三十七年最新版

大学入門

第一集

数学

浣溪学社主编

民國三十七年新編

大學入門

編 郭 胡 欽

浣溪學社主編

中華民國三十七年六月初版

大學入門

第一集　數學之部

實價國幣二十七萬五仟元

主編者　浣溪學社學術組

出版者　浣溪學社出版委員會
杭州浙江大學轉

印刷者　當代出版社印刷廠
杭州謝麻子巷六號

經售處　全國各大書局

民國三十六年全國各大學新生入學試題解答

數學之部

國立浙江大學

(1) 甲　組

1. 設$(a-1)(b-1)>0$; a, b, θ 皆爲實數，求

$$\frac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$$

之最小值。

解：$$\frac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{[(1+\cos\theta)+(a-1)][(1+\cos\theta)+(b-1)]}{1+\cos\theta}$$

$$=(1+\cos\theta)+\frac{(a-1)(b-1)}{1+\cos\theta}+(a+b-2)$$

記 $1+\cos\theta=x$,　∵ $a+b-2$ 爲常數，故本題僅需求得

(1)　$K=x+\dfrac{(a-1)(b-1)}{x}$

之最小值即可。

由 (1)，得

$$x^2-Kx+(a-1)(b-1)=0$$

解 x, 得

(2)　$x=\dfrac{K\pm\sqrt{K^2-4(a-1)(b-1)}}{2}$

∵ $1+\cos\theta\geqq0$,　$(a-1)(b-1)>0$,　∴ $K>0$,

又由(2)，∵ $x\geqq0$, 得

(3)　$K\geqq2\sqrt{(a-1)(b-1)}$

當 $K=2\sqrt{(a-1)(b-1)}$, $x=1+\cos\theta=\sqrt{(a-1)(b-1)}\leqq 2$.

玆分二情形討論之。

(i) 當 $(a-1)(b-1)\leqq 4$時，

K之極小值爲 $2\sqrt{(a-1)(b-1)}$

(ii) 當 $(a-1)(b-1)>4$時，

如 $K=2\sqrt{(a-1)(b-1)}$　　則 $x=1+\cos\theta=\frac{K}{2}>2$,

此爲不可能，故$K>2\sqrt{(a-1)(b-1)}$，且(2)中應取作負號，即

$$x=\frac{K-\sqrt{K^2-4(a-1)(b-1)}}{2}\leqq 2,$$

$\sqrt{K^2-4(a-1)(b-1)}\geqq K-4$,

平方之，$K^2-4(a-1)(b-1)\geqq K^2-8K+16$,

$\therefore$ (4)　$K\geqq 2+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$

此時K之極小值爲 $2+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$

〔其實 $2+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)>2\sqrt{(a-1)(b-1)}$.〕

綜合上述結果得

(a) 當 $(a-1)(b-1)\leqq 4$ 時

$\frac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$之最小值爲$a+b-2+2\sqrt{(a-1)(b-1)}$.

(b) 當 $(a-1)(b-1)>4$ 時

$\frac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$之最小值爲

$a+b-2+2+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)$.

2. 問級數

$$1-\frac{x}{\sqrt{1}}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}-\cdots$$

何時收斂?

解：此級數除首項外，其普通項爲

$$(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}=a_n x^n,\qquad n=1,2,\cdots$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1,$$

$$\because \left| x \right| < 1,\ \text{級數收斂。}$$

又當 $x=1$，級數爲交項級數，後項係數之絕對值小於前項係數之絕對值，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

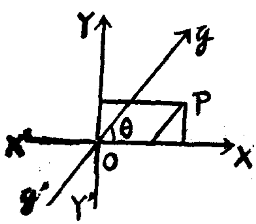
∴級數收斂。

但當 $x=-1$，級數 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$ 爲發散

∴ $-1 < x \leqq 1$ 時，級數收斂。

3. 設二斜交軸x及y之交角爲θ；作一圓使通過x軸上之二定點（$a^2,0$）（$b^2,0$）且與軸y相切，求此圓之方程式。

解：



設直角座標軸XX'，YY'，

斜交座標軸xx'≡XX'，yy'.

