

依据新教学大纲编写

高中数理化导学丛书

高一数学 (新教材)导学

丛书主编 门树慧 李国岚 杨正钊

ax^2+bx+c
集名师经验
汇高考精华

0101101010101010



金盾出版社

JINDUN CHUBANSHE

0101101010101010

高中数理化导学丛书

高一数学 (新教材)

导学



李国岚

本书编者 门树慧 何怡生
门树敏



金盾出版社

内 容 提 要

本书包括集合与简易逻辑、函数、数列、三角函数、平面向量共五章。每章包括以下六部分:学习要求,知识要点,学法指导,相关高考题,解题训练与检测,发展与探索。书末是第一、第二学期期末综合练习,全书练习题的答案与提示。本书是高一学生的学习指导书,同时供高三学生高考复习使用,也可供高中数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高中数理化导学丛书·高一数学(新教材)导学/门树慧等编著. —北京:金盾出版社, 2003.6

ISBN 7-5082-2404-3

I. 高… II. 门… III. 数学课—高一—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 023788 号

金盾出版社出版、总发行

北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)

邮政编码: 100036 电话: 68214039 66882412

传真: 68276683 电挂: 0234

封面印刷:北京百花彩印有限公司

正文印刷:北京金盾印刷厂

各地新华书店经销

开本: 787×1092 1/16 印张: 20.75 字数: 498 千字

2004 年 8 月第 1 版第 4 次印刷

印数: 24001—26000 册 定价: 23.00 元

(凡购买金盾出版社的图书,如有缺页、
倒页、脱页者,本社发行部负责调换)



序

为了强化素质教育,培养学生的创新精神和实践能力,体现课程改革的新思想、新观念,国家教育部修订和颁布了全日制中学九种学科教学大纲,人民教育出版社编写了教材(试验本),并经试验修订后已在全国推广使用。

为配合新教学大纲和新教材的使用,我们精心策划编写了“高中数理化导学丛书”。本丛书包括数学、物理、化学三科共九册,各册分章编写,与教学同步。2003年出版《高一数学(新教材)导学》、《高一物理(新教材)导学》、《高一化学(新教材)导学》共三册。

本丛书突出了一个“新”字。以新大纲新教材为依据,体现教改的新思想,并具有以下特点:

1. 导学部分,系统总结单元知识,突出重点,突破难点,解决疑点;例题部分,内容全面,题型多样,每题均有详尽的分析和解答,意在启迪思维,传授方法,点拨技巧,使学生掌握知识,学习技能。

2. 每章均配有解题训练和检测,每册书末有期末综合练习。编写中力求做到精讲精练,讲练结合,以提高学生解决实际问题的能力。

3. 每册设相关高考题选,并对选题进行解析,意在使学生理解学科系统知识的连贯性和



高考取样的全面性,启发学生循序渐进学好各单元知识,提高分析问题和解决问题的能力。这是高考“应试”的根基所在。

4. 注意扩展知识和创新思维能力的培养,特设了发展与探索专题,供学生选学。

本丛书由北京教育学院和教师进修学校的学科教学法教授、教学研究员和重点中学特级教师、高级教师编写。

希望这套书能成为广大中学生的良师益友,同时献给中学教师作教学参考。书中不妥和疏漏之处,请读者批评指正。

丛书编委会
2003年5月





前言

2002年中华人民共和国教育部颁布了最新的《全日制普通高级中学数学教学大纲》，人民教育出版社编写的最新教材(试验修订本)在全国使用。新大纲和新教材更强调引导学生积极主动地学习，更突出基本数学概念和知识的教学，激发学生的创新意识和学习科学研究方法，全面提高学生素质。

《高一数学(新教材)导学》以新大纲新教材为依据，分章编写。每章包括六部分：学习要求、知识要点、学法指导、相关高考题选、解题训练与检测、发展与探索。其中“学法指导”部分，突出本章知识重点，解答疑难，帮助学生掌握好数学概念和公式法则，为提高素质打下良好的知识基础，并选择典型例题，点拨解题思路，帮助学生理解和巩固所学知识，培养学生发现问题的能力，激发学生的创新意识。“相关高考题选”部分，选择了一些与本章有关的高考题并作详尽分析，启发学生懂得只有学好基础知识，才是应试的根基所在。“解题训练与检测”部分，选择本章练习题，内容新颖，不落窠臼，紧密联系实际。“发展与探索”部分，以扩展提高为目的，供学生选学。

