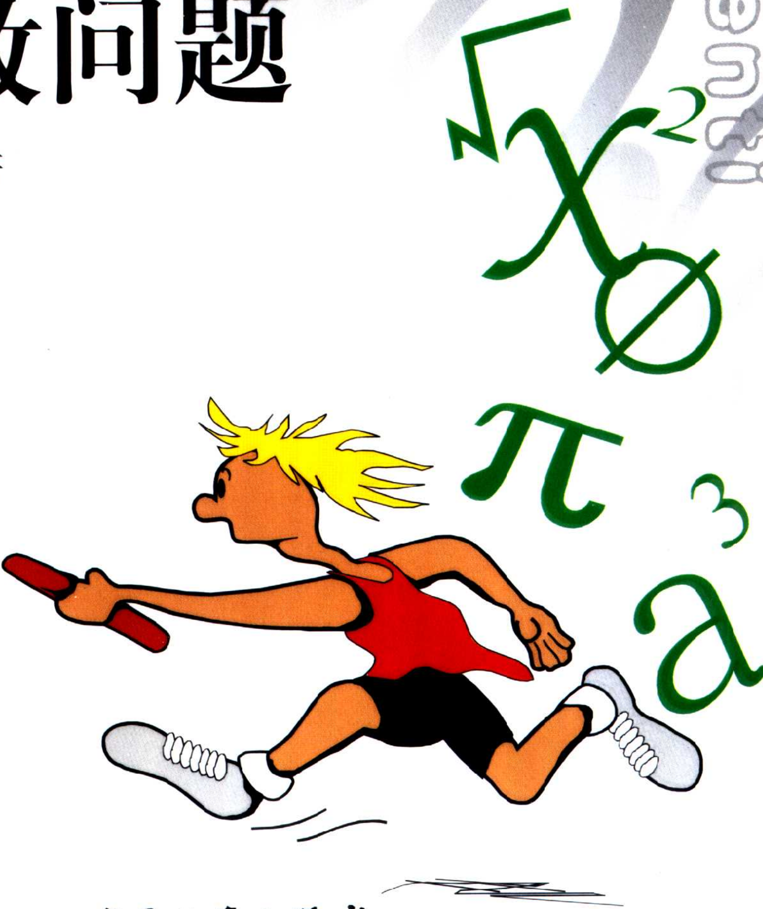
奥林匹克数学 普及讲座丛书（之一）

丛书主编 周春荔

初中数学竞赛中的代数问题

daishuwenti

周春荔 编著



中国物资出版社

周春荔主编　奥林匹克数学普及讲座丛书(之一)

初中数学竞赛中的代数问题

周春荔　编著

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛中的代数问题/周春荔编著.—北京：中国物资出版社,2004.8

(奥林匹克数学普及讲座丛书:1)

ISBN 7－5047－2199－9

Ⅰ.初… Ⅱ.周… Ⅲ.代数课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070193 号

责任编辑 黑俊贵

责任印制 方鹏远

责任校对 王 莉

中国物资出版社出版发行

网址:http://www.chph.cn

社址:北京市西城区月坛北街 25 号

电话:(010)68589540 邮编:100834

全国新华书店经销

北京才智印刷厂印刷

开本:850×1168mm 1/32 印张:9.75 字数:210 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7－5047－2199－9/G·0459

印数:0001—8000 册

定价:15.00 元

内 容 提 要

本册内容是对初中代数知识的自然延拓与扩充，内容包括代数式基础、乘法公式与因式分解、方程式理论初步、函数与极值。通过对初中数学竞赛的代数问题的分类讲解与练习，夯实基础知识，发展逻辑思维能力，领悟数学思想，培养创新意识。内容由浅入深，按知识系统，根据大纲逐年级上升，适于自学和配合教学同步进行，各章配有精选的练习题和解答，供练习选用，既可做学生学习奥林匹克数学的教材，又可做培训教练员的参考书。

