东北师范大学数学函授專修班参考資料

初等几何学

（平　面）

习题解答

下　册

吉林人民出版社

东北师范大学函授專修班参考資料

初等几何学

（平　面）

习题解答

下　册

武云翔 譯　孙福元 校

吉林人民出版社

1957・長春

初等几何学（平面）习题解答　下册

吉林人民出版社出版　（長春市斯大林大街）吉林省书刊出版业营业許可證出字第1号

吉林省長春新生企业公司印刷　新华書店吉林省分店发行

开本：787×1092 1/16 字数：150,000 印張：6 3/4 印数：34,000 册

1957年3月第1版　1957年3月第1版第1次印刷

統一書号：13091·8　定价（8）0.68元

这本“初等几何学（平面）习题解答（下册）”是根据苏联别里标尔金(Д·Перепёлкин)教授为法国数学家哈达瑪（J·Hadamard）著的“初等几何学(平面)”一書，所編輯的习題解答譯出的。

原書“初等几何学（平面）”在苏联被批准为高等师范数理系学生和中等数学教师的主要参考書。在我国也列到师范学院(專科)数学系（科）初等数学“平面几何复习及研究”課的参考書。

雜題和競賽測驗題①

343. 設 A, B, C, D 是在同一圓上的四个点（它們的次序象所寫的那样）；取弧 AB, BC, CD, DA 的中点 a, b, c, d. 試証直綫 ac 和 bd 互相垂直。

〔解答〕 根据假設，弧 aB 等于弧 AB 的一半，也就是$\overset{\frown}{aB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$；同样，$\overset{\frown}{Bb}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$；$\overset{\frown}{cD}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$；$\overset{\frown}{Dd}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DA}$. 由此，$\overset{\frown}{ab}+\overset{\frown}{cd}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA})=180°$. 直綫 ac 和 bd 間的角可以弧 ab 与 cd 的和的一半度量，因而它是直角。

344. 在一个三角形的边 BC, CA, AB 上，分别取任意点 D, E, F, 并且作圓 AEF, BFD, CDE. 試証：

1）这三个圓通过同一点 O;

2）如果在三角形所在平面上取任意一点 P, 連結 P 和三角形頂点 A, B, C 的三条直綫 PA, PB, PC, 則这三条直綫与对应圓的第二交点 a, b, c 在过点 O 和 P 的一个圓上。

〔解答〕 解这个問題和以后的某些問題时，我們將考虑角的方向，这是为了对于图形元素的任何位置都适合求得的証明（参考习題346本文上的附註）.

將半直綫OA和OB間不超过二直角的那个角的絕对值，按旋轉半直綫 OA 到 OB 画出这个角的方向是正或負，冠以符号＋或－，所得的值叫做角 AOB 的代数值。角 AOB 的代数值用 $\measuredangle AOB$ 表示。角的代数值与边的順序有关：$\measuredangle AOB=-\measuredangle BOA$（參考§185）.

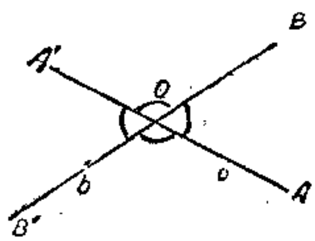

图 559

在考虑有向角时，將代数值相等或者相差二直角整数倍的角看作相等是合适的。在这种条件下，便可以說，兩条直綫夾角的代数值；这个角与所給二直綫的次序有关，但与这些直綫的方向取法無关。总之，如果直綫 a（或 AA'）和 b（BB'）交在点 O（图.559），則；

$$\measuredangle(a,\ b)=\measuredangle AOB=\measuredangle A'OB=\measuredangle AOB'=\measuredangle A'OB'=-\measuredangle(b,\ a). \qquad (\mathrm{I})$$

如果使用有向角，則下面的命題成立，并且以后常要引用它。

A) 对于从点O引出的任意三条射綫OA, OB和OC, 常有：

$$\measuredangle AOB+\measuredangle BOC+\measuredangle COA=0. \qquad (\mathrm{II})$$

事实上，如果射綫OB在OA和OC夾角（不超过二直角）的內部，則角AOB, BOC和 AOC 的符号相同，并且它們的絕对值滿足条件 $\angle AOB+\angle BOC=\angle AOC$, 由此得出（II）. 同样的推理也可应用在当射綫 OA 在角 BOC 內部或射綫 OC 在角 AOB 內部的情形。

如果三条射綫中的任何一条都不在另兩条射綫所構成角的內部，則三个角 AOB，BOC和COA的符号相同，并且它們絕对值的和等于四直角，由此也得到（Ⅱ）。

B）对于平面上任意的三点A，B，C，常有：

$$\measuredangle BAC+\measuredangle CBA+\measuredangle ACB=0. \qquad (\text{Ⅲ})$$

事实上，如果頂点 A，B，C的順序与三角形 ABC 的正（負）向一致，則三个角 BAC，CBA，ACB 都是正的（負的），并且它們絕对值的和等于二直角，由此，根据上边的条件得出（Ⅲ）。如果点 A，B 和 C 在同一直綫上，則等式（Ⅲ）左边的每一項都等于零。

C）如果点A，B，C和D在同一圓上（或在同一直綫上），則有（参考§82a）：

$$\measuredangle ACB=\measuredangle ADB, \qquad (\text{Ⅳ})$$

反之，由关系式（Ⅳ）可以得到：点A，B，C和D在同一圓上（或在同一直綫上）。

事实上，如果点 A，B，C 和 D 在同一圓上，且点 C 和 D 在 AB 的同一側，則角 ACB 和 ADB 的符号相同，并且絕对值也相同；如果点 A，B，C 和 D 在同一圓上，且点 C 和 D 在 AB 的不同兩側，則角 ACB 和ADB 的符号不同，而它們絕对值的和等于二直角，由此也得出关系式（Ⅳ）。

如果点 A，B，和 C 在同一圓上，而点T在点 B 的切綫上，則等式（Ⅳ）变为下式：

$$\measuredangle ACB=\measuredangle ABT. \qquad (\text{Ⅳ}')$$

事实上，第一个角是弧 AB上的圓周角，第二角是弦AB和在它端点B的切綫的夾角。如果点 C 和 T 在 AB 的不同兩側，則角 ACB 和 ABT 的符号相同，并且絕对值也相同；如果C和T在AB同一側，則角 ACB 和 ABT 的符号不同，并且它們絕对值的和等于二直角。在兩种情形下，我們都有关系式（Ⅳ′）。