本书末配有练习题的参考答案和提示，供学生作自我检测和评价。



本书是普通高中一年级学生的学习指导用书,同时可供高三学生高考复习使用,也可供高中数学教师参考。

参加本书编写的还有任如芬、刘绮、李正、周玉芹、牛佳耘、母艾等。

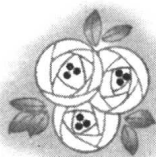
我们相信本书必将以它的新特色赢得广大中学生和家长、教师的喜爱。书中不妥之处,敬请广大读者批评指正。

作者

2003年4月

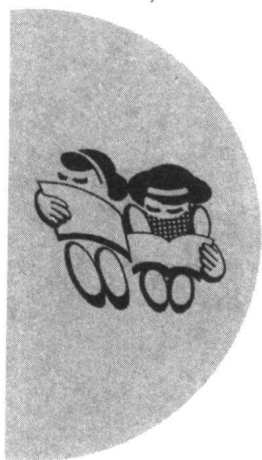


目 录



第一章 集合与简易逻辑	(1)
一、学习要求	(1)
二、知识要点	(1)
三、学法指导	(4)
四、相关高考题选	(24)
五、解题训练与检测	(27)
六、发展与探索	(37)
第二章 函数	(38)
一、学习要求	(38)
二、知识要点	(38)
三、学法指导	(41)
四、相关高考题选	(81)
五、解题训练与检测	(92)
六、发展与探索	(104)
第三章 数列	(108)
一、学习要求	(108)
二、知识要点	(108)
三、学法指导	(111)
四、相关高考题选	(141)
五、解题训练与检测	(143)
六、发展与探索	(147)
第四章 三角函数	(148)
一、学习要求	(148)
二、知识要点	(148)
三、学法指导	(153)
四、相关高考题选	(189)
五、解题训练与检测	(191)
六、发展与探索	(211)
第五章 平面向量	(212)
一、学习要求	(212)

二、知识要点·····	(212)
三、学法指导·····	(215)
四、相关高考题选·····	(229)
五、解题训练与检测·····	(230)
六、发展与探索·····	(241)
期末综合练习 ·····	(243)
※第一学期期末综合练习·····	(243)
※第二学期期末综合练习·····	(244)
附录:答案与提示 ·····	(246)



第一章



集合与简易逻辑

一、学习要求

(一) 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念;了解空集和全集的意义;了解属于、包含、相等关系的意义;掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

(二) 理解 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c(c>0)$ 型的不等式和一元二次不等式的概念;掌握它们的解法;了解二次函数、一元二次方程和一元二次不等式三者之间的关系,会解简单的分式不等式.

(三) 了解命题的概念和命题的构成;理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义;掌握四种命题及其相互关系;初步掌握充要条件.

二、知识要点

(一) 集合

1. 本单元讲述的集合的初步知识,包括集合的有关概念、集合的表示及集合与集合之间的关系.

(1) 集合是集合论中不定义的概念.集合的元素具有**确定性**、**互异性**和**无序性**三种特性.集合分为**有限集**和**无限集**两类.常用的特定数集有: \mathbf{N} 表示非负整数集即自然数集、 \mathbf{N}_+ 或 \mathbf{N}^* 表示正整数集、 \mathbf{Z} 表示整数集、 \mathbf{Q} 表示有理数集、 \mathbf{R} 表示实数集.属于符号 \in 表示元素与集合间的关系.

(2) 集合的表示方法有**列举法**、**描述法**、**区间法**(数集的一种表示方法)和**图示法**(韦恩图).用哪种表示法应根据具体问题确定,但是无限集一般不宜采用列举法.

(3) **空集** \emptyset 是不含任何元素的集合,规定**空集是任何集合的子集**.

集合 A 是集合 B 的**子集**的意义是:两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 包含于 B ,即集合 A 是集合 B 的子集,记作: $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).其中记号 $A \subseteq B$ 的含义有两个:

- ① $A = B$,集合 A 等于集合 B ;
- ② $A \subsetneq B$,集合 A 是集合 B 的真子集.

(4) 集合的运算.

- ① **交集**:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记



作 $A \cap B, A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$.

② **并集**:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B, A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$.

③ **全集与补集**: S 是一个集合, A 是 S 的子集, $A \subseteq S, S$ 可看做全集.用 U 表示.