設任一點P之直角座標爲（X，Y）斜交座標爲（x，y）

則其間之關係如下：

$$(1)\ \begin{cases} X = x + y\ \mathrm{Cos}\,\theta \\ Y = y\ \sin\theta \end{cases}$$

在直角座標下，圓方程式爲

$$X^2+Y^2+D_1X+E_1Y+F_1=0,$$

用（1）代入，簡化之，得

$$x^2+y^2+2\,\mathrm{Cos}\,\theta\ xy+D_1\ x+(D_1\ \mathrm{Cos}\,\theta+E_1\ \mathrm{Sin}\,\theta)y+F_1=0,$$

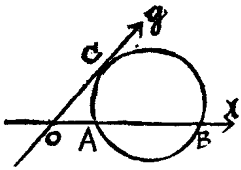
記 $D=D_1$，$E=D_1\ \mathrm{Cos}\,\theta+E_1\ \mathrm{Sin}\,\theta$，$F=F_1$，

得在斜交座標下，圓之方程式爲

$$(2)\quad x^2+y^2+2\,\mathrm{Cos}\,\theta\ x\,y+D\,x+E\,y+F=0,$$

其中 D, E, F 爲任意常數。

今解本題



設此圓在y軸上切點C之座標爲 $(0,k)$

即 $k=\overline{OC}$，

由平面幾何定理，知

$\overline{OC}^2=\overline{OA}\cdot\overline{OB}$，　$\therefore\ k^2=a^2b^2.$

$k=\pm ab.$

故有二圓滿足所設條件，設爲 C_1，C_2.

C_1 通過 $(a^2,0)$，$(b^2,0)$，$(0,ab)$　　(3)

C_2 通過 $(a^2,0)$，$(b^2,0)$，$(0,-ab)$　　(4)

將(3)代入(2)，消去 D, E, F 即得 C_1 之方程式

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+2xy\operatorname{Cos}\theta & x & y & 1 \\ a^4 & a^2 & 0 & 1 \\ b^4 & b^2 & 0 & 1 \\ a^2b^2 & 0 & ab & 1 \end{vmatrix}=0.$$

展開，得

(5)　$x^2+y^2+2xy\operatorname{Cos}\theta-(a^2+b^2)x-2aby+a^2b^2=0$

同理 C_2 之方程式爲

(6)　$x^2+y^2+2xy\operatorname{Cos}\theta-(a^2+b^2)x+2aby+a^2b^2=0.$

4. 設P爲一橢圓上之任何點，且F爲其一焦點，證明以FP及橢圓長軸各爲直徑之二圓必相內切。

解：設橢圓之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a>b>0.$$

用參數表示之

$x=a\operatorname{Cos}\theta$，　$y=b\operatorname{Sin}\theta$.

設P點座標爲 $(a\operatorname{Cos}\theta,\ b\operatorname{Sin}\theta)$

F點座標爲 $(C,0)$，　$C=\sqrt{a^2-b^2}$

茲設 C_1 爲以 PF 爲直徑之圓，圓心爲O_1，半徑爲R_1，

C_2 爲以橢圓長軸爲直徑之圓即

$x^2+y^2=a^2$，　圓心爲O（O，O）半徑爲 a.

若　C_1，C_2 相內切，則$\overline{O_1O}=a-R_1$，其逆亦眞

O_1 之座標（$\dfrac{a\ \mathrm{Cos}\theta+C}{2}$，$\dfrac{b\ \mathrm{Sin}\theta}{2}$）。

$$\overline{O_1O}=\sqrt{\left(\frac{a\ \mathrm{Cos}\theta+C}{2}\right)^2+\left(\frac{b\ \mathrm{Sin}\theta}{2}\right)^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2\ \mathrm{Cos}^2\theta+2\ a\ C\ \mathrm{Cos}\theta+C^2+b^2\ \mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2\ \mathrm{Cos}^2\theta+2\ a\ C\ \mathrm{Cos}\theta+a^2-b^2+b^2\ \mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-b^2)\mathrm{Cos}^2\theta+2\ a\ C\ \mathrm{Cos}\theta+a^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\ (C\ \mathrm{Cos}\theta+a)$$

又　$R_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a\ \mathrm{Cos}\theta-C)^2+(b\ \mathrm{Sin}\theta)^2}=\tfrac{1}{2}(-C\ \mathrm{Cos}\theta+a)$