現在我們回来解习題 344。

1°．用 O 表示圓 AEF 和 BFD 的交点（图.560）。因为点 D和点 B，C在同一直綫上，所以，根据（Ⅰ），$\measuredangle BDO=\measuredangle CDO$，同理$\measuredangle CEO=\measuredangle AEO$；$\measuredangle AFO=\measuredangle BFO$。其次，点 A，O，E 和 F（点 B，O，F 和 D 也同样）在同一圓上，由此根据（Ⅳ），$\measuredangle AEO=\measuredangle AFO$；$\measuredangle BDO=\measuredangle BFO$。从所写的等式得到：

$$\measuredangle CDO=\measuredangle BDO=\measuredangle BFO=\measuredangle AFO=\measuredangle AEO=\measuredangle CEO. \qquad (1)$$

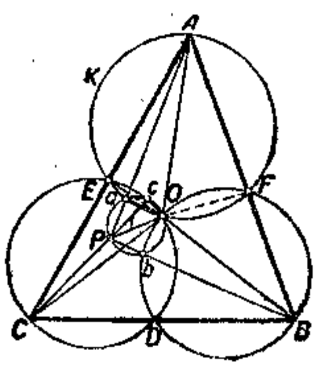

图 560

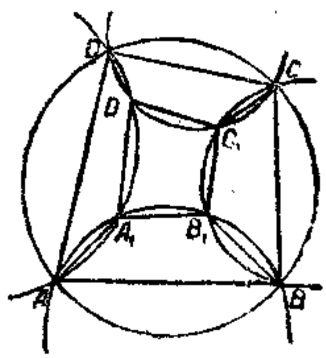

图 561

因为点 C，D 和 E 不在同一直綫上，且 $\measuredangle CDO=\measuredangle CEO$，所以点 O 在圓 CDE 上。由于这个推理的普遍性，所以它对于所有的或部分的点 D，E 和 F 不在三角形边上，而在它們的延長綫上的情形也保持有效。（不利用有向角，單独地研究几个特殊情形。）

$2°$. 因为点 P，a 和 A 在同一直綫上，则 $\measuredangle PaO=\measuredangle AaO$。由等式（Ⅲ）得到：$\measuredangle AaO=\measuredangle AOa+\measuredangle aAO$。因此 $\measuredangle PaO=\measuredangle AOa+\measuredangle aAO$。因为点 A，a，O 和 F 在同一圓上，则 $\measuredangle AOa=\measuredangle AFa$；$\measuredangle aAO=\measuredangle aFO$，因而，$\measuredangle PaO=\measuredangle AFa+\measuredangle aFO=\measuredangle AFO$。于是，$\measuredangle PaO$ 与角（1）中的每一个的代数值都相同。对于角 PbO 和 PcO 可进行同样的推理。总之，$\measuredangle PaO=\measuredangle PbO=\measuredangle PcO$，并且点 P，O，a，b 和 c 在同一圓上。

345. 以圓的內接四边形每一边为弦，作圓，試証在所作的四个圓中，每一个和其后的一个相交的四个交点也是某个圓的內接四边形頂点。

〔**解答**〕 为使解答具有一般性，我們要利用习題334解答中所說的有向角，特别是要用到关系式（Ⅰ）——（Ⅳ）。

設 $ABCD$ 是圓內接四边形（图.561），$A_1B_1C_1D_1$ 是所作四个圓的第二交点構成的四边形。根据（Ⅱ）我們有 $\measuredangle D_1A_1B_1=\measuredangle D_1A_1A+\measuredangle AA_1B_1$。其次，根据（Ⅳ），我們有 $\measuredangle D_1A_1A=\measuredangle D_1DA$；$\measuredangle AA_1B_1=\measuredangle ABB_1$，因而，$\measuredangle D_1A_1B_1=\measuredangle ABB_1+\measuredangle D_1DA$。用点 C 和 C_1 代替这里的点 A 和 A_1，得到：$\measuredangle D_1C_1B_1=\measuredangle CBB_1+\measuredangle D_1DC$。由后兩个等式，根据（Ⅱ），则：$\measuredangle D_1A_1B_1-\measuredangle D_1C_1B_1=\measuredangle ABB_1+\measuredangle B_1BC+\measuredangle CDD_1+\measuredangle D_1DA=\measuredangle ABC+\measuredangle CDA$。但根据（Ⅳ），$\measuredangle ABC+\measuredangle CDA=\measuredangle ABC-\measuredangle ADC=0$，所以 $\measuredangle D_1A_1B_1=\measuredangle D_1C_1B_1$。因而，点 A_1，B_1，C_1 和 D_1 在同一圓上。

附註．当用三角形 ABC 代替四边形 $ABCD$（图．562），用在点 C 切于三角形 ABC 外接圓的任一圓來代替通过点 C 和 D 的任一圓时，所導出的定理仍成立。

这时上面所給的証明，需要稍作变动：角 D_1DA，D_1DC 和 CDA 分别用 D_1CA，D_1CT 和 TCA 來代替，这里 T 是过点 C 的切綫上的任一点．这时除用等式（Ⅳ）之外，还要利用習題344解答中的等式（Ⅳ′）．

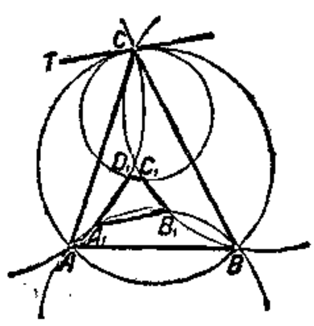

图 562

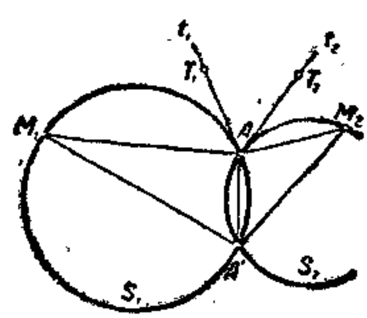

图 563

346. 設 A 和 A' 是圓 S_1 与 S_2 的交点；B 和 B' 是圓 S_2 与 S_3 的交点；C 和 C'

是圆S_3与S_4的交点；D和D'是圆S_4与 S_1的交点；如果S_1与S_2，S_3与S_4的兩个交角和等于S_2与S_3，S_4与S_1的兩个交角和〔这些角取适当的方向[1]〕，則四边形$ABCD$內接于圓（因而，四边形$A'B'C'D'$也內接于圓），試証之。

