

大学本科数学教材

高等数学 (下册)

GAODENG SHUXUE

蔡高厅 邱忠文 主编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学本科数学教材

高等数学

(下册)

蔡高厅 邱忠文 主编



天津大学出版社

内 容 提 要

《高等数学》分上、下两册,内容覆盖现行理工类院校高等数学教学的全部内容,但特别注意针对远程高等教育、成人教育和高等职业技术教育的教学需要,做到内容选择适当,重点突出,难点分散;叙述深入浅出,便于自学;理论分析注重几何和物理解析,有必要的抽象概括和严密的逻辑推理。

本书是《高等数学》下册,内容包括多元函数微分学、重积分、曲线积分及面积分、无穷级数、微分方程等5章。

本书适合全日制普通高等学校及远程高等教育、高等职业教育、成人高等教育的本科学生使用,也适合自学。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/蔡高厅,邱忠文主编. —天津:天津大学出版社,2004.9
大学本科数学教材
ISBN 7-5618-2030-5

I. 高… II. ①蔡…②邱… III. 高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 097752 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地 址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网 址	www.tjup.com
电 话	发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷	河北省昌黎县第一印刷厂
经 销	全国各地新华书店
开 本	148mm × 210mm
印 张	12.25
字 数	369 千
版 次	2004 年 9 月第 1 版
印 次	2004 年 9 月第 1 次
印 数	1—4 000
定 价	20.00 元

前 言

为了适应高等工科院校本科生对高等数学课程的教学需要,结合当前的教学实际,我们编写了《高等数学》教科书.本书是编者根据全日制高等工业学校高等数学课程教学基本要求和全国成人高等教育本科高等数学课程教学基本要求编写的,无论对全日制普通高等学校的本科生,还是对网络高等教育、成人高等教育、函授和高等职业技术教育的本科生,都是学习高等数学适宜的教科书.

高等数学是高等学校理工、经济、管理类院校最主要的基础理论课之一,课程的教学对提高学生的科学文化素质、对在校期间的学习和今后的发展都将产生深远影响.本书的编者在全日制普通高等学校长期从事高等数学及应用数学的教学工作,最近几年又在远程高等教育、成人教育及高等职业技术教育的教学中积累了丰富的经验,对教学内容、教学要求和学生的学习情况都有深刻了解.教材内容和编写的针对性都尽力做到内容选择适当,符合教学要求;章节编排重点突出,难点分散;文字叙述深入浅出,便于自学;理论分析注意几何和物理的解析,进行必要的抽象概括和严密的逻辑推理.

本书分上、下两册.全书内容覆盖了现行理工类院校高等数学教学的全部内容.书中有*的部分为非重点要求的内容或练习题,供选学时参考.

为了帮助学生学习和我们还编写了与本教材相配套的辅导参考书:《高等数学(上、下册)习题解答与测试》(天津大学出版社出版)和《高等数学专题辅导讲座(上、下册)》(国防工业出版社出版).

本书的编写和出版,得到了天津大学网络教育学院的大力支持及教学管理部全体老师的具体帮助,编者在此表示深切感谢.

参加本书编写的有蔡高厅、邱忠文、李君湘、严丽、韩健、韩月丽、孙秀萍、刘瑞金等.由于编者水平有限,敬请读者对书中的错误之处予以批评指正.

编者

2004年2月于天津大学

第 8 章 多元函数微分学	(1)
§ 1 多元函数的概念	(1)
1.1 平面点集、邻域与区域	(1)
1.2 多元函数的概念	(3)
1.3 二元函数的几何意义	(6)
1.4 二元函数的极限	(7)
1.5 二元函数的连续性	(10)
习题 8-1	(13)
§ 2 偏导数	(14)
2.1 偏导数的概念	(14)
2.2 高阶偏导数	(19)
习题 8-2	(22)
§ 3 全微分及其应用	(23)
3.1 全微分的概念	(23)
3.2 二元函数可微的必要条件和充分条件	(25)
3.3* 全微分在近似计算中的应用	(29)
习题 8-3	(32)
§ 4 多元复合函数微分法	(33)
4.1 多元复合函数微分法	(33)
4.2 全微分形式不变性	(39)
4.3 多元复合函数的高阶偏导数	(41)
习题 8-4	(44)
§ 5 隐函数微分法	(45)
5.1 一个方程所确定的隐函数的微分法	(45)
5.2* 方程组所确定的隐函数的微分法	(49)
习题 8-5	(51)