$\therefore$　$a-R_1=a-\tfrac{1}{2}(a-C\ \mathrm{Cos}\theta)=\tfrac{1}{2}\ (a+C\ \mathrm{Cos}\theta)=\overline{O_1O}$

$\therefore$　C_1，C_2 相內切。

5. 解方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{Sin}\theta & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \mathrm{Sin}^2\theta & \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ \mathrm{Sin}^3\theta & \frac{1}{8} & 1 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

解：　此行列式爲關於 $\mathrm{Sin}\theta$ 之三次式，故方程式爲以$\mathrm{Sin}\theta$作未知數之三次方程式，僅有三根，由視察知當$\mathrm{Sin}\theta=\tfrac{1}{2}$，1，$-1$時，行列式均爲 0，即此三數爲其根，亦即

$\theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$，或$(n+\tfrac{1}{2})\pi$.

$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$

(2) 乙 組

1. 設x之方程式　$x^3-12x+16\mathrm{Cos}\theta=0$ 有重根，求θ之值。

解：　上方程式　$\triangle=\dfrac{(16\mathrm{Cos}\theta)^2}{4}+\dfrac{(-12)^3}{27}=64\mathrm{Cos}^2\theta-64.$

$\triangle=0$， 有重根。 即

$\cos^2\theta-1=0$， $\cos\theta=\pm1$，

$\therefore\ \theta=n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

2. 四個骰子，同時擲之，欲其表面點數之和爲10，其或然率（Probability）爲何？

解： 四個骰子，表面點數之和爲10，其出現點數不外乎下列六情形（不計順序）

(1) 1,1,2,6；(2) 1,1,3,5；(3) 1,1,4,4；(4) 2,2,3,3；
(5) 1,2,2,5；(6) 1,2,3,4；(7) 1,3,3,3；(8) 2,2,2,4；

其排列個數 (1)爲12，(2)爲12，(3)爲6，(4)爲6，(5)爲12，(6)爲24，(7)爲4，(8)爲4。

而四個骰子總出現情形爲 6^4 故

$$\text{或然率}=\frac{12+12+6+6+12+24+4+4}{6^4}=\frac{80}{1296}=\frac{5}{81}\text{。}$$

3. 面積 240 方寸之矩形內接於半徑 13 寸之圓中，求矩形兩邊之長。

解： 設矩形一邊長爲 a，另一邊長爲 b。

則 $$\begin{cases} ab=240 & (1) \\ a^2+b^2=(2\times13)^2=676 & (2) \end{cases}$$

(2)＋2×(1)，得 $(a+b)^2=1156$，即

$$a+b=\pm34.$$

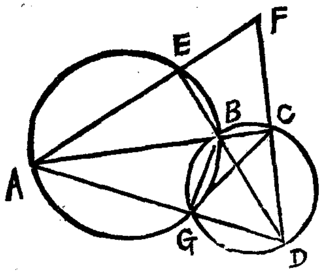
(2)－2×(1)，得 $(a-b)^2=196$，即

$$a-b=\pm14.$$

上二式均應取正號，即解 $\begin{cases} a+b=34 \\ a-b=14 \end{cases}$

得 $a=24$ 寸 $b=10$ 寸.

4. 從四直線中任取三條時，所得之四個三角形之外接圓相會於一點。



解：　設四直線 ABC，DBE，DCF，AEF，作成四三角形：△ABE，△DCB，△ACF，△DFE。

設 △ABE，△DCB 之外接圓除 B 點外，相交於 G 今要證 △ACF，△DFE之外接圓亦通過 G.

(證明)連接BG，CG

∵ A，B，E，G，共圓，

∴ ∠DBG＝∠EAG

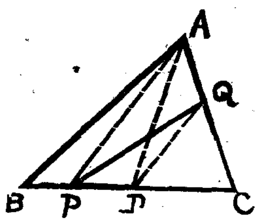
∵ D，C，B，G，共圓　∴ ∠DBG＝∠DCG

∴ ∠DCG＝∠EAG＝∠FAG

∴ A，G，C，F 共圓即 △ACF 之外接圓過 G，

同理可證 △DEF 之外接圓亦過 G。

5. 從一定三角形一邊上之一定點引平分三角形面積之直線。



解：　△ABC，　BC 邊上一點 P.

設 D 爲BC之中點，連結 PA，過 D 作 DQ∥AP 交 AB 於 Q 連 PQ，則 PQ 平分 △ABC.