A 的补集:由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集(或余集),记作 $C_S A$,即 $C_S A = \{x | x \in S, \text{且 } x \notin A\}$.

(5) 集合的运算律.

① **交换律**: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

② **结合律**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

③ **分配律**:

交对并的分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

并对交的分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

④ $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset$

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$$

⑤ $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A, A \cup B = B$

2. 含绝对值的不等式解法.

(1) 不等式 $|x| < a (a > 0)$ 的解集是

$$\{x | -a < x < a\}.$$

(2) 不等式 $|x| > a (a > 0)$ 的解集是

$$\{x | x > a \text{ 或 } x < -a\}.$$

(3) 解 $|ax + b| < c$ 与 $|ax + b| > c (c > 0)$ 型的不等式,只须直接在 $|x| < a$ 与 $|x| > a (a > 0)$ 型不等式的解集中进行替换,从而使其转化为一元一次不等式,利用不等式的性质,即可求得解答.

3. 一元二次不等式的解法.

一元二次不等式经过化简后,一般可以化成下面两种形式之一:

$$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0) \quad \text{①}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0) \quad \text{②}$$

若判别式 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时:

不等式①的解集为 \mathbf{R} ,不等式②的解集为 \emptyset .

若判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时:

不等式①的解集为 $\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}, x \in \mathbf{R}\right\}$.

不等式②的解集为 \emptyset .

若判别式 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时:

先令 $ax^2 + bx + c = 0$, 求出两根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

不等式(1)的解集为 $\{x | x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$.

不等式(2)的解集为 $\{x | x_1 < x < x_2\}$.

(二) 简易逻辑

1. 逻辑联结词.



可以判断真假的语句叫**命题**.常用小写的拉丁字母 p, q, r, s, \dots 来表示命题.

逻辑联结词:“或”、“且”、“非”这些词叫逻辑联结词.

简单命题:不含逻辑联结词的命题叫简单命题.

复合命题:由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题,复合命题的构成形式常常是:

p 或 q ;

p 且 q ;

非 p (也叫命题 p 的否定).

表示命题真假的表叫**真值表**.

非 p 形式复合命题的真值表为:

p	非 p
真	假
假	真

p 且 q 形式复合命题真值表为:

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

p 或 q 形式复合命题的真值表为:

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

2. 四种命题.

互逆命题:两个命题中,如果第一个命题的条件是第二个命题的结论,且第一个命题的结论是第二个命题的条件,那么这两个命题叫做互逆命题;如果把其中一个命题叫原命题,那么另一个叫原命题的逆命题.

互否命题:一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定,这样的两个命题叫做互否命题.把其中一个叫原命题,另一个就叫原命题的否命题.

互为逆否命题:一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定,这样的两个命题叫做互为逆否命题,把其中的一个命题叫做原命题,另一个命题叫做原命题的逆否命题.



一般用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题形式是:

原命题 若 p 则 q ;

逆命题 若 q 则 p ;

否命题 若 $\neg p$ 则 $\neg q$;

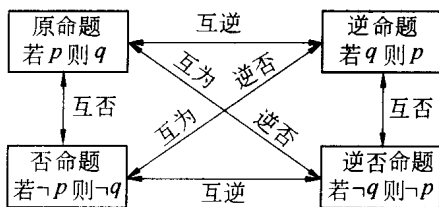
逆否命题 若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

四种命题的关系如下图所示:

注意: 一个命题与它的逆否命题是等价的.

一般地,一个命题的真假与其他三个命题的真假的关系是:

- (1) 原命题为真,它的逆命题不一定为真.
- (2) 原命题为真,它的否命题不一定为真.
- (3) 原命题为真,它的逆否命题一定为真.



3. 反证法证明问题的步骤:

- (1) 假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;
- (2) 从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾;
- (3) 由矛盾判定假设不正确,从而肯定命题的结论.

4. 充分条件与必要条件.

如果已知 $p \Rightarrow q$,那么我们说 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

如果既有 $p \Rightarrow q$,又有 $q \Rightarrow p$,即 $p \Leftrightarrow q$,这时就说 p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件.

三、学法指导

(一) 集合

集合概念及其基本理论是现代数学的一个重要基础,许多数学分支都建立在集合理论的基础上.掌握集合的初步知识,可以加深对初等数学中一些概念的理解,对一些概念的表述可以更加清楚、明确,它所反映的数学思想,在越来越广泛的领域中得到应用,也为学习近代数学准备必要条件.