目 录

§ 6 方向导数和梯度	(52)
6.1 方向导数	(52)
6.2* 梯度	(54)
习题 8-6	(57)
§ 7 偏导数在几何上的应用	(58)
7.1 空间曲线的切线与法平面	(58)
7.2* 曲面的切平面和法线	(62)
习题 8-7	(67)
§ 8 多元函数的极值	(68)
8.1 多元函数的极值	(68)
8.2 多元函数的最大值与最小值	(71)
8.3 条件极值——拉格朗日乘数法	(75)
习题 8-8	(80)
复习题 8	(81)
第 9 章 重积分	(84)
§ 1 二重积分的概念及性质	(84)
1.1 二重积分的两个实例	(84)
1.2 二重积分的定义	(86)
1.3 二重积分的性质	(88)
习题 9-1	(90)
§ 2 二重积分的计算	(91)
2.1 直角坐标系中二重积分的计算	(91)
2.2 极坐标中二重积分的计算	(103)
2.3* 二重积分的一般变量代换	(109)
习题 9-2	(113)
§ 3 三重积分的概念和性质	(114)

3.1	三重积分的定义	(114)
3.2	三重积分的性质	(116)
	习题 9-3	(117)
§ 4	三重积分的计算	(118)
4.1	在直角坐标系中三重积分的计算	(118)
4.2	在柱面坐标系中三重积分的计算	(122)
4.3*	在球面坐标系中三重积分的计算	(126)
4.4*	三重积分的一般变量代换	(128)
	习题 9-4	(130)
§ 5	重积分的应用	(131)
5.1	几何方面的应用	(131)
5.2	物理、力学方面的应用	(139)
	习题 9-5	(145)
	复习题 9	(146)
第 10 章	曲线积分与曲面积分	(149)
§ 1	第一类曲线积分	(149)
1.1	第一类曲线积分的概念及性质	(149)
1.2	第一类曲线积分的计算	(152)
	习题 10-1	(156)
§ 2	第二类曲线积分	(157)
2.1	向量场的概念	(157)
2.2	第二类曲线积分的概念及性质	(158)
2.3	第二类曲线积分的计算	(161)
2.4*	第一、二类曲线积分之间的关系	(167)
	习题 10-2	(168)
§ 3	格林公式	(169)

目 录

3.1 格林(Green)公式	(169)
3.2 平面曲线积分与路径无关的条件	(175)
习题 10-3	(180)
§ 4 第一类曲面积分	(182)
4.1 第一类曲面积分的概念及性质	(182)
4.2 第一类曲面积分的计算	(184)
习题 10-4	(186)
§ 5 第二类曲面积分	(186)
5.1 有向曲面	(187)
5.2 第二类曲面积分的概念及性质	(188)
5.3 第二类曲面积分的计算	(192)
习题 10-5	(195)
§ 6 高斯公式 曲面积分与曲面无关的条件	(196)
6.1 高斯(Gauss)公式	(197)
6.2* 曲面积分与曲面无关的条件	(200)
习题 10-6	(201)
§ 7 斯托克斯公式 空间曲线积分与路径无关的条件	(202)
7.1 斯托克斯(Stokes)公式	(203)
7.2* 空间曲线积分与路径无关的条件	(206)
习题 10-7	(208)
§ 8* 向量场的散度与旋度	(209)
8.1 向量场的散度	(209)
8.2 向量场的旋度	(211)
8.3* 哈密尔顿(Hamilton)算子	(215)
习题 10-8	(217)
复习题 10	(217)