(證明)　∵　D爲BC中點

∴　△ABD＝△ACD

即　△CQD＋△AQD＝$\frac{1}{2}$△ABC

∵　DQ∥AP，　∴　△AQD＝△QDP

∴　△CQD＋△QDP＝△QCP＝$\frac{1}{2}$△ABC 即

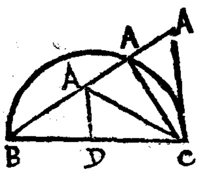
∴ PQ 平分 △ABC.

國立北京清華南開三大學

(甲組作3，4，5，6，7五題；乙、丙組作1，2，3，4，5五題)

1. 設D爲三角形ABC之底邊BC之中點，若頂角 A 爲鈍角，直角或銳角，則底邊BC分別大於、等於、或小於中線AD之二倍，試證之。

解：



以BC為直徑作半圓，若∠A為鈍角，則A在半圓內部

∴ AD＜圓之半徑

即 BC＞2AD，

∠A為直角，A點在半圓上，AD為圓之半徑

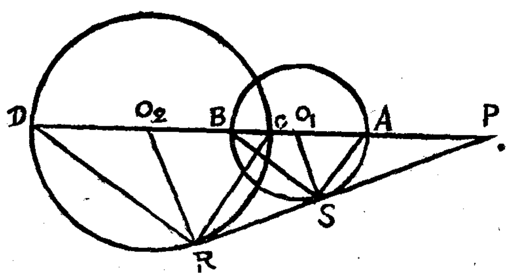
即 BC＝2AD。

∠A爲銳角， 則A點在半圓外部 ∴ AD＞圓之半徑

即 BC＜2AD。

2. 設二圓之連心線交一圓於A與B二點，交第二圓於C與D二點，又交二圓之一外公切線於點P。設在連心線上，點A離P最近，點D離P最遠，試證

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC.$$



解： 設 O_1，O_2 為第一，第二圓心

R，S 爲二切點

∵ $O_1S \perp RP$， $O_2R \perp RP$， ∴ $O_1S // O_2R$

∴ $\angle CO_2R = \angle AO_1S$ ∴ $\triangle CO_2R \backsim \triangle AO_1S$

（∵均爲等腰三角形，夾角相等） ∴ $AS // CR$。因之

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PS}{PR}$$

同理，因 $BS // DR$，

$$\therefore \quad \frac{PB}{PD} = \frac{PS}{PR} \text{ 即}$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$$

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC.$$

3. 解下列三角方程式

$$\operatorname{Sin} 4x - 2\operatorname{Cos} 2x \operatorname{Sin} x = 0.$$

解： $\operatorname{Sin} 4x - 2\operatorname{Cos} 2x \operatorname{Sin} x = 2\operatorname{Sin} 2x \operatorname{Cos} 2x - 2\operatorname{Cos} 2x \operatorname{Sin} x$

$$= 2\operatorname{Cos} 2x(\operatorname{Sin} 2x - \operatorname{Sin} x) = 4\operatorname{Cos} 2x \operatorname{Cos}\frac{3x}{2}\operatorname{Sin}\frac{x}{2} = 0$$

$\operatorname{Cos} 2x = 0$，或 $\operatorname{Cos}\frac{3x}{2} = 0$，或 $\operatorname{Sin}\frac{x}{2} = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = n\pi \pm \frac{\pi}{4},$$

$$\text{或} \quad x = \frac{2}{3}\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

$$\text{或} \quad x = 2n\pi. \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

4. (a) 簡化下式：

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}} + \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}}}$$

(b) 用數學歸納法，證明二項式定理

解：(a) $\sqrt[3]{\dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}} + \sqrt[3]{\dfrac{(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^6}{a - (a-1)}} + \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})^6}{a - (a-1)}}$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{a-1})^2$$

$$= a + (a-1) - 2a\sqrt{a-1} + a + (a-1) + 2a\sqrt{a-1} = 4a - 2.$$

(b) 證明

$$\text{(I)} \quad (a+b)^n = a^n + c_1^n a^{n-1} b + c_2^n a^{n-2} b^2 + \cdots + c_v^n a^{n-v} b^v + \cdots + b^n,$$

$n=1$， $a+b=a+b$， (1)式成立.