序　言

2002年暑期，在从西安返京的列车上，遇到了中国物资出版社的副编审黑俊贵女士。我们谈到了数学奥林匹克，她很感兴趣。诚挚地写本数学奥林匹克的书在该社出版，为数学爱好者提供一份“营养套餐”。

回到北京，写书的事一直没有排上日程。后来，经过一催再促，才抽空草拟了个编写提纲。直到2003年春，才着手本套书的写作。

专门以十几岁的中学生为对象的现代意义下的数学竞赛，人们公认为起源于匈牙利。匈牙利的数学竞赛自1894年起至今已有百余年历史，每次竞赛出3道题，限4小时完成，允许使用参考书。试题别具风格，常常有高等数学背景，却用初等数学知识就可以解答。

匈牙利的数学竞赛造就了一批数学大师或科学巨匠。被称为匈牙利现代数学之父的费叶尔(1880—59)，著名力学家，现代航天事业的奠基人冯·卡门(1881—33)，著名的组合数学家寇尼希(1884—44)，群上测度与积分论的创始人哈尔(1885—1933)，泛函分析的奠基者之一黎斯(1880—1956)，著名分析学家舍贵(1895—)，拉多(1895—1965)等，都是早期的数学竞赛优胜者。这些事例表明，数学竞赛是发现和造就人才的一个重要途径。

1934年苏联列宁格勒大学主办了中学生数学奥林匹克，首次把数学考试与“奥林匹克”联系起来；1935年又由莫斯科大学主办

了中学生数学奥林匹克,受到广大师生的热烈欢迎。以后不少苏联的加盟共和国也相继举办数学奥林匹克。1961年开始举办全俄数学奥林匹克,1967年举办全苏数学奥林匹克。人们发现,前苏联基础教育阶段的高水平的数学教育与数学奥林匹克存在着一定的联系。20世纪中叶,世界出现了一个举办中学生数学竞赛的热潮。这个世界性的中学生数学奥林匹克热潮与新数学运动大体同时起步,但新数运动早已偃旗息鼓,而数学竞赛则正如火如荼。

世界各国的中学生数学竞赛活动的开展为国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad)的产生创造了条件,而国际数学奥林匹克(IMO)的产生与发展又推动了各地区、各国数学竞赛的发展。第一届国际数学奥林匹克(IMO)于1959年7月在罗马尼亚古都布拉索(位于布加勒斯特西北约200公里)拉开帷幕,这是数学竞赛跨越国界的创举。至今除1980年因故未举办外,到2003年已经举办了44届。1990年在北京举办第31届IMO时,已发展到54个国家或地区(308人),此后又逐年陆续增加到80多个队,约500人的规模。如今IMO已经成为国际上一项最有影响的学科竞赛,同时也是公认的水平最高的中学生数学竞赛。

1980年国际数学教育委员会决定成立IMO分委员会(1981年正式成立),负责安排每年活动的组织者。从第22届IMO开始,IMO更走向成熟。IMO的运作已经制度化、规范化,选手的水平也大大提高。随着数学竞赛的发展,已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学。数学奥林匹克的兴旺发展,影响了其他学科竞赛的发展,如物理、化学、生物、信息等国际奥林匹克相继兴起,国际学科竞赛已经成为一股促进学科教育发展的世界性潮流。

在2002年世界数学家大会期间及会后,不少人提出了一个十分有意思的话题:参加过历届国际数学奥林匹克的选手中有没有人拿到过菲尔兹奖?巧得很,2002年7月国际数学奥林匹克(香港)委员会主席岑嘉评教授为此专门撰文,我们仅摘录了IMO的优胜者后来获得菲尔兹奖的人的名字。