第十一章 无穷级数	(221)
§ 1 数项级数	(221)
1.1 无穷级数的基本概念	(221)
1.2 无穷级数的基本性质	(224)
1.3 正项级数敛散性的判别法	(226)
1.4 任意项级数敛散性的判别法	(234)
习题 11-1	(239)
§ 2 幂级数	(241)
2.1 幂级数的收敛域	(242)
2.2 幂级数的性质	(248)
习题 11-2	(252)
§ 3 函数的幂级数展开	(253)
3.1 泰勒(Taylor)级数	(253)
3.2 函数展开成幂级数	(255)
3.3 求幂级数的和函数	(261)
3.4* 幂级数的应用	(263)
3.5 欧拉(Euler)公式	(266)
习题 11-3	(268)
§ 4* 函数项级数的一致收敛性和一致收敛级数的基本性质	(269)
4.1 函数项级数的一致收敛性	(270)
4.2 一致收敛级数的基本性质	(274)
习题 11-4*	(278)
§ 5 傅里叶级数	(279)
5.1 三角函数系的正交性	(279)
5.2 傅里叶(Fourier)级数	(280)

5.3 正弦级数与余弦级数	(286)
5.4 以 $2l$ 为周期的周期函数的傅里叶级数	(290)
习题 11-5	(293)
复习题 11	(293)
第 12 章 微分方程	(296)
§ 1 微分方程的基本概念	(296)
1.1 引例	(296)
1.2 微分方程的基本概念	(297)
习题 12-1	(300)
§ 2 一阶微分方程	(300)
2.1 可分离变量的微分方程	(301)
2.2 齐次方程	(303)
2.3 一阶线性微分方程	(310)
2.4 全微分方程	(314)
2.5 一阶微分方程应用举例	(320)
习题 12-2	(323)
§ 3 可降阶的高阶微分方程	(324)
3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	(325)
3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	(326)
3.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	(328)
习题 12-3	(330)
§ 4 线性微分方程解的结构	(331)
4.1 二阶线性齐次微分方程解的结构	(332)
4.2 线性非齐次微分方程解的结构	(334)
习题 12-4	(335)
§ 5 常系数线性微分方程	(336)

5.1 常系数线性齐次微分方程	(336)
5.2 二阶常系数线性非齐次微分方程	(340)
习题 12-5	(354)
§ 6 变系数的线性微分方程	(355)
6.1 欧拉(Euler)方程	(355)
6.2 二阶变系数线性齐次微分方程的一些基本知识	(357)
6.3 求二阶变系数非齐次微分方程特解的常数变易法 ...	(359)
习题 12-6	(361)
复习题 12	(362)
附录 积分表	(364)

第8章 多元函数微分学

在本书的上册所讨论的函数都是只有一个自变量的函数,通常称为一元函数或单元函数.但是在科技中常常会遇到依赖于两个或两个以上的自变量的函数,这就是本章要讨论的多元函数.即在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的基本概念,多元函数的微分法及其应用.在叙述上则以二元函数为主,其方法和结论原则上也适用于一般的多元函数.

§1 多元函数的概念

1.1 平面点集、邻域与区域

当考虑两个变量 x 与 y 时,把有序数组 (x, y) 看作是 xOy 平面上一点 P 的直角坐标 $P(x, y)$,那么 x 和 y 的变化范围就对应着平面上某个点集.通常称平面上满足某一条件的一切点的集合称为平面点集,用大写字母 $D, E, F, \dots$ 等表示平面点集.例如

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}, E = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}.$$

D 表示平面上满足 $x^2 + y^2 < 1$ 的一切点 (x, y) 所组成的集合,即由圆心在原点的单位圆内的一切点所组成的集合; E 表示由平面直角坐标系中第一象限内的一切点所组成的集合.

1. 邻域

在平面上与点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离小于 δ ($\delta > 0$) 的一切点 (x, y) 的集合,称为点 P_0 的 δ 邻域,记为 $N(P_0, \delta)$,即

$$N(P_0, \delta) = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}.$$

在几何上,邻域 $N(P_0, \delta)$ ($\delta > 0$) 就是平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心、 δ 为半径的圆内的点 (x, y) 的全体. δ 称为邻域 $N(P_0, \delta)$ 的半径, 如果不必要强调邻域的半径 δ , 就用 $N(P_0)$ 来表示点 P_0 的某邻域.

