

约束力学系统的对称性与守恒量

梅凤翔 著

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

约束力学系统的 对称性与守恒量

梅凤翔 著

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书全面系统地论述完整约束系统、非完整约束系统、Birkhoff 系统等约束力学系统的对称性与守恒量。对称性包括 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性。守恒量包括 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和新型守恒量。研究中具体包括各类约束系统 Noether 对称性直接导致的 Noether 守恒量、间接导致的 Hojman 守恒量和新型守恒量；Lie 对称性直接导致的 Hojman 守恒量、间接导致的 Noether 守恒量和新型守恒量；形式不变性直接导致的新型守恒量、间接导致的 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量等。

本书可作为高等院校力学、数学、物理学以及工程专业高年级大学生和研究生的教学参考书，亦可供有关教师、力学工作者和科技人员参考。

版权专有 侵权必究

图书在版编目 (CIP) 数据

约束力学系统的对称性与守恒量/梅凤翔著. —北京: 北京理工大学出版社, 2004.1

ISBN 7-5640-0234-4

I. 约… II. 梅… III. 理论力学 IV.O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 008073 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (办公室) 68912824 (发行部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

电子邮箱 / chiefedit@bitpress.com.cn

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京地质印刷厂

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 31.25

字 数 / 467 千字

版 次 / 2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷

印 数 / 1~1500 册

定 价 / 48.00 元

责任校对 / 陈玉梅

责任印制 / 母长新

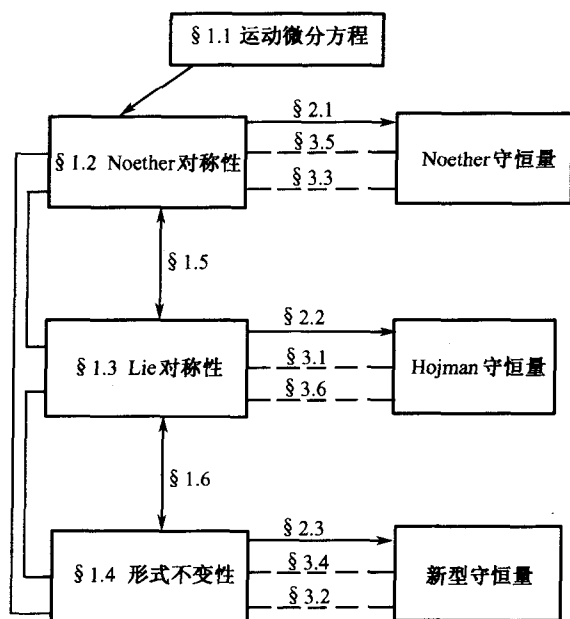
图书出现印装质量问题, 本社负责调换

前 言

对称性原理是物理学中更高层次的法则。对称性理论有许多用途,其中之一就是用来寻求守恒量。牛顿力学利用力的分析,可以找到具有明显物理意义的动量守恒律、动量矩守恒律和机械能守恒律等。分析力学比牛顿力学进了一步,它利用 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的表达式就可以找到广义动量守恒律(循环积分)和广义能量守恒律(广义能量积分)。对称性理论比牛顿力学和分析力学的理论更进了一步,利用它不仅可以找到牛顿力学和分析力学已经找到的守恒量,而且可以找到更多的守恒量。从牛顿力学到分析力学再到对称性理论,有一个守恒量从少到多,物理意义从明显到不明显,数学工具从简单到复杂的发展历程。

本书共十五章,研究的内容包括 Lagrange 系统, Hamilton 系统, 广义坐标下一般完整系统, 准坐标下一般完整系统, 有多余坐标完整系统, 变质量完整系统, 事件空间中完整系统, 相对运动动力学系统, Chetaev 型非完整系统, 非 Chetaev 型非完整系统, 奇异 Lagrange 系统, Poincaré 方程, 单面约束系统, Birkhoff 系统, 以及广义 Hamilton 系统等对称性与守恒量。每章基本安排三节。第一节介绍系统的 Noether 对称性, Lie 对称性与形式不变性, 以及对称性之间的关系; 第二节研究三种对称性直接导致的守恒量, 包括 Noether 对称性直接导致的 Noether 守恒量, Lie 对称性直接导致的 Hojman 守恒量, 以及形式不变性直接导致的新型守恒量等; 第三节研究三种对称性间接导致的守恒量, 包括 Noether 对称性导致的 Hojman 守恒量和新型守恒量, Lie 对称性导致的 Noether 守恒量和新型守恒量, 以及形式不变性导致的 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量等。每小节都有例题和习题来说明理论的应用。每章后都附有必要的参考文献。