姓　名	国　籍	参加 IMO 时间	获奖时间
Gregory　Margulis	俄罗斯	1959 年银牌	1978 年菲尔兹奖
Valdimir　Drinfeld	乌克兰	1969 年金牌	1990 年菲尔兹奖
Jean - Ghristoophe　Yoccoz	法国	1974 年金牌	1994 年菲尔兹奖
Richard　Borcherds	英国	1977 年金牌 1978 年银牌	1998 年菲尔兹奖
Timothy　Gowers	英国	1981 年金牌	1998 年菲尔兹奖
Laurant　Lafforgue	法国	1985 年金牌	2002 年菲尔兹奖

我国的中学生数学竞赛活动是与 20 世界 50 年代向苏联学习分不开的。

1946 年华罗庚应邀访苏三个月，看到苏联大学中有很多学生学数学，例如，格鲁吉亚的一个大学的 2000 多学生中就有 600 多个学生学数学。华罗庚问："你们这么多数学学生，将来毕业后，有些什么出路呢？"友人答的很妙："头脑受过数学训练的人，你担心他们会没有出路吗？"大数学家维诺格拉朵夫也说："数学是科学之母，一个国家如果数学不发达，其他都谈不上。"华罗庚听了柯尔幕哥洛夫与阿历山德罗夫为参赛中学师生的两次讲演。这样两位著名数学家，利用星期天休假给十五六岁的学生作讲演，那种诲人不倦，传播数学给一般人民的精神使华罗庚深受感动。除教室中席无虚座外，窗口上也挤满了人，其间还有白发苍苍的老年中学教师，他们是专程来听这些著名学者的讲演而求进步的。这些在华罗庚心中"埋藏了在中国倡办数学竞赛活动及数学普及活动的种子。"

1956 年，在华罗庚、苏步青、江泽涵等我国老一辈数学家的倡导下，由中国数学理事会发起，经高等教育部和教育部同意，我国举行了首次中学生数学竞赛，这次只在北京、天津、上海、武汉试办。待取得经验后，再逐步推广。据不完全统计，除 1959 年、1961 年中断外，1964 年前每年都有一些城市举办数学竞赛。这一时期，我国数学竞赛的势头良好，竞赛方式，试题难度，选手水平都与国

际持平。从 1965 年起到 1977 年,我国的数学竞赛因文革而中断了 13 年。这一时期的数学竞赛优胜者在文革后不少显露头角,正如王元院士在《数学竞赛之我见》中指出的:“要用事实说明数学竞赛活动的成就。例如,仅仅‘文革’前的几次低层次数学竞赛中,已有一些竞赛优胜者成才了。如上海的汪嘉冈、陈志华,北京的唐守文、石赫,他们现在已经是国内的著名中年数学家,有的已获博士导师资格。他们在文革中都被耽误了 10 年,否则完全会有更大成就。”

中国数学竞赛的国内成熟期是在 1978 年以后。1978 年粉碎了四人帮后迎来了科学的春天,4 月中旬,国务院批准全国举办数学竞赛,组织北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东 8 省市举办中学生数学竞赛,由方毅副总理任竞赛委员会主任,由中科院副院长中国数学会理事长华罗庚教授任竞赛委员会副主任,4 月 25 日召开了竞赛委员会第一次会议,确定了命题原则、竞赛方法、和推荐优秀学生免试进入大学的办法。全国有 20 万在校生参加。参加决赛的青少年,年龄最大的 19 岁,最小的 14 岁。多数是高中生,但也有少数的初中生。除上述 8 个省市之外,1978 年福建省,福州市,山西省等也组织了数学竞赛。

邓小平同志肯定了这次竞赛,方毅同志批示说:“这是发现人才,出人才的好方法之一,今后拟继续坚持下去。”由于 1979 年全国出现了竞赛过热形势,1980 年全国停办数学竞赛。教育部和各省的教育行政部门不再组办数学竞赛,我国的中学生数学竞赛转为民办。1981 年由中国数学会普及工作委员会,北京数学会发起全国高中数学联合竞赛,25 个省市参加,1982 年由上海组办,28 省市参加。以后各省市轮流组办,由中国数学会普及工作委员会进行调节,至今都采取这个模式。1984 年开始,举办全国初中数学联赛,也是采取上述模式。从 1991 年开始,中国数学会普及工作委员会举办小学生数学奥林匹克。