〔**解答**〕 为使解答具有一般性，我們要利用习題344解答中所說的有向角，特別是要利用到关系式（Ⅰ）——（Ⅳ）。

兩个圓S_1和S_2在点A交角的代数值，是在它們交点A的兩条切綫夾角的代数值.这时，兩个圓的交角与这兩个圓的次序有关，也与它們交点A或A'的取法（图.563）有关，但是，在解习題 344 开始所作的条件下，根据（Ⅰ），兩圓的交角与切綫方向的取法無关。如果用t_1和t_2表示兩个圓在点A的切綫，并用$\measuredangle S_1AS_2$表示兩个圓在点A交角的代数值，則$\measuredangle(t_1,\ t_2)=\measuredangle S_1AS_2=-\measuredangle S_2AS_1=-\measuredangle S_1A'S_2=+\measuredangle S_2A'S_1$。如果$M_1$和$M_2$分別是圓$S_1$和$S_2$上的任意点，則：

$$\angle S_1AS_2=\angle AM_1A'+\angle A'M_2A; \qquad (1)$$

事实上，用T_1和T_2分別表示切綫t_1和t_2上的任意点，根据（Ⅱ）和（Ⅳ'）：$\measuredangle S_1AS_2=\measuredangle T_1AA'+\measuredangle A'AT_2=\measuredangle AM_1A'+\measuredangle A'M_2A$。

現在回来解答所提出的問題，我們有（图.564）$\measuredangle DAB=\measuredangle DAD'+\measuredangle D'AA'+\measuredangle A'AB'+\measuredangle B'AB$；$\measuredangle ABC=\measuredangle ABA'+\measuredangle A'BB'+\measuredangle B'BC'+\measuredangle C'BC$；$\measuredangle BCD=\measuredangle BCB'+\measuredangle B'CC'+\measuredangle C'CD'+\measuredangle D'CD$；$\measuredangle CDA=\measuredangle CDC'+\measuredangle C'DD'+\measuredangle D'DA'+\measuredangle A'DA$。在点$A,B,C$和$D$同在一个圓上的条件下，根据（Ⅳ），可以写为$\measuredangle DAB+\measuredangle BCD=\measuredangle ABC+\measuredangle CDA$，或者，根据前边的等式，写为$\measuredangle DAD'+\measuredangle D'AA'+\measuredangle A'AB'+\measuredangle B'AB+\measuredangle BCB'+\measuredangle B'CC'+\measuredangle C'CD'+\measuredangle D'CD=\measuredangle ABA'+\measuredangle A'BB'+\measuredangle B'BC'+\measuredangle C'BC+\measuredangle CDC'+\measuredangle C'DD'+\measuredangle D'DA'+\measuredangle D'DA$，但根据等式(Ⅳ)我們有：$\measuredangle A'AB'=\measuredangle A'BB'$；$\measuredangle B'BC'=\measuredangle B'CC'$；$\measuredangle C'CD'=\measuredangle C'DD'$；$\measuredangle D'DA'=\measuredangle D'AA'$，于是前边的关系式变为：$\measuredangle DAD'+\measuredangle B'AB+\measuredangle BCB'+\measuredangle D'CD=\measuredangle ABA'+\measuredangle C'BC+\measuredangle CDC'+\measuredangle A'DA$。根据公式(Ⅰ)，我們有$\measuredangle S_1AS_2=\measuredangle ADA'+\measuredangle A'BA$；$\measuredangle S_2BS_3=\measuredangle BAB'+\measuredangle B'CB$；$\measuredangle S_3CS_4=\measuredangle CBC'+\measuredangle C'DC$；$\measuredangle S_4DS_1=\measuredangle DCD'+\measuredangle D'AD$，故$\measuredangle S_2BS_3+\measuredangle S_4DS_1=\measuredangle S_1AS_2+S_3CS_4$。

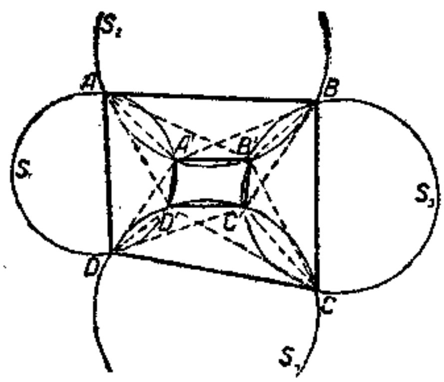

图 564

347. 对四个圓S_1、S_2、S_3、S_4作圓S_1和S_2的“一对”公切綫α和α'（也就是兩个內公切綫或兩个外公切綫），圓S_2和S_3的一对公切綫β和β'，圓S_3和S_4的一对公切綫γ和γ'以及圓S_4和S_1的一对公切綫δ和δ'，再用“适当方法”从每对公切

1）看做有向角，并且必要时可利用三角法中的規定，力求所得到的証明对于图形元素的任何位置都适合。

綫中选出一条，如果我們能得到切于同一圓的四条直綫 α、β、γ 和δ，则四条直綫 α′、β′、γ′和δ′也切于同一圓。

在四个圓上分别取确定的方向，再看作公切綫綫段是有符号的，試說明，应当怎样选取四条切綫α，β，γ和δ，才能使这个命題成立。

当公切綫中有兩条的長度（是从一个切点到另一个切点的切綫段長度）和等于另外兩条的長度和的条件下，这个命題才成立。

〔解答〕 为所求的解法适合这里可能产生的各种特殊情形，以及指出用怎样方法选取切綫 α，β，γ 和 δ，我們在每个已知圓上給以确定的迴轉方向。

如果在某一个圓上取定确定的迴轉方向，则圓 S 每条切綫的正向也随之确定；这个方向使用切綫在切点近傍与圓的方向一致方向（图.565）。通常，我們把在切綫上所截取的綫段看作帶有符号（+或−）的。