2. 区域

设 E 为平面上的点集, 点 $P \in E$, 如果存在 $\delta > 0$, 使得点 P 的 δ 邻域 $N(P, \delta) \subset E$, 则称点 P 为 E 的一个内点(图 8-1). 如果点集 E 的所有点都是内点, 则称 E 为开集.

例如点集 $E_1 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 中的所有的点都是内点, 因此 E_1 是开集.

如果不论点 P 的邻域多么小, 都同时含有属于点集 E 的点和不属于点集 E 的点(点 P 可以属于 E , 也可以不属于 E), 则称点 P 为 E 的边界点(图 8-2). 点集 E 的边界点的全体称为 E 的边界.

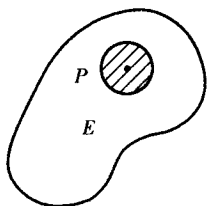


图 8-1

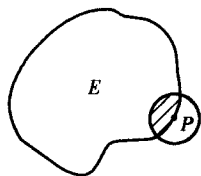


图 8-2

例如上面的点集 $E_1 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及 $x^2 + y^2 = 4$ 上的每一点都是 E_1 的边界点, 上面两个圆周都是 E_1 的边界.

设 E 是开集, 如果 E 内的任何两点 P_1 和 P_2 , 都可以用完全属于 E 的一条折线将它们连接起来, 则称开集 E 是连通的. 连通的开集就称为区域或开区域. 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}, E = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$$

都是区域, 而

$$F = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

是闭区域.

如果存在 $M > 0$, 使得对于区域 D 中任何点 $P(x, y)$, 都有

$$|x| \leq M, |y| \leq M,$$

则区域 D 是有界的, 否则称区域为无界的.

例如, 区域 $D = \{x, y | x^2 + y^2 < 1\}$ 是有界区域, 而 $E = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ 是无界区域.

1.2 多元函数的概念

在许多实际问题中, 经常会遇到一个变量依赖于多个变量的函数关系, 下面举例说明.

例 1.1 设直圆柱体的底圆半径为 x , 高为 y , 则该圆柱体的体积 V 与 x, y 有以下依从关系:

$$V = \pi x^2 y, (x > 0, y > 0).$$

这里, 底圆半径 x 与高 y 是相互独立取值的两个变量, 当 x, y 在它们的变化范围 $x > 0, y > 0$ 内, 即在区域

$$D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$$

内取定一组值 (x, y) 后, 通过关系式 $V = \pi x^2 y$ 有一个体积 V 的值与之对应.

例 1.2 设由电阻 R_1, R_2 组成并联电路, 其总电阻为 R , 根据电学知识可知, R 与 R_1, R_2 有以下依从关系:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, (R_1 > 0, R_2 > 0).$$

这里, 电阻 R_1 与 R_2 是相互独立取值的两个变量, 当 R_1, R_2 在它们的变化范围 $R_1 > 0, R_2 > 0$ 内, 即在区域

$$E = \{(R_1, R_2) | R_1 > 0, R_2 > 0\}$$

内取定一组值 (R_1, R_2) 后, 通过关系式

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

都有一个总电阻 R 的值与之对应.

上面两例的实际意义虽然各不相同,但从数量关系上观察,它们却有共同的特征,抽出它们的共性就得到二元函数的定义.

定义 1.1 设 D 是平面上一个点集,若对于 D 中每一点 $P(x, y)$, 通过确定的规律 f 都有惟一的实数 z 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的二元函数,记作

$$z = f(x, y), \text{ 或 } z = f(P).$$

其中 x, y 称为自变量, z 称为因变量, (x, y) 的取值范围 D 称为函数的定义域,也记为 D_f .

当点 $P(x, y)$ 遍取函数定义域 D_f 中的一切点时, z 的对应值的全体组成数集 V_f , 即

$$V_f = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D_f\},$$

称为函数的值域.

若取 $(x_0, y_0) \in D_f$, 函数 z 的对应值为 z_0 , 就记作 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 称为二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $x = x_0, y = y_0$ 时的函数值.

类似地可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 及三元以上的函数.

人们把二元及二元以上的函数统称为多元函数.