敬爱的华罗庚教授于 1985 年 6 月 12 日在出访日本讲学时因

心脏病突发而逝世，享年75岁。为了弘扬华罗庚教授的爱国主义精神，学习华老勤奋学习、献身科学的优秀品质，激发广大中小学生学习数学的兴趣，开发智力，普及数学科学，于1986年由中国少年报社、中国优选法统筹法与经济数学研究会、中国数学会、中央电视台、中国科协青少部共同举办了首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛。当时的胡耀邦总书记亲为“华罗庚金杯”题字。参赛学生是小学高年级和初一学生，每两年举办一届。自2003年第9届起，改为每年一届。

自1990年开始，“双法”学会数学教育委员会举办“希望杯”全国数学邀请赛。对象是初一、初二、高一、高二共四个年级。前中国数学奥委会主席王寿仁教授说：全国初中、高中数学联赛和全国希望杯数学邀请赛，好比我的左右手，缺一个都不好，我都支持。从2002年又有了小学希望杯数学邀请赛，也很受学生欢迎。

从1985年派观察员和两名学生参加IMO以来，我国参加IMO的准备工作由中国数学会的中国数学奥林匹克委员会领导。先由各省市的全国高中数学联赛优胜者参加全国数学冬令营（也叫《中国数学奥林匹克》），从中选出20余名学生进国家集训队，集训队由高校教师进行培训，经过三个月后，通过考试评估由教练组投票表决选出参加IMO的6名选手，再经过一个月的培训，于每年7月出国参加IMO比赛。从1988年至2003年的17次IMO，我国取得10次团体总分第一名，共获金牌71枚，占我国参赛选手的69.6%，我国的选手在IMO比赛中的优异成绩标志着我国数学教育的优异水平。

如今，奥林匹克数学教育的作用已被多数国民所公认。激发青少年学习数学的兴趣，有助于早期智力开发，有助于发现和培养人才。数学竞赛推动了数学知识的普及，促进数学教师知识水平的提高，是数学改革的试验田。因此奥林匹克数学教育是较高层次的基础教育，开发智力的素质教育，生动活泼的课外教育，现代数学的普及教育。理应大家更好地培育它、研究它和发展它！

随着人类进入21世纪,我国的数学奥林匹克又有新的发展。2001年在古城西安举办了首届中国西部数学奥林匹克;此外,2002年在珠海举办了首届中国女子数学奥林匹克(CGMO),我国的数学竞赛活动正在21世纪的改革浪潮中与时俱进地向前发展!

数学是一门基础课。义务教育新课标的推行为数学爱好者提供了时间与空间,可以充分地发展自己的数学爱好,更好地提高数学能力。为此,初中阶段必须较系统地打好数学的基础。不但要学好代数,还要学好平面几何与数论初步,领悟数学的思想方法。本套丛书就是为此目的做的一种尝试,分为《初中数学竞赛中的代数问题》、《初中数学竞赛中的平面几何》、《初中数学竞赛中的数论初步》、《初中数学竞赛中的思维方法》四册。希望与广大初中生能在学习实践中切磋学好数学的体验,共同探索一条能使多数人具备较高的数学素养的学习途径。