設 (1)式 當 $n=k$ 時成立 即

(2) $$(a+b)^k = a^k + c_1^k a^{k-1} b + c_2^k a^{k-2} b^2 + \cdots + c_{v-1}^k a^{k-v+1} b^{v-1} + c_v^k a^{k-v} b^v + \cdots + b^k$$

(2) 式兩邊乘上 $(a+b)$ 得

(3) $$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + c_1^k a^k b + c_2^k a^{k-1} b^2 + \cdots + c_{v-1}^k a^{k-v+2} b^{v-1} + c_v^k a^{k-v+1} b^v + \cdots + ab^k + a^k b + c_1^k a^{k-1} b^2 + c_2^k a^{k-2} b^3 + \cdots + c_{v-1}^k a^{k-v+1} b^v + c_v^k a^{k-v} b^{v+1} + \cdots + b^{k+1}$$

$\because$ $c_v^k + c_{v-1}^k = c_v^{k+1}$ $\therefore$ (3) 化爲

(4) $$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + c_1^{k+1} a^k b + c_2^{k+1} a^{k-1} b^2 + \cdots + c_v^{k+2} a^{k-v+1} b^v + \cdots + b^{k+1}$$

即 (1)式當 $n=k+1$ 時亦成立，因之$n=1,2,\ldots$ 都成立.

5. 解方程組：

$$\begin{cases} 2x^2+3xy+2y^2+x+y-9=0, & (1) \\ x^2+xy+y^2-7=0. & (2) \end{cases}$$

解： (1)—(2)，得

$x^2+2xy+y^2+x+y-2=0$,

即 $(x+y+2)(x+y-1)=0$

由 $x+y+2=0$， $y=-x-2$ 代入(2)得

$x^2+2x-3=0$，　$x=1,-3$，　故 $y=-3,1$，

由 $x+y-1=0$　$y=-x+1$　代入(2)得

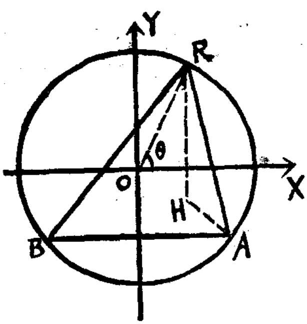
$x^2-x-6=0$　$x=3,-2$，　$y=-2,3$

故得四組解答

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=-3\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right\}。$$

6. AB 是一個圓的一條固定的弦，R 是此圓上的一個變動的點，求三角形 ABR 的垂心的軌跡。

解：



設　圓方程式爲

$x^2+y^2=a^2$

AB 直線方程式爲

$y=-b$，$(0<b<a)$

則　$A(\sqrt{a^2-b^2},-b)$，

$B(-\sqrt{a^2-b^2},-b)$

設　R座標爲$(a\cos\theta, a\sin\theta)$，

△ABR垂心H座標(x,y)。

∵ BR之斜率爲

$$\frac{a\sin\theta+b}{a\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2}},$$

∴ AH之斜率爲$-\dfrac{a\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2}}{a\sin\theta+b}$

∴ AH之方程式爲

(1)　$y+b=-\dfrac{a\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2}}{a\sin\theta+b}(x-\sqrt{a^2-b^2})$

RH之方程式爲

(2)　$x=a\cos\theta$

故　H 之座標 (x,y) 即爲 (1)，(2) 之解答

由　(2) $x=a\cos\theta$，　故　$a\sin\theta=\pm\sqrt{a^2-x^2}$，代入(1)

得 $$y+b=-\frac{x^2-(a^2-b^2)}{\pm\sqrt{a^2-x^2}+b}=\frac{(a^2-x^2)-b^2}{\pm\sqrt{a^2-x^2}+b}$$

$$=-b\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

移項平方之，得

$$x^2+(y+2b)^2=a^2$$

即 H 之軌跡爲一圓，圓心爲 $(0,-2b)$，半徑爲 a。

7. 一圓的中心在直線 $5x-3y-7=0$ 上，且經過兩圓

$$x^2+y^2-6\times-10y-15=0,$$

$$x^2+y^2+2\times+4y-20=0$$

的交點，求此圓之方程式。

解： 此圓方程式爲

$$x^2+y^2-6x-10y-15+k(x^2+y^2+2\times+4y-20)=0,$$

即 (1) $$x^2+y^2+\frac{-6+2k}{1+k}\times+\frac{-10+4k}{1+k}y+\frac{-15-20k}{1+k}=0$$

