高等职业教育人才培养创新教材出版工程

高职高专基础课教材系列

高等数学（全一册）

王声望　编著

Mathematics

科学出版社
www.sciencep.com

● 高等职业教育人才培养创新教材出版工程

高职高专基础课教材系列

高等数学

(全一册)

王声望　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是作者数次在美国及国内讲授微积分课程的讲稿的基础上编写而成的,在编写过程中吸取了国内外一些优秀微积分学教材的优点,有些部分按照国际上当前通行的方法处理.

本书用不多的篇幅将微积分学的基本内容做了系统、详细且较通俗的阐述,同时力求严谨且保持理论的正确性.引入概念从实际背景出发,然后概括成抽象的概念,以便学生学习.还配备了比较丰富的习题,以供选用.本书共分12章,主要内容包括数列、函数以及它们的极限,一元函数的微分学、积分学以及它们的应用,二元函数的微分学、积分学以及它们的应用,此外还包括无穷级数及常微分方程.

本书可供高职高专及部分应用型本科一年级学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(全一册)/王声望编著.—北京:科学出版社,2004
高等职业教育人才培养创新教材出版工程,高职高专基础课教材系列
ISBN 7-03-013014-6

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第022288号

责任编辑:杨 波 姚莉丽/责任校对:刘小梅
责任印制:安春生/封面设计:王凌波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年6月第一版 开本:B5(720×1000)
2004年6月第一次印刷 印张:33 1/4
印数:1—4 000 字数:637 000

定价:36.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《高等职业教育人才培养创新教材》出版工程说明

一、特色与创新

随着高等教育改革的进一步深化，我国高等职业教育事业迅速发展，办学规模不断扩大，办学思路日益明确，办学形式日趋多样化，取得了显著的办学效益和社会效益.

毋庸置疑，目前已经出版的一批高等职业教育教材在主导教学方向、稳定教学秩序、提高教学质量方面起到了很好的作用. 但是，有关专家也诚恳地指出，目前高等职业教育教材出版中还存在一些问题，主要是：教材建设仍然是以学校的选择为依据、以方便教师授课为标准、以理论知识为主体、以单一纸质材料为教学内容的承载方式，没有从根本上体现以应用性职业岗位需求为中心，以素质教育、创新教育为基础，以学生能力培养为本位的教育观念.

经过细致的调研，科学出版社和中国高等职业技术教育研究会共同启动了“高等职业教育人才培养创新教材出版工程”. 在教材出版过程中，力求突出以下特色：

(1) 理念创新：秉承“教学改革与学科创新引路，科技进步与教材创新同步”的理念，根据新时代对高等职业教育人才的需求，策划出版一系列体现教学改革最新理念，内容领先、思路创新、突出实训、成系配套的高职高专教材.

(2) 方法创新：摒弃“借用教材、压缩内容”的滞后方法，专门开发符合高职特点的“对口教材”. 在对职业岗位（群）所需的专业知识和专项能力进行科学分析的基础上，引进国外先进的课程开发方法，以确保符合职业教育的特色.

(3) 特色创新：加大实训教材的开发力度，填补空白，突出热点，积极开发紧缺专业、热门专业的教材. 对于部分教材，提供“课件”、“教学资源支持库”等立体化的教学支持，方便教师教学与学生学习. 对于部分专业，组织编写“双证教材”，注意将教材内容与职业资格、技能证书进行衔接.

(4) 内容创新：在教材的编写过程中，力求反映知识更新和科技发展的最新动态. 将新知识、新技术、新内容、新工艺、新案例及时反映到教材中来，更能体现高职教育专业设置紧密联系生产、建设、服务、管理一线的实际要求.

二、精品与奉献

“高等职业教育人才培养创新教材出版工程”的启动，得到了教育部高等教育司高职高专处领导的认可，吸引了一批职业教育和高等教育领域的权威专家积极参与，共同打造精品教材. 其实施的过程可以总结为：教育部门支持、权威专家指导、一流学校参与、学术研究推动.