以后，我們只把在切点近傍与圓的方向一致的有向直綫看作是这个有向圓的切綫。

如果自点 P 向有向圓引兩条切綫，用 A 和 B 表示它們的切点，按絕对值和符号便有（图.565）：

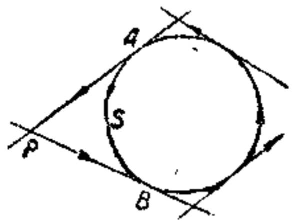

图 565

$$AP=PB \qquad (1)$$

如果四边形 $PQRS$ 的边切于某一有向圓，用A，B，C 和D表示直綫SP，PQ，QR 和RS的切点，这时根据（1），按絕对值和符号我們便得到：

$$PQ+RS=(PB+BQ)+(RD+DS)=AP+QC+CR+SA=QR+SP. \quad (2)$$

無論已知外切四边形屬于习題 87 解法中所研究五种类型的那一种（图.332——336），等式（2）都成立。

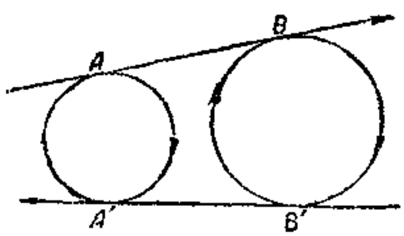

图 566

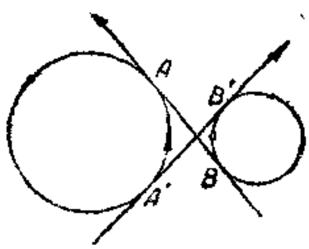

图 567

如果已知兩个有向圓 S_1 和 S_2，則这兩个圓至多有兩条有向公切綫：这兩条公切綫是外公切綫或是內公切綫，这要看兩个已知圓的方向是相同（都是順时針或都是逆时針）或是相反（一个是順时針，另一个是逆时針）来取决的（图 566 和 567）。

如果兩条公切綫中的一条与第一个圓切于点 A，与第二个圓切于点 B；另一条公切綫与兩个圓分别切于点 A' 和 B'，按絕对值和符号則有：

$$AB = B'A' \tag{3}$$

現在回来解所提出的問題，我們預先在四个已知圓上都取确定的方向，并且把 α，α'…也看作是有向公切綫。由此容易导出，在四对公切綫 α、α'，β、β'，γ、γ'，δ、δ' 中有偶数对内公切綫，因而，也有偶数对外公切綫。事实上，按次序画出有向圓 S_1、S_2、S_3、S_4、S_1 我們可看出，方向相反的兩个相鄰的圓有一对內公切綫。因为 S_1 既是第一个圓，也是最后一个圓，所以，当从第一个圓轉到最后一个圓时，方向有偶数次变成相反，因此，內公切綫也出現偶数次。

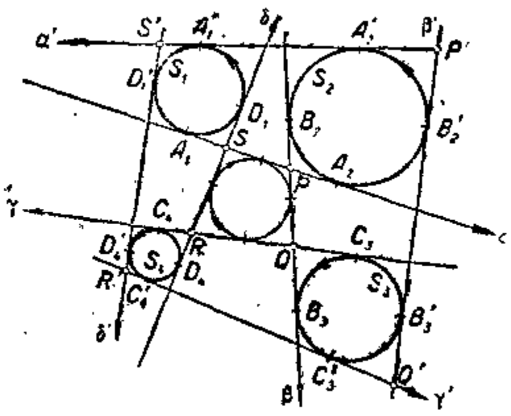

图 568

其次，我們取切綫 α、β、γ 和 δ，并把它們看作是各已知圓的有向公切綫，而且使它們同切于一个有向圓上(图.568)。

用 P、Q、R、S 分别表示所取公切綫 α 和 β，β 和 γ，γ 和 δ，δ 和 α 的交点；同样，用 P'、Q'、R'、S' 表示 α' 和 β'，β' 和 γ'，γ' 和 δ'，δ' 和 α' 的交点。其次，用 A_1 和 A_1' 表示切綫 α 和 α' 与圓 S_1 的切点，用 A_2 和 A_2' 表示切綫 α 和 α' 与圓 S_2 的切点，等等。在这些条件下，根据（2）和（1），則：$PQ+RS=QR+SP$；$A_1S=SD_1$；$PA_2=B_2P$；$C_3Q=QB_3$；$RC_4=D_4R$，由此 $(A_1S+SP+PA_2)+(C_3Q+QR+RC_4)=(B_2P+PQ+QB_3)+(D_4R+RS+SD_1)$ 或者 $A_1A_2+C_3C_4=B_2B_3+D_4D_1$，因此，公切綫中有兩条的長度之和等于另外兩条長度之和。

应用（3），由最后的等式得到：$A_1'A_2'+C_3'C_4'=B_2'B_3'+D_4'D_1'$。再应用关系式 $S'A_1'=D_1'S'$，等等，便求得：$P'Q'+R'S'=Q'R'+S'P'$，因此，四边形 $P'Q'R'S'$ 各边切于同一个圓（根据习题 87 的逆定理）。

总之，选取公切綫 α，β，γ 和 δ 时，要遵守下面的兩个条件：

a） 在四个公切綫中有偶数个（0，1或4）外公切綫。

b） 看作有向圓 S_1，S_2，S_3 和 S_4 的有向公切綫 α，β，γ 和 δ 切于同一个有向圓。

附註．現在說明，下面兩个命題存在．

a） 設在四对公切綫中有奇数对，例如三对，外公切綫（图.569）．在这种情形下，按絕对值（这里选取方向和引入符号是不可能的）我們有：$PQ+RS=QR+SP$；$(B_2P+PQ+QB_3)+(D_4R+RS-SD_1)=(C_3Q+QR+RC_4)+(A_1S+SP+PA_2)-2A_1S$；$B_2B_3+D_4D_1=C_3C_4+A_1A_2-2SA_1$．对于四边形 $P'Q'R'S'$，如果也有一个内切圓，我們同样可求得：$B_2'B_3'+D_4'D_1'=C_3'C_4'+A_1'A_2'-2S'A_1'$，并且我們还得有补充条件 $SA_1=S'A_1'$．

b） 現在設所有四对切綫都是外切的，但切綫 α，β，γ 和 δ 的选法，譬如，象图 570里所画那样．这时，切綫 α，β，γ 和 δ 切于同一个圓，而切綫 α'、β'、γ' 和 δ' 沒有这种性質．这种情形的產生是由于，在已知情形下不論怎样选取方向，也不可能保有条件b）．