本书内容的框架如下图:



本书的基本工作是在国家自然科学基金项目《约束力学系统的 Lie 对称性与全局分析》(19972010, 2000.01—2002.12) 和《约束力学系统的对称性与守恒量》(10272021, 2003.01—2005.12) 的支持下完成的。在本书写作过程中得到北京理工大学史荣昌教授、张永发教授、吴惠彬博士、尚玫博士、王树勇博士、湖南大学赵跃宇教授、长沙大学罗绍凯教授、苏州科技学院张毅教授、辽宁大学郭永新教授、湖州师范学院葛伟宽教授、华东船舶工业学院许志新教授等的支持。本书得到北京理工大学学科建设经费的资助。北京航空航天大学陆启韶教授审阅了书稿并提出宝贵意见。在此, 对国家自然科学基金委员会、北京理工大学、陆启韶教授和各位关心本书出版的同志表示深深地感谢。限于作者水平, 书中难免有疏有漏, 敬请读者指正。

作者
2003 年冬天

目 录

前 言	(1)
第 1 章 Lagrange 系统的对称性与守恒量	(1)
§ 1.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(1)
1.1.1 系统的运动微分方程	(2)
1.1.2 系统的 Noether 对称性	(5)
1.1.3 系统的 Lie 对称性	(7)
1.1.4 系统的形式不变性	(10)
1.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(12)
1.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(14)
§ 1.2 对称性直接导致的守恒量	(16)
1.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(16)
1.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(18)
1.2.3 形式不变性与新型守恒量	(21)
§ 1.3 对称性间接导致的守恒量	(23)
1.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(23)
1.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(25)
1.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(26)
1.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(29)
1.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(30)
1.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(32)
参考文献	(34)
第 2 章 Hamilton 系统的对称性与守恒量	(36)
§ 2.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(36)
2.1.1 系统的运动微分方程	(36)
2.1.2 系统的 Noether 对称性	(39)
2.1.3 系统的 Lie 对称性	(41)
2.1.4 系统的形式不变性	(43)

2.1.5	Noether 对称性与 Lie 对称性	(45)
2.1.6	Lie 对称性与形式不变性	(47)
§ 2.2	对称性直接导致的守恒量	(49)
2.2.1	Noether 对称性与 Noether 守恒量	(49)
2.2.2	Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(50)
2.2.3	形式不变性与新型守恒量	(52)
§ 2.3	对称性间接导致的守恒量	(53)
2.3.1	Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(53)
2.3.2	Noether 对称性与新型守恒量	(55)
2.3.3	Lie 对称性与 Noether 守恒量	(56)
2.3.4	Lie 对称性与新型守恒量	(58)
2.3.5	形式不变性与 Noether 守恒量	(59)
2.3.6	形式不变性与 Hojman 守恒量	(60)
	参考文献	(62)
第 3 章	广义坐标下一般完整系统的对称性与守恒量	(63)
§ 3.1	Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(63)
3.1.1	系统的运动微分方程	(63)
3.1.2	系统的 Noether 对称性	(65)
3.1.3	系统的 Lie 对称性	(67)
3.1.4	系统的形式不变性	(69)
3.1.5	Noether 对称性与 Lie 对称性	(71)
3.1.6	Lie 对称性与形式不变性	(74)
§ 3.2	对称性直接导致的守恒量	(76)
3.2.1	Noether 对称性与 Noether 守恒量	(76)
3.2.2	Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(78)
3.2.3	形式不变性与新型守恒量	(81)
§ 3.3	对称性间接导致的守恒量	(83)
3.3.1	Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(84)
3.3.2	Noether 对称性与新型守恒量	(85)
3.3.3	Lie 对称性与 Noether 守恒量	(87)
3.3.4	Lie 对称性与新型守恒量	(89)
3.3.5	形式不变性与 Noether 守恒量	(90)
3.3.6	形式不变性与 Hojman 守恒量	(92)