国内的高等职业教育院校特别是北京联合大学、天津职业大学以及中国高等职业技术教育研究会的其他副会长、常务理事、理事单位等积极参加本教材出版工程，提供了先进的教学经验，在此基础上出版一大批特色教材.

在教材的编写过程中，得到了许多行业部委、行业协会的支持，对教材的推广起到促进作用.

先进的理念、科学的方法、有力的支持，必然导致精品的诞生. “高等职业教育人才培养创新教材出版工程”主要包括高职高专层次的基础课、公共课教材；各类紧缺专业、热门专业教材；实训教材、引进教材等特色教材；还包含部分应用型本科层次的教材. 根据我们的规划，下列教材即将与读者见面：

（一）高职高专基础课、公共课教材

(1) 基础课教材系列

(2) 公共选修课教材系列

（二）高职高专专业课教材

(1) 紧缺专业教材

——软件类专业系列教材

——数控技术类专业教材

——汽车类专业教材

——……

(2) 热门专业教材

——电子信息类专业教材

——交通运输类专业教材

——财经类专业教材

——旅游类专业教材

——生物技术类专业教材

——食品类专业教材

——精细化工类专业教材

——广告类专业教材

——艺术设计类专业教材

——……

（三）高职高专特色教材

——高职高专院校实训教材

——国外职业教育优秀教材

——……

（四）应用型本科教材系列

……

欢迎广大教师、学生在使用中提出宝贵意见，以便我们改进教材出版工作、提高质量.

中国高等职业技术教育研究会

科学出版社

前　　言

本书是根据作者在美国数所大学多次讲授微积分学以及在国内南京大学、三江学院讲授微积分学的讲稿基础上编写而成的．在编写过程中除应用了这些讲稿外还参考了国内外的一些优秀教材．国外的如国际著名学府哈佛大学的现行教材，国内的如南京大学、北京大学、清华大学、同济大学等校编写的教材．

本书可供高职高专以及部分应用型本科专业作为教材或教学参考书．我国目前除本科微积分学有完整的教学大纲外，尚无统一的高职高专的微积分学教学大纲，因此编写时还参考了教育部考试中心编写的《高等数学（一）考试参考书》（中国广播电视大学出版社，2000 年）中的主要内容．由于需要考虑部分应用型本科专业，因此本书内容包括了一元函数微积分学、空间解析几何（含向量代数）、多元函数微积分学（微分学部分以二元为主，积分学部分以二重积分、平面线积分为主）以及无穷级数、常微分方程．其中标有“ * ”及“ * * ”的内容主要为部分本科专业所写．

为了与国际接轨，本书不少内容采用了当前国际上通行的处理方法，如函数的表示法、曲线凹凸性的定义以及微积分学基本定理等．至于数列及函数的极限，国际上（主要是美国）相当一部分大学对本科学生只描述性地讲授，部分大学即使讲授“ε-δ 语言”，也只要求学生大致懂得其含义，不作过多或过高要求．作者在美国几所大学讲授微积分学时，也采用了同样的方法，深感行之有效．但考虑到中国的实际情况，作为一种尝试，作者在编写数列与函数的极限时，先分别采用描述性的方法，然后分别采用严格的方法，而且相互独立，自成系统．分别编写的原因之一是数列虽是函数的特例，但两者也有不同的一面．本书每一节都附有小结，扼要地说明本节的主要内容、方法与思想，并提请读者应当注意的若干事项．每一节后面还附有相当数量的习题，其中少部分有一定的难度，仅供读者学习时参考．

对于两年制的高职高专，不必讲授标有“ * ”及“ * * ”的部分，因此，100 学时左右可以授完其余全部内容．对于三年制的高职高专，则不必讲授标有“ * * ”的部分，这样约 140～150 学时可以授完其余全部内容（包括“ * ”部分），对于部分应用型本科专业，约 180 学时可授完本书的全部内容（包括“ * ”及“ * * ”部分）．