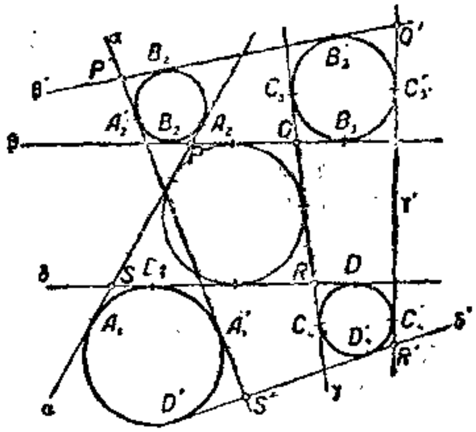

图 569

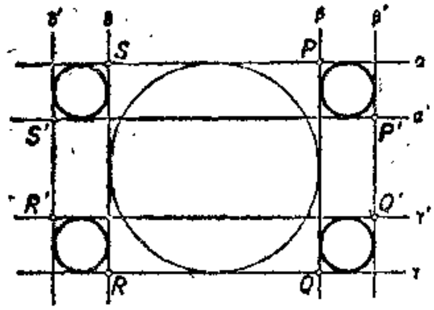

图 570

348. 对于任意一个五边形，每次取接連的三个边（或它的延長綫）作成一个三角形，并作每个三角形的外接圓。試証，这五个圓中的每一个与后一个相交的五个交点（不是五边形的頂点）在同一圓上（习题106）。

〔**解答**〕 用 A，B，C，D 和 E 表示已知五边形的頂点（图.571）；用K，L，M，N，P 分别表示直綫 EA 和 BC，AB 和 CD，BC 和 DE，CD 和 EA，AB 和 ED 的交点；用 A'，B'，C'，D'，E' 分别表示圓 EAP 和 ABK，ABK和BCL，BCL 和 CDM，CDM 和 DEN，DEN 和 EAP 的交点。要証明五个点 A'，B'，C'，D' 和 E' 在同一圓上，只要对于四个点，譬如 B'，C'，D' 和 E'証明就够了。因为同样的推理也可应用于四个点 A'，B'，C'和D'，由此將得到，所有五个点在同一圓上。

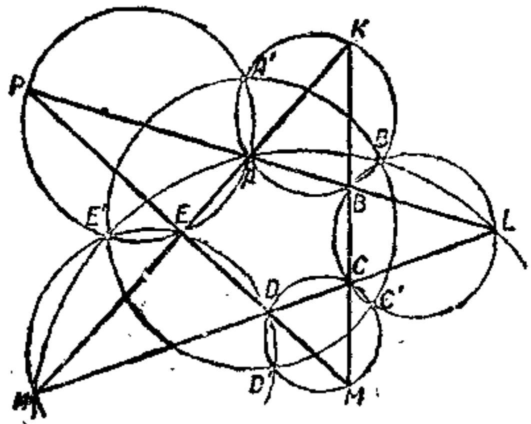

图 571

为使証明有普遍性，我們仍利用有向角和关系式（Ⅰ）——（Ⅳ）（习题344解答）。

我們考虑去掉五条已知直綫之一，就是直綫 DE，再把习题106用于剩下的四条直綫上。四个圓ABK，BCL，LNA 和 KCN 通过同一点，由此特别是可以得到，四个点 L，N，A 和 B'在同一圓上。同样（去掉直綫 BC）可以証明，点 L，N，A 和 E' 在同一圓上。总之，所有五个点 L，N，A，B'，E'在同一圓上。

根据（Ⅳ）和（Ⅰ），我們有 $\measuredangle C'D'D=\measuredangle C'CD$ 和 $\measuredangle C'CD=\measuredangle C'CL=\measuredangle C'B'L$，由此 $\measuredangle C'D'D=\measuredangle C'B'L$。（1）

其次，再根据（Ⅳ）和（Ⅰ），$\measuredangle DD'E'=\measuredangle DNE'$ 和 $\measuredangle DNE'=\measuredangle LNE'=\measuredangle LB'E'$，由此 $\measuredangle DD'E=\measuredangle LB'E'$。（2）

把等式（1）和（2）逐项相加，根据（Ⅱ），$\measuredangle C'D'E'=\measuredangle C'B'E'$，由此可知，点 B'，C'，D' 和 E' 在同一圓上。

349. 已知兩个相等三角形 ABC 和 abc。如果繞某一点O旋轉三角形 ABC，使它的边 AB 到平行于 ac 的位置 $a'b'$，則頂点 B 的新位置 b' 在直綫OC上，試求点O的軌跡。在这些条件下，再求点 a'，b'，c' 的軌跡。

〔**解答**〕 如果旋轉三角形 ABC，使它的边 AB 到新位置 $a'b'$ 上便平行于 ac，則旋轉角等于 $\measuredangle(AB,\ a'b')=\measuredangle BOb'$；因为，根据問題假設，直綫$Ob'$通过点$C$，所以我們有$\measuredangle BOb'=\measuredangle BOC$。由此可知，$\measuredangle BOC=\measuredangle\ (AB,\ a'b')=\measuredangle(AB,\ ac)=$常数，因而，点 O 在通过点 B 和 C 的圓上（比較习題344解答，命題C）。

当点 O 沿这个圓移动时，由于角 $\measuredangle AOa'=\measuredangle BOC$ 大小不变，等腰三角形 AOa' 的頂角 A 的大小不变，因而，比 $AO:Aa'$ 的值也不变。所以，点 a'的軌跡，可由点O的軌跡，作以点 A 为中心的一个位似，再旋轉一个角 OAa' 的方法得到，因此它的軌跡是一圓。对于点 b' 和 c' 同样成立。

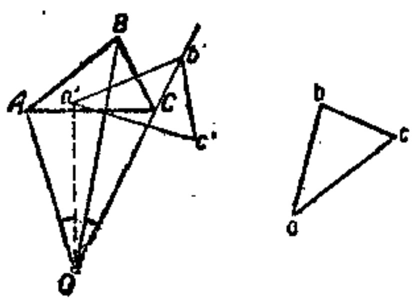

图 572

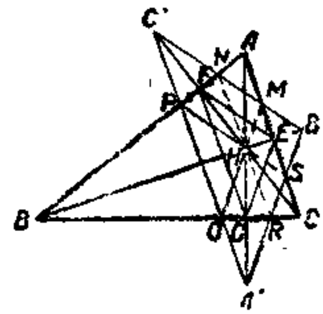

图 573

350， 設 A',B',C' 是三角形 ABC 的垂心关于三边 BC，CA，AB的对称点。并且M和 N 分别表示直綫 $B'C'$ 与边 AC，AB 的交点；P 和 Q 表示直綫 $C'A'$ 与 BA，BC 的交点；R 和 S 表示直綫 $A'B'$ 与 CB，CA 的交点。試証直綫 MQ，NR，PS 交于同一点（这个点是三角形 ABC 的垂心）。