1. 分析集合中元素的特征是解决集合问题的核心.

某些指定的对象集在一起就成为一个集合,这些元素具有共同属性.在研究集合问题时,一定要先搞清楚元素的特征,是数集、点集还是某些图形,然后再找到解题途径.

例如,集合 $M = \{3, 4\}$,集合 $N = \{(3, 4)\}$,其中集合 M 是由 2 个数字 3 和 4 所组成的两元素集,集合 N 是由坐标平面上的一个点 $(3, 4)$ 所组成的单元素集, M 是数集, N 是点集.

例如,集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0, x \in \mathbf{R}\}$,表示不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集;而集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$,表示方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解集;集合 $C = \{y | y = x^2 - 2x - 3, x \in \mathbf{R}\}$ 表示函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的值域所组成的集合; $D = \{(x, y) | y = x^2 - 2x - 3, x, y \in \mathbf{R}\}$,则表示在直角坐标平面上抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上的点的集合.可以看出集合 A 、 C 虽然都是数集,但元素的属性不同,集合 A 中的元素是满足函数 $y = x^2 - 2x - 3 < 0$ 的自变量取值范围,而集合 C 中的元素是满足函数 $y = x^2 - 2x - 3 < 0$ 的值域,而集合 D 则是点集.



所以,在研究集合问题时,要先观察集合中元素的对象是什么,以免发生错误.

2. 集合中的元素具有三个特性.

确定性: 对于一个给定的集合,任何一个对象都能确定它是不是这个集合的一个元素.

互异性: 同一集合中的任何两个元素都是不同的对象,相同的对象归入任何一个集合时,只能作为这个集合的一个元素.

无序性: 在一个集合里不考虑元素之间的顺序.

这三个性质描述了集合的本质特征,在理解集合的概念时,要考虑集合中元素的特性.

例 1 已知数集 $A = \{3x, x^2 - 2x\}$, 求实数 x 的取值范围.

解: 由于数集 A 中有两个元素 $3x, x^2 - 2x$, 所以 $3x \neq x^2 - 2x$, 即 $x^2 - 5x \neq 0, x \neq 0$ 且 $x \neq 5$, 所以实数 x 的取值范围是 $x \neq 0$ 且 $x \neq 5$.

注意: 这里是运用了集合中元素的互异性.

例 2 集合 $A = \{x^2, -4, 2x - 1\}, B = \{1 - x, 9, x - 5\}$, 若 $A \cap B = \{9\}$, 求 x 的值.

解: 由 $A \cap B = \{9\}$, 得集合 A 中 $x^2 = 9$ 或 $2x - 1 = 9$, 解得 $x = \pm 3$ 或 $x = 5$.

当 $x = 3$ 时, $A = \{9, -4, 5\}, B = \{-2, 9, -2\}$, 由集合的互异性, 所以 $x = 3$ 应舍去.

当 $x = -3$ 时, $A = \{9, -4, -7\}, B = \{4, 9, -8\}$, 符合题意, 所以 $x = -3$.

当 $x = 5$ 时, $A = \{-4, 9, 25\}, B = \{0, -4, 9\}$ 与已知 $A \cap B = \{9\}$ 相矛盾, 所以 $x = 5$ 舍去. 所以 $x = -3$ 为所求.

注意: 在解决含有参数的数集时, 要考虑集合中元素的特性, 另外, 要将求得的值代回原集合中进行检验, 将不合题意的舍去.

3. 要正确使用集合的表示方法.

例如, 求方程组 $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ 的解集.

分析: 这个方程组有惟一解 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, 所以这个方程组的解集是单元素集 $\{(1, -1)\}$. 如果把 这个解集写成 $\{x = 1, y = -1\}$ 或 $\{1, -1\}$ 或 $\{(x, y) | x = 1 \text{ 或 } y = -1\}$ 都是错误的, 其中 $\{(x, y) | x = 1 \text{ 或 } y = -1\}$ 表示的是一个无限集, 它表示 $(1, y)$ 或 $(x, -1)$ 的无数点集, 其中 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$.

4. 空集是任何集合的子集. 忽略了空集的作用, 会造成解题的疏漏, 以至造成错误.