参考文献	(94)
第 4 章 准坐标下一般完整系统的对称性与守恒量	(95)
§ 4.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(95)
4.1.1 系统的运动微分方程	(95)
4.1.2 系统的 Noether 对称性	(98)
4.1.3 系统的 Lie 对称性	(101)
4.1.4 系统的形式不变性	(103)
4.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(106)
4.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(110)
§ 4.2 对称性直接导致的守恒量	(115)
4.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(115)
4.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(117)
4.2.3 形式不变性与新型守恒量	(121)
§ 4.3 对称性间接导致的守恒量	(122)
4.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(123)
4.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(124)
4.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(126)
4.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(127)
4.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(129)
4.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(130)
参考文献	(132)
第 5 章 有多余坐标完整系统的对称性与守恒量	(133)
§ 5.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(133)
5.1.1 系统的运动微分方程	(133)
5.1.2 系统的 Noether 对称性	(136)
5.1.3 系统的 Lie 对称性	(138)
5.1.4 系统的形式不变性	(141)
5.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(143)
5.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(146)
§ 5.2 对称性直接导致的守恒量	(148)
5.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(148)
5.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(149)

5.2.3 形式不变性与新型守恒量	(152)
§ 5.3 对称性间接导致的守恒量	(154)
5.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(154)
5.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(156)
5.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(158)
5.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(160)
5.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(162)
5.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(165)
参考文献	(167)
第 6 章 变质量完整系统的对称性与守恒量	(168)
§ 6.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(168)
6.1.1 系统的运动微分方程	(168)
6.1.2 系统的 Noether 对称性	(170)
6.1.3 系统的 Lie 对称性	(172)
6.1.4 系统的形式不变性	(174)
6.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(177)
6.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(179)
§ 6.2 对称性直接导致的守恒量	(181)
6.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(181)
6.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(182)
6.2.3 形式不变性与新型守恒量	(185)
§ 6.3 对称性间接导致的守恒量	(187)
6.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(187)
6.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(189)
6.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(190)
6.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(192)
6.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(193)
6.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(195)
参考文献	(197)
第 7 章 事件空间中完整系统的对称性与守恒量	(198)
§ 7.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(198)
7.1.1 系统的运动微分方程	(198)

7.1.2 系统的 Noether 对称性	(200)
7.1.3 系统的 Lie 对称性	(202)
7.1.4 系统的形式不变性	(204)
7.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(205)
7.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(209)
§ 7.2 对称性直接导致的守恒量	(210)
7.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(211)
7.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(212)
7.2.3 形式不变性与新型守恒量	(214)
§ 7.3 对称性间接导致的守恒量	(216)
7.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(217)
7.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(219)
7.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(220)
7.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(222)
7.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(224)
7.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(226)
参考文献	(227)
第 8 章 相对运动动力学系统的对称性与守恒量	(228)
§ 8.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(228)
8.1.1 系统的运动微分方程	(229)
8.1.2 系统的 Noether 对称性	(231)
8.1.3 系统的 Lie 对称性	(234)
8.1.4 系统的形式不变性	(235)
8.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(237)
8.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(240)
§ 8.2 对称性直接导致的守恒量	(241)
8.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(241)
8.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(243)
8.2.3 形式不变性与新型守恒量	(246)
§ 8.3 对称性间接导致的守恒量	(247)
8.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(248)
8.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(249)
8.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(251)