〔**解答**〕 用 D，E 和 F 表示三角形 ABC 三个高的垂足（图. 573），用 H 表示高的交点。因为，按問題假設 $HD=DA'$，$HE=EB'$和$HF=FC'$，則直綫$B'C'$，$C'A'$和 $A'B'$ 分别平行于 EF，FD 和 DE。根据习題 71，直綫 DH，EH 和 FH是三角形 DEF 各角的平分綫；因而，这些直綫也是三角形 $A'B'C'$ 各角的平分綫。三角形 $A'QR$，$B'SM$ 和 $C'NP$ 是等腰三角形（其中每一个都有一个高与平分綫重合），因此$QD=DR$；$SE=EM$；$NF=FP$。四边形 $A'QHR$，$B'SHM$ 和 $C'NHP$ 都是菱形，因为其中每一个的对角綫都互相垂直且平分。由此可知，直綫 QH 和 MH 平行于 $A'B'$，所以点 M，H 和 Q 在同一直綫上。同样可以証明，点 N，H 和 R，点 P，H 和 S 都分别在一直綫上。

351. 已知一个梯形的高和它的兩底之和或差，試在一已知圓內作出有此条件的

內接梯形。

〔解答〕 假定 $ABDC$ 是所求的梯形（图.574）。作高 AH。因为梯形是等腰的，所以綫段 HD 是兩底和的一半（綫段 HC 是兩底差的一半）。

为了作所求的梯形，如果已知二个底之和（差），我們按兩个垂边作直角三角形 AHD（或 AHC），斜边在中点 M（或对于点 N）的垂綫，并以点 A 为中心，已知圓的半徑为半徑画圓，它与垂綫的交点便确定点 O 的位置和梯形的对称軸。

为了問題可能，是已知兩底的和（或差）时，必須且只須使圓的半徑大于 AM 和小于 AQ，这里 Q 是垂綫 MO 和直綫 AH 的交点（或对应大于 AP，这里 P 是垂綫 NO 和 AH 的交点）。綫段 AM，AQ 和 AP 容易用已知綫段表示。

352. 設 AB 是某个圓的直徑，CMD 是具有中心 A 的，且与第一个圓交于点 C 和 D 的另一个圓；M 是第二个圓的任意点：N、P、Q 分别是直綫 BM、CM、DM 与第一个圓的交点。

1° 試証 $MPBQ$ 是平行四边形。

2° 試証 MN 是 NC 和 ND 的比例中項。

〔解答〕 1°. 因为角 ADB（图.575）是直角，則直綫 BD 切于圓 CMD，由此可知，$\angle CDB=180°-\angle CMD \parallel \angle CMQ$。另一方面，$\angle CDB=\angle CPB$ 是圓周角。因而，$\angle CMQ=\angle CPB$，所以直綫 MQ 平行于 PB。

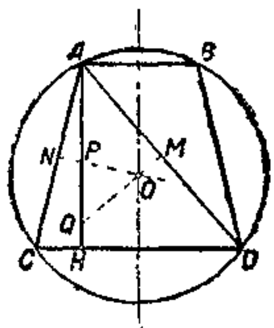

图 574

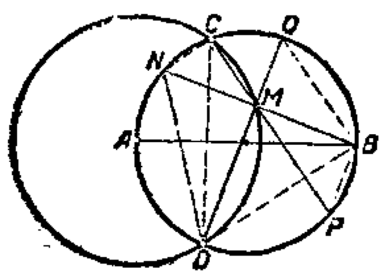

图 575

其次，$\angle DQB=\angle CPB$，因为弧 BC 和 BD 相等。但是由于直綫 MQ 和 PB 平行，所以 $\angle CPB=\angle CMQ$。因此，$\angle DQB=\angle CMQ$，于是直綫 BQ 平行于 PM。

总之，四边形 $MPBQ$ 是平行四边形。

2°. $\angle CMN=\angle QBN=\angle QDN$；$\angle CNB=\angle DNB$，因而，三角形 CMN 和 MDN 相似，从这兩个三角形相似得到，$MN^2=NC\cdot ND$。

353. 已知等腰三角形 OAB（$OA=OB$）。由点 A 和 B 向以点 O 为圓心的可变半徑的圓作兩条切綫，而它們不交在三角形的高上。

1°. 試求这兩条直綫交点 M 的軌跡。

2°. 試証乘积 $MA\cdot MB$ 等于綫段 OM 和 OA 的平方差。

3°. 試求点 I 的軌跡，这里 I 是在直綫 MB 上自点 M 起截取等于 MA 的綫段的端点。

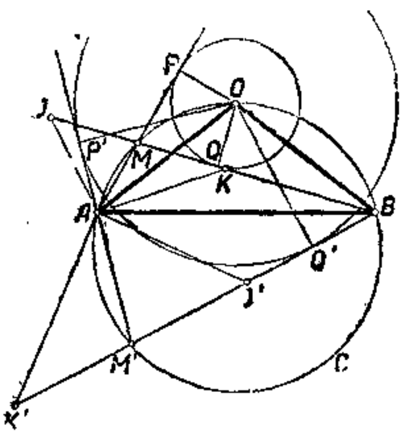

图 576

〔解答〕 設 P 和 Q（或 P' 和 Q'）是从点 A 和 B 向以 O为中心的圓所引切綫的切点(图. 576)，M（或M'）是这兩条切綫的交点。

1°. 因为 $OA=OB$ 和 $OP=OQ$（或 $OP'=OQ'$），則 $\angle OAM=\angle OBM$（或 $\angle OAM'+\angle OBM'=180°$），于是点 M（或 M'）在圓 OAB 上。

反之，如果点M在圓 OAB 的弧 AOB 上（或点 M' 在弧 ACB 上），則从点 O 到直綫 AM 和 BM（或 AM' 和 BM'）的距离 OP 和 OQ（OP' 和 OQ'）相等，因为角 OAM 和 OBM 相等（角 OAM' 和 OBM'互补）。所以，直綫 AM 和 BM（或 AM' 和 BM'）都与以 O 为中心的圓相切。

因此，点M和M'的軌跡是圓 OAB。

2°. 我們有 $MA\cdot MB=(PA-PM)(QB+QM)=PA^2-PM^2$，因为 $PA=QB$，这由于三角形 OAP 和 OBQ 相等，而 $PM=MQ$ 是自同一点向圓所引的切綫。所以 $MA\cdot MB=(OA^2-OP^2)-(OM^2-OP^2)=OA^2-OM^2$。