首都师范大学数学系　周春荔

目　　录

第 1 章　代数式基础

在初中代数中指出：用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫代数式．

单独的一个数或一个字母，像-1，0，a，x也是代数式．

上述定义中的"数"，是我们学过的数或指定的数．其中的"字母"，必须是用来"表示数的字母"．一般英语书上的字母不是代数式，因为在使用的场合没约定它代表数．

"用运算符号连结"，一般指加、减、乘、除、乘方、开方等运算．当然也可以是按一定意义下规定的运算．

用代数式总能表达一个意思．因此，代数式是数学语言中的词汇或短句．

要想掌握数学这个工具，就要学会认读代数式，会翻译其含义，并且会由代数式展开推理．这是学好代数，以至于学好数学的基本功．

§1.1　认读代数式

例 1. 若 n 为整数，试说明下列代数式的意义：

(1)$2n$；(2)$2n+1$；(3)$3n+2$；(4)$4n+1$；(5)n^2；(6)n^{1995}．

答：(1)$2n$——2 的倍数，偶数．

(2)$2n+1$ —被 2 除余 1 的数，奇数．

(3)$3n+2$ —被 3 除余 2 的数．

(4)$4n+1$ —被 4 除余 1 的数．

(5)n^2——整数的平方．

(6)n^{1995}——整数 n 的 1995 次幂．

例 2. a、b、c 都是阿拉伯数码，且 $c\neq0$，代数式 $c\times10^2+b\times10+a$的意义是什么？

答:$c\times10^2+b\times10+a$ 代表一个三位自然数．读作"c 百 b 拾 a 个".

一般地，若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$均为阿拉伯数码，且 $a_n\neq0$，则 $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$表示一个 $n+1$ 位的自然数，则

$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$.

这是 $n+1$ 位自然数的代数式表示．

例 3. 请用代数式表示"四个连续整数的乘积与 1 之和".

答:设 n 是整数，则四个连续整数之积与 1 之和表示为 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.

例 4. M 表示 a 与 b 的和的平方，N 表示 a 与 b 的平方的和，则当 $a=7$，$b=-5$ 时，$M-N$ 的值是(　)

(A)-28.　(B)70.　(C)42.　(D)0.

答:M 表示 a 与 b 的和的平方，记 $M=(a+b)^2$，N 表示 a 与 b 的平方的和，即 $N=a+b^2$.

$M-N=(a+b)^2-(a+b^2)$

$$\therefore\quad M-N\Big|_{\substack{a=7\\b=-5}}=(7+(-5))^2-(7+(-5)^2)$$

$$=(2)^2-7-25=-28.$$

选(A)

例 5. a、b、c 都是有理数，试说出下列式子的意义：

(1)$a+b=0$，(2)$ab>0$，(3)$ab\neq0$，

(4)$ab=0$，(5)$ab=1$，

(6)$ab=-1$，(7)$a^2+b^2=0$，

(8)$(a-b)(b-c)(c-a)=0$

(9)$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$

(10)$abc=0$.

答:(1)$a+b=0$——a、b 互为相反数；

(2)$ab>0$——a、b 为同号二数；

(3)$ab\neq 0$——a、b 均不为 0；

(4)$ab=0$——a、b 中至少有一个为 0；

(5)$ab=1$——a、b 互为倒数；

(6)$ab=-1$——a、b 互为负倒数；

(7)$a^2+b^2=0$—a、b 均等于 0；

(8)$(a-b)(b-c)(c-a)=0$—a、b、c 中至少有两个相等；

(9)$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$—$a$、$b$、$c$ 不全相等；

(10)$abc=0$——a、b、c 中至少有一个为 0.

例 6. 语句："将一个三位数的个位数字放在左边第一位的前面，形成一个新的三位数. 新三位数是原来三位数的 3 倍减 8"这个内容用代数语言应如何表示？

答：设原三位数是$\overline{abc}=a\times 10^2+b\times 10+c$，则依题意，新三位数是

$\overline{cab}=c\times 10^2+a\times 10+b$.

已知语句表示为代数语言是

$\overline{cab}=3\ \overline{abc}-8$.

即　$c\times 10^2+a\times 10+b=3\times(a\times 10^2+b\times 10+c)-8$.