例 3 已知集合 $M = \{x | x^2 - (k - 4)x + 4 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $M \subseteq \mathbf{R}^+$, 求实数 k 的取值范围.

分析: 由 $M \subseteq \mathbf{R}^+$ 知, 集合 M 是由方程 $x^2 - (k - 4)x + 4 = 0$ 的两个正根组成, 实数 k 应满足的不等式组:

$$\begin{cases} \Delta = (k - 4)^2 - 16 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = k - 4 > 0 \\ x_1 x_2 = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq 8$$

但是, 这里最容易忽略空集是任何集合的子集, 也就是集合 M 可以为 \emptyset , 所以由 $\Delta < 0$, 得 $0 < k < 8$, 故 k 的取值范围应是 $k > 0$.

例 4 已知 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\}, B = \{x | k + 1 \leq x \leq 2k - 1\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 k 的取值范围.

解: (1) 若 $B = \emptyset$ 时, $2k - 1 < k + 1, \therefore k < 2$.



(2) 当 $B \neq \emptyset$ 时, $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$,

当 $A \cap B = \emptyset$ 时, 有 $\begin{cases} 2k-1 < -2 \\ k+1 > 5 \end{cases} \Rightarrow k < -\frac{1}{2} \text{ 或 } k > 4$

综上, k 的范围是 $k < 2$ 或 $k > 4$.

注意: 不要遗漏 $A \cap B = \emptyset$, 因为空集是任何集合的子集, 应考虑 B 为 \emptyset 的可能性, 而学习者往往忽略 B 集合为空集的情况而造成错误.

5. 研究集合与集合之间的关系, 应先从概念入手, 对两个集合中的元素进行分析, 它们是否具有相同的属性, 它们元素的个数与范围, 甚至可用列举法一一列举, 寻找它们之间的共性与差异, 找出解题方法, 也可以采用韦恩图, 从而确定集合之间的关系.

例 5 已知集合 $A = \{0, 5\}$, $B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in \mathbf{N}^*\}$, $C = \{x | x \subseteq A\}$, 判断集合 A 、 B 、 C 的关系.

分析: 集合 B 中的元素是属于集合 A , 且是正整数, 因此可以确定集合 B 是单元素集为 $\{5\}$, 集合 C 中的元素是集合 A 的子集, 可能是 \emptyset , $\{0\}$, $\{5\}$, $\{0, 5\}$. 所以 $C = \{\emptyset, \{0\}, \{5\}, \{0, 5\}\}$. 所以 $B \subset A$, $A \in C$, $B \in C$.

特别注意, 元素与集合, 集合与集合之间的关系是相对的, 集合中的元素可以由集合组成. 所以集合 A 、 B 与集合 C 的关系分别为属于关系.

例 6 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, 且 $\complement_U A \cap B = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\complement_U A \cap \complement_U B = \{4, 6, 8, 10\}$, 求集合 A 和 B .

解: 利用韦恩图, 集合 A 、 B 将全集分为 (a)、(b)、(c)、(d) 四个部分, 如图 1-1.

由题意, $\complement_U A \cap B = \{1, 9\}$, 所以 (d) 中含 1, 9, 又 $A \cap B = \{2\}$, 所以 (c) 中含 2, 又 $\complement_U A \cap \complement_U B = \{4, 6, 8, 10\}$ 得 (a) 中含 4, 6, 8, 10, 全集 U 中只剩下 3, 5, 7 在 (b) 中, 所以 $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 9\}$.

另解: 由题意 $\complement_U A \cap B = \{1, 9\}$, 所以 $1, 9 \notin A$, $1, 9 \in B$; 由 $A \cap B = \{2\}$, 所以 $2 \in A$, $2 \in B$; 由 $\complement_U A \cap \complement_U B = \{4, 6, 8, 10\}$, 得 $4, 6, 8, 10 \notin A$, $4, 6, 8, 10 \notin B$; 只须考虑 3, 5, 7 是否属于 A 、 B .

假设 $3 \in B$, 因 $3 \notin A \cap B$ 故 $3 \notin A$, 故有 $3 \in \complement_U A$, 所以 $3 \in \complement_U A \cap B$, 但这与 $\complement_U A \cap B = \{1, 9\}$ 相矛盾, 所以 $3 \notin B$, $3 \in \complement_U B$; 又因为 $3 \notin \complement_U A \cap \complement_U B$, 所以 $3 \notin \complement_U A$, 有 $3 \in A$. 同理可得 $5 \in A$, $5 \notin B$, $7 \in A$, $7 \notin B$.