同样可以求得，$M'A\cdot M'B=OM'^2-OA^2$。

3°. 在直綫 MB 上自点 M（或 M'）向兩側截取与綫段 AM 相等的綫段 MI 和 MK（或与綫段 AM' 相等的綫段 $M'I'$ 和 $M'K'$）。

如果点M在弧 AOB 上，則 $\angle AIB=\angle MAI=\frac{1}{2}\angle AMB=\frac{1}{2}AOB$（參考习題 63 解答)和$\angle AKB=\angle AMB+\angle MAK=\angle AMB+\frac{1}{2}(180°-\angle AMB)=90°+\frac{1}{2}\angle AMB=90°+\frac{1}{2}\angle AOB$。

所以，点 I 的軌跡和点 K 的軌跡都是以 A 和B为端点且所張角分別等于$\frac{1}{2}\angle AOB$ 和 $90°+\frac{1}{2}\angle AOB$ 的弧。

如果点 M 在弧 ACB 上占有 M' 的位置，則同样可以求得，$\angle AI'B=90°+\frac{1}{2}\angle AM'B=90°+\frac{1}{2}(180°-\angle AMB)=180°-\frac{1}{2}\angle AMB=180°-\frac{1}{2}\angle AOB$和$\angle AK'B=\frac{1}{2}\angle AM'B=\frac{1}{2}(180°-\angle AMB)=90°-\frac{1}{2}\angle AMB=90°-\frac{1}{2}\angle AOB$。

所以，点 I' 的軌跡和点 K' 的軌跡都是以点 A 和 B 为端点且所張角分別等于 $180°-\frac{1}{2}\angle AOB$ 和 $90°-\frac{1}{2}\angle AOB$ 的弧。

因为 $\angle AIB+\angle AI'B=\frac{1}{2}\angle AOB+(180°-\frac{1}{2}\angle AOB)=180°$，所以点 I 和 I'軌跡（兩个弧）構成一个圓。因为 $\angle AKB+\angle AK'B=(90°+\frac{1}{2}\angle AOB)+(90°-\frac{1}{2}\angle AOB)=180°$，所以，对于点 K 和 K' 的軌跡，也同样成立(这兩个圓在图上沒有画出)。

354. 在任一三角形 ABC 的底 BC 上，取任意一点 D，并且作三角形 ABD 和 ACD 的外接圓，假定 O 和 O' 是这兩个圓的中心。

1° 試証这兩个圓的半徑的比是常数。

2° 試确定使半徑的長度为最小的点D的位置。

3° 試証三角形 AOO' 与三角形 ABC 相似。

4° 試求分綫段 OO' 为已知比的点M的軌跡；研究当对应点是頂点 A 在直綫OO'上的射影的情形。

〔解答〕 1°．三角形 ABD 和 ACD 的外接圓半徑 AO 和 AO' (图.577) 分别等于 (§ 130a)：$AO=\frac{AB\cdot AD}{2\cdot AH}$和$AO'=\frac{AC\cdot AD}{2\cdot AH}$，这里 AH 是三角形 ABC的高。由此 $AO:AO'=AB:AC$。

2°．对于 AD 的最小的可能值，也就是对于 $AD=AH$，半徑 AO 和 AO' 的長度最小。这时点 D 与高的垂足 H 重合。

3°．我們有（按 1°）$AO:AO'=AB:AC$，因此，等腰三角形 ABO 和 ACO' 相似。由此 $\angle OAB=\angle O'AC$，因而，$\angle OAO'=\angle BAC$．因为$\angle OAO'=\angle BAC$ 和 $AO:AO'=AB:AC$，所以，三角形 OAO' 与三角形 BAC 相似。

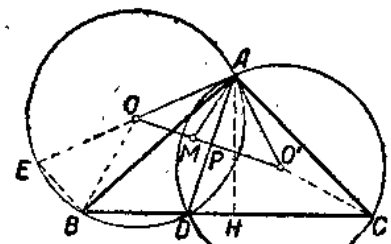

图 577

4°．如果点M分綫段 OO' 成已知比，則与三角形 AOO' 保持形狀不变的同时，三角形 AOM 保持形狀不变，因为角 AOM 和比 $AO:MO$ 保持一定。所以，綫段AM和AO 構成定角，并且比 $AM:AO$ 不变。因此，点 M 所画的图形与点O所画的图形相似（参考 § 150 和习題 160 解答）．

因为点 O 画出直綫——边 AB 的中垂綫，所以点 M 的軌跡也是直綫。

因为三角形 AOO' 的高 AP 的垂足 P 是綫段 AD 中点（根据等式 $AO=OD$, $AO'=O'D$），所以点 P 画出平行于 BC 且通过 AB 和 AC 中点的直綫。

355. 繞兩个圓的一个交点，轉动一个定角（这角的兩边与兩个圓分別交在点M和M'）。試求分綫段 MM' 为已知比的点的軌跡。再求以MM' 为底且与已知三角形相似的三角形的頂点軌跡。

〔解答〕 設 A 是兩个已知圓 O 和 O' 的一个交点（图.578），MAM' 是已知角。我們作与角 OAO' 相等，且方向相同的角 MAM''。作由旋轉角为 MAM''＝常数的旋轉和位似（因为 $AM'':AM=AO':AO$）所合成的相似变换，由点M 便可以得到点 M''。再作旋轉角为 $\angle M''O'M'=2\angle M''AM'$＝常数的旋轉，由点$M''$就得到点$M'$。总之，点$M$和$M''$以及 M'' 和 M'可以看作是旋轉方向相同的兩对相似图形中的对应点。因而，点M和M' 可以看作旋轉方向相同的兩个相似图形中的对应点．根据习題162，