例 7. 海边有一堆红果，第一个猴子拿走$\frac{1}{5}$，扔掉一个；第二个猴子又拿走剩下的$\frac{1}{5}$，扔掉一个；第三个猴子又拿走剩下的$\frac{1}{5}$，再扔掉一个. 试用代数式表示所说的意思及剩下的红果数.

解：设红果数为 x.

第一个猴子：拿走$\frac{x}{5}$，剩下$\frac{4x}{5}-1$.

第二个猴子：拿走$\frac{1}{5}(\frac{4x}{5}-1)$，剩下$\frac{4}{5}(\frac{4x}{5}-1)-1$.

第三个猴子：拿走$\frac{1}{5}[\frac{4}{5}(\frac{4x}{5}-1)-1]$

最后剩下$\frac{4}{5}[\frac{4}{5}(\frac{4x}{5}-1)-1]-1$.

例 8. 甲杯中盛有 m 毫升红墨水，乙杯中盛有 m 毫升蓝墨水，从甲杯倒出 a 毫升到乙杯里($0<a<m$). 搅匀后，又从乙杯倒出 a 毫升到甲杯里，则这时(　)

(A)甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水少.

(B)甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水多.

(C)甲杯中混入的蓝墨水和乙杯中混入的红墨水相同.

(D)甲杯中混入的蓝墨水与乙杯中混入的红墨水多少关系不定.

解:从甲杯倒出 a 毫升红墨水到乙杯中以后，

乙杯中含红墨水的比例是$\frac{a}{m+a}$,

乙杯中含蓝墨水的比例是$\frac{m}{m+a}$,

再从乙杯倒出 a 毫升混合墨水到甲杯中以后，

乙杯中含有的红墨水的数量是

$$a-a\cdot\frac{a}{m+a}=\frac{ma}{m+a}\text{毫升} \qquad ①$$

乙杯中减少的蓝墨水的数量是

$$a\cdot\frac{m}{m+a}=\frac{ma}{m+a}\text{毫升} \qquad ②$$

$\because$ ①=②

$\therefore$ 选(C).

例 9. 六个单项式：$15a^2, xy, \frac{2}{3}a^2b^2, 0.11m^3, -abc, -\frac{3a^2b}{4}$ 的系数之和等于多少?

解:先写出各单项式的系数，然后再相加求和，这实际上是将语言和指令结合起来形成一个操作过程.

单项式：$15a^2, xy, \frac{2}{3}a^2b^2, 0.11m^3, -abc, -\frac{3}{4}a^2b$ 的系数依次是：

$15, 1, \frac{2}{3}, 0.11, -1, -\frac{3}{4}$.

作加法求和

$$15+1+\frac{2}{3}+0.11+(-1)+(-\frac{3}{4})$$
$$=15+\frac{2}{3}+\frac{11}{100}-\frac{3}{4}$$
$$=15+\frac{200+33-225}{300}$$
$$=15\frac{8}{300}=15\frac{2}{75}.$$

例 10. 一个人上山和下山的路程都是 S，上山的速度为 V_1，下山的速度为 V_2，问这个人上山和下山的平均速度是多少？

解：上山时间为 $\frac{S}{V_1}$，下山时间为 $\frac{S}{V_2}$，上山、下山共走路程 $2S$，共用时间为 $\frac{S}{V_1}+\frac{S}{V_2}$.

所以平均速度为 $\dfrac{2S}{\frac{S}{V_1}+\frac{S}{V_2}}=\dfrac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$

答：这个人上山下山的平均速度是 $\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$.

应该注意的是，有些数学语言是规定了特定符号来表示的. 如两个自然数 a、b 的最大公约数记为 $(a、b)$，最小公倍数记为 $[a、b]$，不超过 x 的最大整数记为 $[x]$，x 的绝对值记为 $|x|$ 等等. 这些大都是一些“操作指令”，要作为数学语言的常用词汇记住并掌握.

习题 1.1

1. $(a+b)^2$ 读作（　）