函数的自变量 (x, y) 与因变量 z 的对应规律以及函数的定义域是函数定义的两个要素, 确定函数的定义域是掌握函数的重要方面. 从实际问题提出的函数, 一般是根据实际问题是否有意义来确定函数的定义域. 例 1.1 中直圆柱体底圆的半径 x 、高 y 都是取正值的. 那么直圆柱体的体积函数 $V = \pi x^2 y$ 的定义域为

$$D_f = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}.$$

而由具体的数学表达式所表示的函数 $z = f(x, y)$, 它的定义域是根据该数学表达式 $f(x, y)$ 有意义的那些 (x, y) 的全体.

例 1.3 求函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}$ 的定义域.

解 为了使数学表达式 $\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}$ 有意义, 自变量 (x, y) 须满足

不等式 $1 - x^2 - \frac{y^2}{4} \geq 0$, 即 $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

第8章 多元函数微分学

所求的函数定义域是以坐标原点为中心,短半轴长为1(在 x 轴上),长半轴长为2(在 y 轴上)的椭圆闭区域(图 8-3),即

$$D_f = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

例 1.4 求函数 $z = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4} + \ln(x^2 + y^2 - 1)$ 的定义域.

解 为了使数学表达式 $\arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}$ 有意义,自变量 (x, y) 须满足不等式 $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq 1$,

为了使数学表达式 $\ln(x^2 + y^2 - 1)$ 有意义,自变量 (x, y) 须满足不等式 $x^2 + y^2 - 1 > 0$,

为了使上面两个数学表达式都有意义,自变量必须满足不等式组

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{4} \leq 1, \\ x^2 + y^2 - 1 > 0, \end{cases}$$

不等式组的解集为 $1 < x^2 + y^2 \leq 4$, 它的图形是圆环区域(图 8-4). 即

$$D_f = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

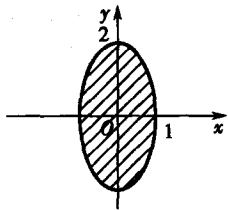


图 8-3

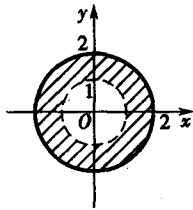


图 8-4

例 1.5 设 $f(x+y, x-y) = xy + y^2$, 求 $f(x, y)$ 的表达式.

解法 1 设 $\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2}, \\ y = \frac{u-v}{2}. \end{cases}$ 代入原表达式,

$$\begin{aligned}
 \text{得} \quad f(u, v) &= \frac{u+v}{2} \cdot \frac{u-v}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{u^2 - v^2}{4} + \frac{u^2 - 2uv + v^2}{4} \\
 &= \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}uv = \frac{1}{2}u(u-v).
 \end{aligned}$$

$$\text{从而有} \quad f(x, y) = \frac{1}{2}x(x-y).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法 2} \quad f(x+y, x-y) &= xy + y^2 = (x+y)y \\
 &= (x+y) \left[\frac{(x+y) - (x-y)}{2} \right].
 \end{aligned}$$

把 $x+y$ 换为 x , $x-y$ 换为 y , 即得

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x(x-y).$$

1.3 二元函数的几何意义

设有二元函数 $z = f(x, y)$, 其定义域为 D_f . 任意取定点 $P_0(x_0, y_0) \in D_f$, 对应的函数值记为 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中就确定了一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$. 当动点 $P(x, y)$ 遍取函数定义域 D_f 的一切点时, 对应的点 $M(x, y, z)$ 的轨迹就是二元函数 $z = f(x, y)$ 的几何图形, 一般情况其图形是一张曲面, 而其定义域 D_f 正是这张曲面在 xOy 面上的投影.

例 1.6 作二元函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图形.

解 由空间解析几何知识, 可知函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图形是顶点在原点, 以 Oz 轴为对称轴的上半圆锥面(图 8-5).

例 1.7 作二元函数 $z = 1 - x^2 - y^2$ 的图形.

解 由空间解析几何知识, 可知函数 $z = 1 - x^2 - y^2$ 是以点 $(0, 0, 1)$ 为顶点, 以 Oz 轴为对称轴, 开口朝向 Oz 轴负方向的旋转抛物面(图 8-6).