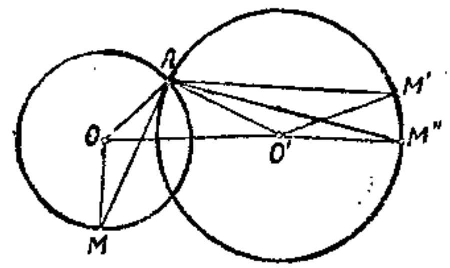

图 578

把綫段 MM' 分成已知比的点的軌跡或以 MM' 为底边并且与已知三角形相似的三角形

頂点的軌跡，是与点 M 的軌跡相似的图形，也就是圓。

356. 如果有五条直綫 A，B，C，D，E，其中的兩条，例如 A 和 B，被其它三条截为比例綫段，則其中任何的兩条也被其它三条截为比例綫段。

（在証明时应分为兩种情形，这看在定理里要証明的兩条直綫中是否有一条屬于那兩条直綫之內或是完全沒有）。

〔**解答**〕 設 P_{12} 是直綫 A 和 B 的交点，P_{13} 是直綫 A 和 C的交点，等等（图. 579）。把 § 192 的定理应用于直綫 A，C 和 D 所構成的三角形和割綫 E 上，得到：$\frac{P_{15}P_{13}}{P_{15}P_{14}}\cdot\frac{P_{45}P_{14}}{P_{45}P_{34}}\cdot\frac{P_{35}P_{34}}{P_{35}P_{13}}=1$。把同一定理再应用到直綫 B，C 和 D 所構成的三角形和割綫 E上，則得到：$\frac{P_{25}P_{23}}{P_{25}P_{24}}\cdot\frac{P_{45}P_{24}}{P_{45}P_{34}}\cdot\frac{P_{35}P_{34}}{P_{35}P_{23}}=1$。用等号連結这兩个等式的左边，再进行化簡，我們得到：$\frac{P_{15}P_{13}}{P_{15}P_{14}}\cdot\frac{P_{45}P_{14}}{P_{35}P_{13}}=\frac{P_{25}P_{23}}{P_{52}P_{24}}\cdot\frac{P_{45}P_{24}}{P_{35}P_{23}}$。 如果直綫 C，D 和 E 在直綫 A 和 B 上截出比例綫段，則$\frac{P_{15}P_{13}}{P_{15}P_{14}}=\frac{P_{25}P_{23}}{P_{25}P_{24}}$。由后兩个等式得到：$\frac{P_{45}P_{14}}{P_{35}P_{13}}=\frac{P_{46}P_{24}}{P_{35}P_{23}}$，或$\frac{P_{35}P_{23}}{P_{35}P_{13}}=\frac{P_{45}P_{24}}{P_{45}P_{14}}$，也就是直綫 A，B 和 E 在直綫 C 和D上截出比例綫段。

总之，我們証明了，如果直綫对（A，B）被另三条直綫截出比例綫段，則对于即不含A也不含B 的直綫对（C，D）同样成立。因此，在这种情形下，直綫对（C，E）和（D，E）具有同样性質。

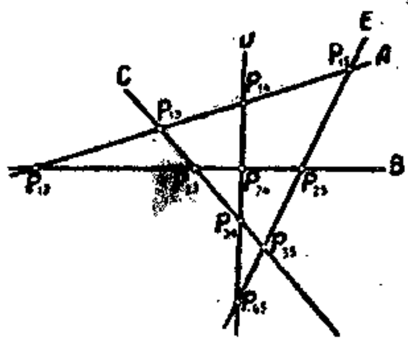

图 579

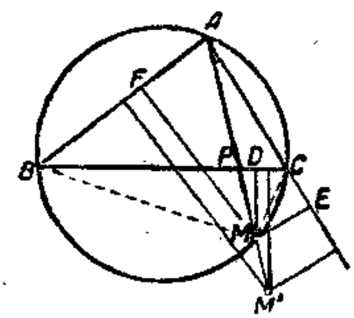

图 580

其次，为了証明，含有原直綫对（A，B）里的直綫 A 的直綫对（A，C）具有同样性質，我們应該兩次应用已作的推理：如果对于直綫对（A,B）所研究的性質成立，則对于（D，E）也成立，又如果对于（D，E）成立，則对于（A，C）也成立。

357. 設 a，b，c 是三角形的边；x，y，z 是平面上任意一点到各边的距离。試

証，如果这个点在三角形的外接圓上，則比 $\frac{a}{x}$，$\frac{b}{y}$，$\frac{c}{z}$ 中的一个等于其它兩个的和。再研究逆定理。

〔解答〕 为明确起見，設点M在圓 ABC 的一个不包含点 A 的弧 BC 上(图.580)，$MD=x$，$ME=y$，$MF=z$ 是这个点到三角形各边 $BC=a$，$CA=b$，$AB=C$ 的距离。根据 § 237，我們有：

$$MA \cdot a = MB \cdot b + MC \cdot c \qquad (1)$$

如果 D,E 和 F是自点M向三角形各边所引垂綫的垂足，則三角形MBF和MCE相似(因为 $\angle ABM = 180^\circ - \angle ACM = \angle ECM$)，由此，$MB : MC = z : y$。由相似三角形 MBD 和 MAE，同样有 $MA : MB = y : x$。因而，$MA : MB : MC = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$。現在將等式（1）的綫段 MA，MB 和 MC 换为与它們成比例的量，我們得到 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$。同样，对于在弧 AC 上的点M，我們可求得 $\frac{b}{y} = \frac{a}{x} + \frac{c}{z}$，对于在弧 AB 上的点，可以求得 $\frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$。定理得到証明。

如果將点M到三角形 ABC 各边的距离加以适当的符号（參考习題 301 解答，附註），对于外接圓上的任一点M，我們有（按絕对值和符号）

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0. \qquad (2)$$

逆定理可以叙述为：如果对于平面上某一点M，按絕对值和符号等式（2）成立，則点M在外接圓上。

为了証明，我們研究不在外接圓上的点 M'，幷用 x'，y' 和 z' 表示它到三角形各边的距离（帶适当符号）。其次，用M表示直綫 AM' 和外接圓的交点，用 x，y 和 z 表示它到三角形各边的距离，幷且用 P 表示直綫 AM' 与边 BC 的交点。因为点 A，M'，M 和 P在同一直綫上，所以按絕对值和符号則有 $y : y' = z : z' = AM : AM'$；$x : x' = PM : PM'$ 和 $x : x' = PM : PM' = (PA + AM) : (PA + AM') \neq AM : AM'$（我們知道，对于$a \neq b$和$c \neq 0$，我們有 $\frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$）。因为点$M$在外接圓上，所以 $\frac{a}{x'} + \frac{b}{y'} + \frac{c}{z'} = \frac{a}{x'} + \left(\frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \cdot \frac{AM}{AM'} = \frac{a}{x'} - \frac{a}{x} \cdot \frac{AM}{AM'} = \frac{a}{x}\left(\frac{x}{x'} - \frac{AM}{AM'}\right) \neq 0$，由此，得出逆定理。如果直綫 AM' 切于外接圓或平行于 BC，則証明需要稍加改变（这些留給讀者）。

附註．对逆定理我們应該注意，如果象下面例題所說那样，不考慮距离的符号，这时命題："如果比 $\frac{a}{x}$，$\frac{b}{y}$，$\frac{c}{z}$ 中的一个等于另外兩个之和，則点在外接圓上" 是不正确的。在等边三