在撰写本书的过程中，始终得到三江学院各级领导的大力支持与帮助．作者对此表示衷心感谢．本书初稿完成后，承南京大学林成森教授、三江学院许品

芳、欧景昭教授，东南大学吴学澄、孙家乐教授，南京工业大学金炳陶、徐发祺教授，南京林业大学张承忍、刘宗杰、张文濡教授，南京工程学院王道勇教授，解放军理工大学吕荣庆教授以及蚌埠汽车管理学院许依群教授认真审阅. 他们的审阅使本书大为增色，作者对以上多位资深教授为此付出的辛勤劳动也表示衷心感谢. 此外，三江学院获芳老师为本书的全部习题提供了答案，作者对她的辛勤劳动同样表示衷心感谢.

由于作者水平有限，本教材定有许多不当与疏漏之处，恳切希望使用者批评指正.

三江学院教授　王声望

2003 年春于南京

目　录

第 1 章　函数的基本概念

微积分学是高等数学的基础之一,也是高等数学的重要组成部分.微积分学主要研究变量之间的相互依从关系以及由此导出的一系列新课题,因此人们常常将它简称为“变量的数学”.

本书研究的主要课题是微积分学的一些基本内容,其中包括函数的微分学,积分学以及它们的应用,此外还包括常微分方程以及级数.因此本书研究的主要对象是函数(包括数列),而研究的主要内容则如上所述,至于研究这些内容的理论基础则是几类不同的极限.

这一章的目的是介绍函数的基本概念,几类常见的函数以及初等函数等,其中大部分内容在中学数学中已讲授过,因此这一章所起的作用是复习、整理与提高.

1.1　变量与函数

这一节的目的是引进函数的基本概念,为此先介绍几个与此相关的名称,如集合、区间、常量、变量等等.

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个原始概念,不能定义只能描述.一般说,具有某种共同特性的一些事物之全体称为**集合**.例如:“某大学一年级学生的集合”,“有理数集合”,“无理数集合”等等.集合又简称为**集**.一个集合中的事物称为这个集合的**元素**.

集合常用大写拉丁字母如 $A,B,C,\cdots$ 表示.集合中的元素常用小写拉丁字母如 $a,b,c,x,y,\cdots$ 表示.如果 a 是集合 A 的元素,则记为 $a\in A$,读作 a 属于 A.如果 a 不是集合 A 的元素,则记为 $a\notin A$,读作 a 不属于 A.一个事物 a 与一个集合 A 之间的关系只有以下两种:或者 a 属于 A,或者 a 不属于 A,二者必居其一.

集合不能是它自己的元素.这是集合应当服从的一条公理.

表示集合通常有两种方法.一种方法是描述法:它的特点是通过强调集合中元素的共同特性来表示这个集合.例如 $\mathbf{R}$ 是全体实数构成的集合,我们将它表示成 $\mathbf{R}=\{x\mid x$ 为实数$\}$.又如,M 是满足不等式 $1<x<2$ 的全体实数 x 构成的集合,则可以将它表示成 $M=\{x\mid 1<x<2\}$.另一种方法是列举法:它的特点是列出集合

中的全部元素.例如,介于 1 与 10 之间的正整数构成的集合可以表示成$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

设 A,B 是两个给定的集合,如果 A 中的任何一个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,分别读作 A 包含于 B 或 B 包含了 A.如果 A 是 B 的子集且 B 中有元素不属于 A,则称 A 是 B 的**真子集**,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

只含有限多个元素的集合称为**有限集**.例如 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 便是一个有限集.任何有限集均可用列举法来表示.含有无穷多个元素的集合称为**无穷集**或**无限集**.不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$.空集是任何集合的子集.