8.3.4	Lie 对称性与新型守恒量	(253)
8.3.5	形式不变性与 Noether 守恒量	(254)
8.3.6	形式不变性与 Hojman 守恒量	(257)
	参考文献	(258)
第 9 章	Chetaev 型非完整系统的对称性与守恒量	(259)
§ 9.1	Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(259)
9.1.1	系统的运动微分方程	(260)
9.1.2	系统的 Noether 对称性	(262)
9.1.3	系统的 Lie 对称性	(264)
9.1.4	系统的形式不变性	(267)
9.1.5	Noether 对称性与 Lie 对称性	(271)
9.1.6	Lie 对称性与形式不变性	(274)
§ 9.2	对称性直接导致的守恒量	(277)
9.2.1	Noether 对称性与 Noether 守恒量	(277)
9.2.2	Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(279)
9.2.3	形式不变性与新型守恒量	(282)
§ 9.3	对称性间接导致的守恒量	(284)
9.3.1	Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(284)
9.3.2	Noether 对称性与新型守恒量	(287)
9.3.3	Lie 对称性与 Noether 守恒量	(290)
9.3.4	Lie 对称性与新型守恒量	(292)
9.3.5	形式不变性与 Noether 守恒量	(294)
9.3.6	形式不变性与 Hojman 守恒量	(296)
	参考文献	(298)
第 10 章	非 Chetaev 型非完整系统的对称性与守恒量	(299)
§ 10.1	Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(299)
10.1.1	系统的运动微分方程	(299)
10.1.2	系统的 Noether 对称性	(302)
10.1.3	系统的 Lie 对称性	(304)
10.1.4	系统的形式不变性	(308)
10.1.5	Noether 对称性与 Lie 对称性	(311)
10.1.6	Lie 对称性与形式不变性	(313)

§ 10.2 对称性直接导致的守恒量	(314)
10.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(314)
10.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(317)
10.2.3 形式不变性与新型守恒量	(320)
§ 10.3 对称性间接导致的守恒量	(322)
10.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(322)
10.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(325)
10.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(328)
10.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(330)
10.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(332)
10.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(335)
参考文献	(337)
 第 11 章 奇异 Lagrange 系统的对称性与守恒量	(338)
§ 11.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(338)
11.1.1 系统的运动微分方程	(339)
11.1.2 系统的 Noether 对称性	(340)
11.1.3 系统的 Lie 对称性	(342)
11.1.4 系统的形式不变性	(344)
11.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(345)
11.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(346)
§ 11.2 对称性直接导致的守恒量	(347)
11.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(348)
11.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(349)
11.2.3 形式不变性与新型守恒量	(351)
§ 11.3 对称性间接导致的守恒量	(353)
11.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(353)
11.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(354)
11.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(355)
11.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(356)
11.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(358)
11.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(359)
参考文献	(360)

第 12 章 Poincaré 方程的对称性与守恒量	(362)
§ 12.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(362)
12.1.1 Poincaré 方程	(362)
12.1.2 方程的 Noether 对称性	(364)
12.1.3 方程的 Lie 对称性	(368)
12.1.4 方程的形式不变性	(370)
12.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(372)
12.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(376)
§ 12.2 对称性直接导致的守恒量	(380)
12.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(380)
12.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(381)
12.2.3 形式不变性与新型守恒量	(385)
§ 12.3 对称性间接导致的守恒量	(388)
12.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(388)
12.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(390)
12.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(392)
12.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(393)
12.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(394)
12.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(396)
参考文献	(398)
第 13 章 单面约束系统的对称性与守恒量	(399)
§ 13.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(399)
13.1.1 系统的运动微分方程	(399)
13.1.2 系统的 Noether 对称性	(402)
13.1.3 系统的 Lie 对称性	(404)
13.1.4 系统的形式不变性	(406)
13.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(409)
13.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(413)
§ 13.2 对称性直接导致的守恒量	(415)
13.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(415)
13.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(416)
13.2.3 形式不变性与新型守恒量	(419)
§ 13.3 对称性间接导致的守恒量	(421)

13.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(421)
13.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(423)
13.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(424)
13.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(425)
13.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(427)
13.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(428)
参考文献	(430)
第 14 章 Birkhoff 系统的对称性与守恒量	(432)
§ 14.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性	(432)
14.1.1 系统的运动微分方程	(432)
14.1.2 系统的 Noether 对称性	(434)
14.1.3 系统的 Lie 对称性	(436)
14.1.4 系统的形式不变性	(438)
14.1.5 Noether 对称性与 Lie 对称性	(440)
14.1.6 Lie 对称性与形式不变性	(442)
§ 14.2 对称性直接导致的守恒量	(444)
14.2.1 Noether 对称性与 Noether 守恒量	(444)
14.2.2 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(446)
14.2.3 形式不变性与新型守恒量	(448)
§ 14.3 对称性间接导致的守恒量	(450)
14.3.1 Noether 对称性与 Hojman 守恒量	(450)
14.3.2 Noether 对称性与新型守恒量	(452)
14.3.3 Lie 对称性与 Noether 守恒量	(453)
14.3.4 Lie 对称性与新型守恒量	(455)
14.3.5 形式不变性与 Noether 守恒量	(456)
14.3.6 形式不变性与 Hojman 守恒量	(458)
参考文献	(459)
第 15 章 广义 Hamilton 系统的对称性与守恒量	(461)
§ 15.1 Lie 对称性与形式不变性	(461)
15.1.1 系统的运动微分方程	(461)
15.1.2 系统的 Lie 对称性	(463)
15.1.3 系统的形式不变性	(465)

