$ $\therefore -f(x)=-x(2+x)$

$\therefore f(x)=x(2+x)$

说明：结合图象进行分析比较直观，请读者自己完成。

4.单调性

单调性包含单调区间和增减性两个内容，注意判断单调性主要靠定义。(学过导数的可以用导数)。

例20 若函数 $y=f(x)$ 定义域是 $(-\infty,\infty)$ 且是偶函数，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，求证 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上是减函数。

证明：在 $(0,\infty)$ 上任取 x_1,x_2 且有 $x_1<x_2$

可知 $-x_1>-x_2$ 且 $-x_1,-x_2\in(-\infty,0)$

由于 $(-\infty,0)$ 上是增函数，$\therefore f(-x_1)>f(-x_2)$

$\because f(x)$ 是偶函数 $\therefore f(-x_1)=f(x_1)$ $f(-x_2)=f(x_2)$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上是减函数

例21 若函数 $f(x)$ 与它的反函数满足 $f(x)=f^{-1}(x)$，且在定义域 $(-\infty,\infty)$ 上是增函数，求证 $f(x)=x$。

证明：设任意自变量x_0的象是y_0 即$y_0=f(x_0)$ (1)

由反函数定义 $x_0=f^{-1}(y_0)$ $\because f(x)=f^{-1}(x)$

$\therefore x_0=f(y_0)$ (2)

由(1)(2) 若$y_0>x_0$ $\therefore f(x_0)>f(y_0)$ 与 $f(x)$ 为增函数矛盾，若$y_0<x_0$ $\therefore f(x_0)<f(y_0)$ 与$f(x)$为增函数矛盾。只有$y_0=x_0$ 由于对任意x_0都有$y_0=x_0$ $\therefore f(x)=x$

5.周期性

不仅三角函数是周期函数，注意周期函数定义中隐含的一些条件。如：定义域必是无穷区间，任意定义域内x值，$x+T$ (T是周期)也是定义域内的值。

例22 若函数$y=f(x)$的周期为4的奇函数，且$f(9)=3$，求$f(-1)$值。

解：$\because f(x)$是奇函数 $\therefore f(-1)=-f(1)$ $\because$ 周期是4 $\therefore f(9)=f(1)$

$\therefore f(-1)=-f(1)=-3$

例23 已知偶函数$y=f(x)$满足 $f(m+x)=f(m-x)$ $(m\neq 0)$，求证$f(x)$是周期函数。

证明：定义域内取任意一值x_0，则x_0+m也在定义域内，由$f(m+x)=f(m-x)$得

$f[m+(x_0+m)]=f[m-(x_0+m)]$

即$f(x_0+2m)=f(-x_0)$

$\because f(x)$是偶函数 $\therefore f(-x_0)=f(x_0)$

$\therefore f(x_0+2m)=f(x_0)$ 且$2m\neq 0$

由定义可知$f(x)$是周期函数。

五、函数的应用

1.利用函数研究方程和不等式

例24 若方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ 的两根分

别在(0,1)和(1,2)内，求k的取值范围。

解：左式$f(x)$看成二次函数，图象是开口向上的抛物线，并在(0,1)和(1,2)区间与x轴相交，可知$f(0)>0$、$f(1)<0$，$f(2)>0$

∴只需解不等式组

$$\begin{cases} k^2-k-2>0 \\ 7-(k+13)+k^2-k-2<0 \\ 28-2(k+13)+k^2-k-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2-k-2>0 \\ k^2-2k-8<0 \\ k^2-3k>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k<-1\text{或}k>2 \\ -2<k<4 \\ k<0\text{或}k>3 \end{cases} \Rightarrow -2<k<-1\text{或}3<k<4$$

∴ 当$-2<k<-1$或$3<k<4$时方程两根分别在(0,1)和(1,2)之间。

例25 求方程$\sin x=\frac{1}{100}x$实数解的个数。

分析：这方程没有一般初等解法，但题目不要求解而只求实数解的个数。可以看成函数$y=\sin x$与$y=\frac{1}{100}x$图象交点的个数。由于都是奇函数，∴只需研究$(0,\infty)$部分，再利用对称性解决。由于$y=\sin x$是周期为2π的函数，$y=\frac{1}{100}x$是一条过原点的直线，当$x\notin[-100,100]$时两个图象不可能有交点，而$[0,100]$上$y=\sin x$共经过$\frac{100}{2\pi}\approx15.9$个周期，而直线$y=\frac{1}{100}x$与$y=\sin x$的每个周期都有两个交点，而且都在前半个周期。所以$y=\frac{1}{100}x$与$y=\sin x$在$[0,100]$上共有32个

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com