2. 集合的运算

设 A,B 为两个给定的集合.现在引进以下几个运算.

并集.由集 A 或集 B 中的元素构成的集合称为集 A 与集 B 的**并集**,记为 $A\cup B$.

交集.由既属于集 A 也属于集 B 的元素构成的集合称为集 A 与集 B 的**交集**,记为 $A\cap B$.

余集.由属于集 A 但不属于集 B 的元素构成的集合称为集 B 在集 A 中的**余集**,记为 $A\setminus B$.

图 1.1.1 中阴影部分所表示的分别是两个集合的并集、交集以及余集的示意图.

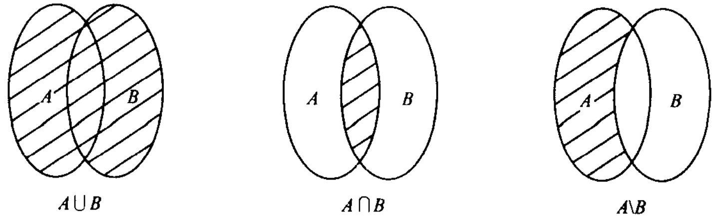

图 1.1.1

3. 实数集

前面已经提到,本书研究的主要对象是函数.实际上,这里所说的函数主要在实数范围内考虑,因此我们先复习一下实数集.正负整数、正负分数以及零统称为**有理数**.有理数可以表示成$\frac{m}{n}$,其中 m,n 均为整数,$n\neq 0$,且设 m 与 n 没有公因子.除了有理数还有无理数.例如,一直角三角形的两股之长均为 1 时,斜边之长为$\sqrt{2}$.$\sqrt{2}$不能表示成两个整数之商,称它为**无理数**.又如$\sqrt{3}$,π 等等,都是无理数.全

部有理数与无理数构成的集合称为**实数集**或**实数系**.实数集常用 $\mathbf{R}$ 表示.

实数集具有以下几个性质.

(i) 任意两个实数在进行有限次加、减、乘以及除(除数不等于零)运算后,所得结果仍为实数.即实数集对于加、减、乘以及除(除数不等于零)四则运算是封闭的.

(ii) 实数集是有序的,即对任何 $a,b\in\mathbf{R}$,下面的关系之一必成立:

$$a<b \quad 或 \quad a=b \quad 或 \quad a>b.$$

(iii) 实数集具有阿基米德(Archimedes)性质,即对任何 $a,b\in R$,若 $b>a>0$,则存在正整数,使得 $na>b$.

(iv) 对于任意两个实数 a,b,若 $a<b$,则存在实数 c,使得 $a<c<b$,因而若 $a<b$,则存在无穷多个实数 c 使得 $a<c<b$.

4. 区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且满足 $a<b$.

开区间:数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为**开区间**,记为 (a,b).

闭区间:数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记为 $[a,b]$.

半开区间:数集 $\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$ 及数集 $\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 均称为**半开区间**或**半闭区间**.分别记为 $[a,b)$ 及 $(a,b]$.

对于开区间 (a,b),闭区间 $[a,b]$ 以及半开区间 $[a,b)$ 与 $(a,b]$,a,b 均称为它们的**端点**,并称 a 为**左端点**,b 为**右端点**.

由于 a,b 都是有限数,故以上几类区间又统称为**有限区间**.

除有限区间外,还有无限区间.先介绍三个符号:符号 $+\infty$ 称为正无穷大;符号 $-\infty$ 称为负无穷大,有时我们也需要不带符号的无穷大 ∞.值得注意的是:$+\infty$,$-\infty$ 以及 ∞ 都是符号,而不是数.

无限半开区间:数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\}$ 及数集 $\{x\,|\,x\leqslant b\}$ 均称为**无限半开区间**;分别记为 $[a,+\infty)$ 及 $(-\infty,b]$.