15.1.4 Lie 对称性与形式不变性	(467)
§ 15.2 对称性直接导致的守恒量	(469)
15.2.1 Lie 对称性与 Hojman 守恒量	(469)
15.2.2 形式不变性与新型守恒量	(472)
15.2.3 一般对称性导致的新型守恒量	(475)
§ 15.3 对称性间接导致的守恒量	(478)
15.3.1 Lie 对称性与新型守恒量	(478)
15.3.2 形式不变性与 Hojman 守恒量	(480)
参考文献	(482)
名词索引	(483)

第 1 章

Lagrange 系统的对称性与守恒量

Lagrange 系统是一类重要而又较为简单的动力学系统,它仅用一个函数 L 就可描述系统的动力学性质。完整保守系统、广义力有广义势的系统、Lagrange 力学逆问题系统,以及诸如 Lotka 生化振子、军备竞赛等非力学系统都是 Lagrange 系统。不过,其中的函数 L 不一定都有动势的意义。对称性与守恒量理论有许多重要应用,如从已知解导出新解、常微分方程的积分、偏微分方程的约化和线性化、方程的分类、数值方法和计算机代码测试等。经典分析力学的理论仅能找到如广义动量守恒律和广义能量守恒律等少数守恒量。近代的对称性理论不仅能找到经典理论已经找到的守恒量,而且还可以找到更多的守恒量。常用的对称性主要有 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性。Noether 对称性是 Hamilton 作用量在群的无限小变换下的一种不变性质;Lie 对称性是微分方程在群的无限小变换下的一种不变性质;形式不变性是指力学系统动力学方程中出现的动力学函数(如 Lagrange 函数,动能,势能,广义力,广义约束力,约束方程中的函数等)在经历群的无限小变换后仍然满足原来方程的一种不变性质。

本章研究 Lagrange 系统的对称性与守恒量,包括 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性、三种对称性直接导致的守恒量,以及三种对称性间接导致的守恒量等。

§ 1.1 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性

本节研究 Lagrange 系统的 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性,包

括系统的运动微分方程、Noether 对称性、Lie 对称性、形式不变性、Noether 对称性与 Lie 对称性的关系,以及 Lie 对称性与形式不变性的关系等。

1.1.1 系统的运动微分方程

如果具有 n 个自由度的完整系统的运动微分方程有如下形式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s=1, \dots, n) \quad (1.1.1)$$

则称系统为 Lagrange 系统,其中 q_s 为系统的广义坐标, $\dot{q}_s$ 为广义速度。方程(1.1.1)可简写成

$$E_s(L) = 0 \quad (1.1.2)$$

其中

$$E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \quad (1.1.3)$$

为 Euler 算子。假设系统(1.1.1)非奇异,即设

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0 \quad (1.1.4)$$

则可求出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, q, \dot{q}) \quad (1.1.5)$$

Lagrange 系统可分成三类:完整保守系统、广义力有广义势的系统,以及 Lagrange 力学逆问题系统。

1. 完整保守系统

对于完整保守系统,方程(1.1.1)中的 $L = T - V$ 为 Lagrange 函数或动势,其中 T 为系统的动能, V 为系统的势能。

例 1 Hénon — Heiles 问题^[1]。

Hénon — Heiles 问题的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \left(\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + q_1^2q_2 - \frac{1}{3}q_2^3 \right) \quad (1.1.6)$$

系统的运动微分方程为

$$\ddot{q}_1 = -q_1 - 2q_1q_2 \quad (1.1.7)$$