故 $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 9\}$.

可以看出, 利用韦恩图分析解题直观, 清楚.

6. 集合与集合间的运算问题常与方程、方程组、函数、不等式等知识联系, 要注意各类知识之间的相互转化及内在联系.

例 7 已知全集 U , 集合 $A = \{x | f(x) = 0\}$, $B = \{x | g(x) = 0\}$, $C = \{x | h(x) = 0\}$, 那么方程 $\frac{f^2(x) + g^2(x)}{h(x)} = 0$ 的解集是 ().

A. $A \cap B \cap C$

B. $A \cap B$

C. $A \cap B \cap \complement_U C$

D. $A \cap B \cup C$

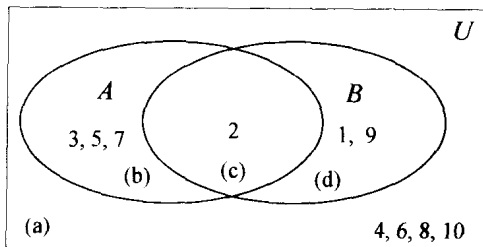


图 1-1



分析:由 $f^2(x) + g^2(x) = 0$, 得 $f(x) = 0$, 且 $g(x) = 0$, 又 $h(x) \neq 0$, 可得方程组

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0. \text{ 满足 } h(x) \neq 0 \text{ 的解集应是 } C \cup C; \text{ 又, 满足 } f(x) = 0 \text{ 且 } g(x) = 0 \text{ 的解集是 } A \cap B; \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$$

这样应选择 C.

例 8 若关于 x 的方程 $x^2 - \left(a - \frac{5}{6}\right)x + \frac{1}{16} = 0$, $x^2 - (a-1)x + a^2 = 0$, $4x^2 - 4ax + \frac{4}{3}x + 1 = 0$ 中至少有一个方程有实根, 求实数 a 的取值范围.

分析:一元二次方程有实数根的条件是 $\Delta \geq 0$ 总成立, 至少的含意是可能三个方程均有实根, 也可能两个方程有实根, 也可能只有一个方程有实根, 设这三个方程中至少有一个方程有实根的 a 的取值的范围分别为集合 A 、 B 、 C , 满足条件的 a 的取值应是 $A \cup B \cup C$. 如果用逆向思维考虑问题, 可以求出使这三个方程均无实根的 a 的取值范围的集合, 再求它的补集.

解法一:若方程 $x^2 - \left(a - \frac{5}{6}\right)x + \frac{1}{16} = 0$ 有实根, 则 $\Delta = \left(a - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0$ 成立, 解得 $a \leq \frac{1}{3}$ 或 $a \geq \frac{4}{3}$, $\therefore A = \left\{a \mid a \leq \frac{1}{3}, \text{ 或 } a \geq \frac{4}{3}\right\}$.

若方程 $x^2 + x - ax + a^2 = 0$ 有实根, 则 $\Delta = (a-1)^2 - 4a^2 \geq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{3}$, $\therefore B = \left\{a \mid -1 \leq a \leq \frac{1}{3}\right\}$.

若方程 $4x^2 - \left(4a - \frac{4}{3}\right)x + 1 = 0$ 有实根, 则 $\Delta = \left(4a - \frac{4}{3}\right)^2 - 16 \geq 0$, 解得 $a \leq -\frac{2}{3}$ 或 $a \geq \frac{4}{3}$, $\therefore C = \left\{a \mid a \leq -\frac{2}{3}, \text{ 或 } a \geq \frac{4}{3}\right\}$.

\therefore 满足题意的 a 的取值范围应是

$$A \cup B \cup C = \left\{a \mid a \leq \frac{1}{3}, \text{ 或 } a \geq \frac{4}{3}\right\}.$$

解法二:由题意,若此三个方程均无实根则满足

$$\begin{cases} \Delta_1 = \left(a - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0 & \left\{\frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}\right. \\ \Delta_2 = (a-1)^2 - 4a^2 < 0 & \Rightarrow \left\{a < -1 \text{ 或 } a > \frac{1}{3}\right. \\ \Delta_3 = \left(4a - \frac{4}{3}\right)^2 - 16 < 0 & \left\{-\frac{2}{3} < a < \frac{4}{3}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$$

\therefore 满足题意的 a 的取值范围应是: $\left\{a \mid a \leq \frac{1}{3}, \text{ 或 } a \geq \frac{4}{3}\right\}$.