圓心爲 $\left(\frac{3-k}{1+k},\ \frac{5-2k}{1+k}\right)$ 代入

$5\times-2y-7=0$，得

$$5\,\frac{3-k}{1+k}-3\,\frac{5-2k}{1+k}-7=0$$

$$15-5k-(15-6k)-7(1+k)=0$$

$7+6k=0$， $\therefore\ k=-\frac{7}{6}$ 代入 (1)，得

$$x^2+y^2+50x+88y-50=0.$$

國立台大台灣省立農院工院師院

(1) 甲 組

1. 若二次方程式 $x^2+px+q=0$ (1)

有相異二實根時 則 $x^2+px+q+k(2x+p)=0$ (2)

($k\neq0$ 爲實數）亦有相異實根且僅有一根存在於方程式 (1) 所有二根之間，試證明之。

解：　設　方程式（1）二實根 x_1, x_2,　　$x_1 < x_2$

且判別式　$p^2-4q>0$

方程式（2）之判別式 爲

$(2k+p)^2-4(q+pk)=p^2-4q+4k^2>0$，

∴　（2）有二相異實根

設　$f(x)=x^2+px+q$，　　$g(x)=x^2+px+q+k(2x+p)$，

則　$f'(x)=2x+p$，　　$g(x)=f(x)+kf'(x)$。

由　Rolle 定理　　$f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$，

$g(x_1)\cdot g(x_2)=k^2f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$，　即

方程式（2）只有一根在 x_1, x_2 之間。

2.　8 人圍圓桌而坐指定特別 2 人爲相隣其確率爲何？

解：　其或然率　$=\dfrac{2\times 6!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

3.　解　$\sin 2\theta \cos\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$，（但 $0<\theta<2\pi$）

解：　$\sin 2\theta\cos\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta-1$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta-1$

$=2\sin\theta-2\sin^3\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta-1$

$=2\sin^2\theta(1-\sin\theta)-(1-\sin\theta)$

$=(2\sin^2\theta-1)(1-\sin\theta)=0$，

∴　$\sin\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 1，

∴　$\theta=n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$，　或　$2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$。而所求之

$$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi,\frac{\pi}{2}.$$

4.　試求拋物線 $y^2+ax+by+c=0$ 之頂點之位置（但座標軸爲直交）

解：　$y^2+ax+by+c=0$。

移項，配方

$$y^2+by+\frac{b^2}{4}=-ax-c+\frac{b^2}{4}$$

$$\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=-a\left(x-\frac{b^2-4c}{4a}\right)$$

∴ 頂點之座標爲 $\left(\frac{b^2-4c}{4a},\ -\frac{b}{2}\right)$

5. 雙曲線之任意切綫被其二漸近綫所截之線分，必二等分於切點，試證明之。

解： 設雙曲綫方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

切點座標爲 (x_1, y_1)，

則 切線方程式爲

(1) $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$.

二漸近線方程式爲

(2) $bx-ay=0$, (3) $bx+ay=0$.

設 (1) 與 (2) 之交點爲 $A(x_2, y_2)$

(1) 與 (3) 之交點爲 $B(x_3, y_3)$

則 $x_2=\frac{a^2b}{bx_1-ay_1}$ $y_2=\frac{ab^2}{bx_1-ay_1}$

$x_3=\frac{a^2b}{bx_1+ay_1}$ $y_3=\frac{-ab^2}{bx_1+ay_1}$

設 $\overline{AB}$ 綫分之中點座標爲 (x_4, y_4)

則 $$x_4=\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{a^2b\left[(bx_1+ay_1)+(bx_1-ay_1)\right]}{2(bx_1-ay_1)(bx_1+ay_1)}$$

$$=\frac{a^2b\cdot 2bx_1}{2a^2b^2}=x_1$$

$$y_4=\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{ab^2\left[(bx_1+ay_1)-(bx_1-ay_1)\right]}{2a^2b^2}=y_1$$

(2) 乙、丙組

1. 50張彩票中2張中彩，若二人抽彩其最初一人中彩與第二人中彩之損益如何？