无限开区间:数集 $\{x\,|\,a<x\}$,数集 $\{x\,|\,x<b\}$ 以及数集 $\mathbf{R}$ 均称为**无限开区间**,分别记为 $(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$ 及 $(-\infty,+\infty)$.

无限半开区间以及无限开区间统称为**无限区间**或**无穷区间**.有限区间与无限区间又统称为**区间**.因此以后凡提到区间,系指以上各种区间中之任何一种.

1.1.2 常量与变量

在自然科学、工程技术以及生产实践中,常常会遇到各种不同的量,如时间、距离、温度、长度、面积、体积等等.他们的实际含义虽然不同,但根据它们的特点我们可以将它们归纳成两种情形.一种情形是,在研究某个事物的过程中始终保持定值

的量称为**常量**.第二种情形是,在研究某个事物的过程中,可以取不同值的量称为**变量**.例如自由落体在它下落的过程中,重力加速度是常量,而速度及位移则是变量.

常量与变量是两类不同的量,这只是一方面.另一方面,它们的划分又不是绝对的.同一个量在某种情形下是常量,而在另一种情形下是变量.例如重力加速度,在地球表面某个不大的范围内,它可以看成常量,但如果在很大的范围内,重力加速度就是一个变量了.因此,不区分常量与变量的不同显然不对,但截然将它们分开也是不对的.

在今后的研究中,我们常常将常量看成变量的特殊情况,这样做有时会给我们的研究带来许多方便.通常用小写的拉丁字母如 $a, b, c, \cdots$ 表示常量,用小写的拉丁字母 $x, y, z, \cdots$ 表示变量.

1.1.3　函数概念

1. 几个实例

在自然现象、工程技术、生产实践甚至人们的日常生活中出现的变量往往不止一个而是若干个,它们相互之间总有着这样或者那样的联系,且服从着一定的规律.为了解释这些变量之间的联系与它们所应服从的规律,我们先观察下面的实例.

例 1.1.1(自由落体运动)　一物体在重力作用下自由下落,那么当时刻为 t 时,下落的距离 S 与 t 之间满足下面的关系(见图 1.1.2):

$$S = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度.假定物体着陆的时刻为 $t = T$,那么对于时间区间 $[0, T]$ 上任一给定的时刻,譬如说 t_0,按照上面的关系,路程 S 就有确定的值 $\frac{1}{2}gt_0^2$ 与之对应.

例 1.1.2(圆面积)　记圆的面积为 A,半径为 r,那么 A 与 r 之间满足下面的关系:

$$A = \pi r^2,$$

其中 π 为圆周率,r 为圆的半径.设半径 r 由 0 增加到 10,那么对 r 在区间 $[0,10]$ 上的任意一个值,譬如说 r_0,按照上面的关系,面积 A 就有确定的值 πr_0^2 与之对应.

例 1.1.3　一个地区某一天中气温的变化可以通过气温自动记录仪记录下来.如图 1.1.3 所示,我们得到一条曲线,根据这条曲线,我们可以知道在这一天中任一时刻 t(t 由 0 到 24)的气温.例如当 $t=0$ 时,气温为 10 度;当 $t=13$ 时,气温

为 30 度;而当 $t=24$ 时,气温又降到 10 度.

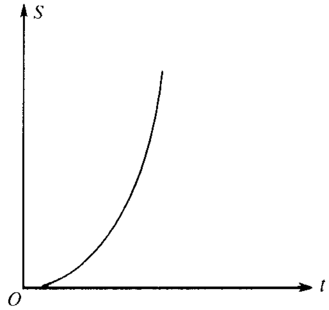

图 1.1.2

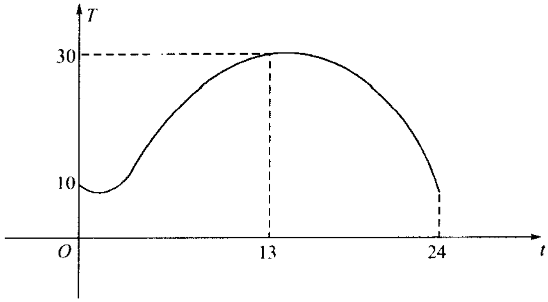

图 1.1.3

例 1.1.4 某君的父母每年在他生日的那一天记录下他的身高. 表 1.1 是某君从 1 周岁到 10 周岁的身高.