例 9 设 $A = \{x \mid x^3 - 2x^2 + 2x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + px + q < 0\}$, 若 $A \cup B = \{x \mid x + 2 > 0\}$, $A \cap B = \{x \mid 0 < x < 3\}$, 求 p, q 的值.

分析:集合 A 由给定的不等式, 可得到确定的解集. $x^3 - 2x^2 + 2x = x(x^2 - 2x + 2) = x[(x$

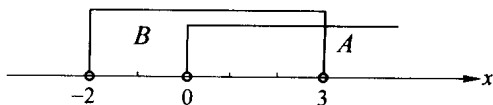


图 1-2



$-1)^2+1]>0$, 得 $x>0$, 故 $A=\{x|x>0\}$. 集合 B 由含两个参数的二次不等式的解构成, 欲想确定 p, q 之值必须有两个独立的条件, 自然应从 $A \cup B$ 及 $A \cap B$ 去找. $A \cup B = \{x|x>-2\}$, $A \cap B = \{x|0<x<3\}$, 在数轴上将集合 A 画出, 而集合 B 的区间应由 $x^2+px+q=0$ 的两个根(设为 a, b , 令 $a<b$)而定, 而此两根可确定 p, q 之值.

由 $A \cup B = \{x|x>-2\}$, 得 $a = -2$;

由 $A \cap B = \{x|0<x<3\}$, 得 $b = 3$.

由韦达定理得出:

$$p = -(a+b) = -1,$$

$$q = ab = -6.$$

7. 在解含绝对值不等式 $|ax+b|>c$ 或 $|ax+b|<c$ ($c>0$) 时, 若 x 的系数 a 为负数时, 可利用相反数的绝对值相等, 将 a 化成正数, 可减少计算中的错误.

例 10 解含 x 的不等式 $|3a-2x|<b$ ($b>0$).

解: 由于 $|3a-2x| = |2x-3a| < b$ ($b>0$),

所以 $-b < 2x-3a < b$, 得

$$3a-b < 2x < 3a+b,$$

$$\frac{3a-b}{2} < x < \frac{3a+b}{2}.$$

所以, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{3a-b}{2} < x < \frac{3a+b}{2} (b>0)\right\}$.

8. 解 $|x|>a$ 或 $|x|<a$ ($a>0$) 时, 不要和含绝对值的方程 $|x|=a$, 得 $x=\pm a$ 相混淆, 切不可得 $x>\pm a$ 或 $x<\pm a$. 而应该从绝对值概念的几何意义上理解, 即 $|x|>a$ 表示在数轴上到原点的距离大于 a 的所有点所表示数的集合, $|x|<a$ 表示在数轴上到原点的距离小于 a 的所有点所表示数的集合.

例 11 解不等式: $|-x^2+2x-2| < |2x-1|$.

分析: 这里有两个绝对值符号, 左边是二次式, 右边是一次式, 只有把两个绝对值符号都去掉, 才能转化成二次不等式. 由于 $-x^2+2x-2$ 的判别式 $\Delta=4-8<0$, 所以对一切实数, 总有 $-x^2+2x-2<0$ 成立, 这样原不等式可变形为 $x^2-2x+2 < |2x-1|$. 脱去 $|2x-1|$ 绝对值符号的关键点是 $x=\frac{1}{2}$, 当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $2x-1=0$; $x>\frac{1}{2}$ 时, $2x-1>0$; $x<\frac{1}{2}$ 时, $2x-1<0$, 所以这个不等式等价于下面两个不等式组:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+2 < 2x-1 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} 2x-1 < 0 \\ x^2-2x+2 < -2x+1 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

解这两个不等式组:

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 得 } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 1 < x < 3 \end{cases}, \text{ 有 } 1 < x < 3;$$

$$\text{由 } \textcircled{2} \text{ 得 } \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ \emptyset \end{cases}, \text{ 所以为 } \emptyset.$$

此不等式的解集为 $\{x|1 < x < 3\}$.

由此可知, 解绝对值不等式的关键是去掉绝对值符号, 去掉的关键是确定它的符号, 如果