表 1.1

年龄/岁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高/米	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.24

由表 1.1 可知某君的身高随着年龄的增长而增高. 例如,想知道他在 6 岁时的身高,只要查表就知道为 0.90 米.

纵观以上四个实例可以看出,尽管它们的实际背景不同,表示的方式也各异,但在数量关系方面却有以下两个共同特点:

第一, 每个实例中都有两个变量,每个变量都有它一定的变化范围;

第二, 其中一个变量与另一个变量之间都有着紧密的联系,这种联系服从着一定的规律.

将以上两个共同特点抽象化并用数学语言表达出来便可引进函数的概念.

2. 函数的定义

定义 1.1.1 设 x,y 为两个给定的变量,并设 x 的变化范围为数集 D. 如果对于 x 在 D 中的每一个值,依照某个规律,变量 y 有惟一确定的值与它对应,那么就称变量 y 是变量 x 的**函数**,记为

$$y = f(x).$$

x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为这个函数的**定义域**,y 相应的变化范围

称为这个函数的**值域**,常用 R 表示.

除了记号 $y=f(x)$ 外,我们有时也用其他记号来表示函数,如 $y=g(x)$,$y=h(x)$ 等等.

关于函数概念,我们提出以下几点注释.

第一,由定义 1.1.1 可知,函数概念有两个重要因素:定义域与对应规律.如果两个函数的定义域与对应规律相同,那么它们就是同一个函数.

第二,每个函数除定义域外,还有值域,它们随着函数的出现而出现,因此它们都不可能是空集.我们讨论过的几个函数,无一不是如此.

第三,我们引进的函数只有一个自变量,故常常称它为**一元函数**,而且对于自变量 x 在定义域 D 中的每一个值,因变量 y 有惟一确定的值与之对应(而不是两个或两个以上的值),故称这样的函数为**单值函数**.在没有特别声明的情况下,以后凡提及函数,均指一元单值函数.

但是有时我们也会遇到多值函数.如果对于自变量 x 的某些值,因变量 y 的对应值不止一个,则称 y 是 x 的**多值函数**(见例 1.1.9).但多值函数基本上不属于本书的研究范围.

函数的定义只有一个,但在这个定义的框架下,函数的情况却是丰富多彩的.再观察下面的实例.

例 1.1.5　(a) $y=x^2$.根据定义 1.1.1,y 显然是 x 的函数.它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=[0,+\infty)$.它的图形称为抛物线(见图 1.1.4).

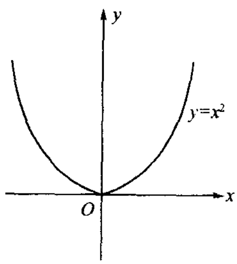

图 1.1.4

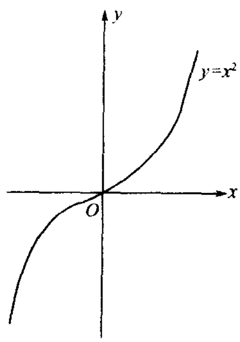

图 1.1.5

(b) $y=x^3$.根据定义 1.1.1,y 显然是 x 的函数.它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=(-\infty,+\infty)$.它的图形称为立方抛物线(见图 1.1.5).

(c) $y=\frac{1}{x}$.仍旧根据定义 1.1.1,y 是 x 的函数.由于 0 不能作为分母,所以它的定义域 D 是除去 0 以外的一切实数构成的集合,即 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.