問題詳解

數學辭典

趙 繸編

甲種精裝本

數學辭典

每册人民幣拾萬元

編輯者　趙繚

出版者　國民書局
復益書社

印刷者　新光印刷所

總發行所

復益書社
上海福州路三九八號

國民書局
上海山東中路128弄208號

一九三三年初版
一九五三年八月重一版

印數0001—1000册

目　次

數學辭典

第一門　辭典之部

一畫

一次方程式. 代 英 Equation of the first degree. 或 Linear equation. 又 Simple equation. 謂僅含未知數一乘冪之方程式. 例如一元一次方程式，即一未知數之一次方程式，其一般之形，爲 $ax+b=0$. 解之，爲 $x=-\frac{b}{a}$. 又含二未知數之一次方程式，其一般之形，爲 $ax+by+c=0$.

一般之二次式. 代 英 General quadratic expression. 含一未知數之一般二次式，爲 ax^2+bx+c. 含二未知數之一般二次式，爲 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$.

一般之解答. 代 英 General solution. 作一般之答之公式也. 例如父年30歲，子年10歲，問自今幾年後，父年爲子年之二倍之問題，而將父年爲 a，子年爲 b，求自今幾年後，父年爲子年之 m 倍，則 $a+x=m(b+x)$，即 $x=\frac{a-mb}{m-1}$.

一般式. 代 英 General expression. 例如一未知數之一次一般式，爲 $ax+b$. 二次之一般式，爲 ax^2+bx+c. 又如 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 等，有用爲範式同意味者.

一般算術. 算 英 Universal arithmetic. 數學大家奈端，[Newton 1642-1727] 曾著一書，名 Arithmetica Universalis，即一般算術 [Generalized arithmetic] 之起原也. 即論一般之數之算術，爲代數學之別名. 然當時之一般算術究非若現今代數學之發達也.

一項式. 代 英 Monomial expression. 謂自一項而成之代數式也. 例如 a 或 $3xy^2$ 等.

一乘方. 算 代 英 First power. 對於某數之二乘方三乘方，而謂其本數爲其數之一乘方. 例如5之一乘方爲 5^1，即5. 而 a 之一乘方爲 a^1，即 a. 皆本數也.

一乘冪. 算 代 英 First power 與一乘方同.

一從. 算 古籌算名. 一位之數，豎籌記之，故云.

一覽拂. 算 英 Sight draft 日本匯兌票名. 即即期票期也. 見即期票條.

二畫

二十四面體. 幾 英 Tetrahexahedron. 謂以二十四平面所成之立體.

二十面體. 幾 英 Icosahedron. 謂以二十平面所成之立體.

二次方程式. 代 英 Quadratic equation, 或 Equation of the second degree. 方程式，含未知數之二乘冪，或二

次元之項,謂之二次方程式. 例如 $3x^2-5x+6=0$, $x^2-xy+y^2=0$, $xy+x-2y-7=0$, 等,是也. 一未知數之普通二次方程式,有二根,以 α, β 表之,則

$$\alpha=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

及 $$\beta=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{(b^2-5ac)}}{2a}.$$

因 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, 及 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$. 故二根之和,等於 $-\frac{b}{a}$. 而二根之積,等於 $\frac{c}{a}$ 例如 $6x^2-x-9=0$, 則二根之和,爲 $\frac{1}{6}$. 其積,爲 $-\frac{1}{3}$.

1. $b^2-4ac>0$,則二根爲不相等之實數. 例如 $x^2+4x-12=0$,則因 $b^2-4ac=64$. 故二根爲不相等之實數. 2. $b^2-4ac=0$,則二根爲相等之實數. 例如 $x^2-4x+4=0$,則因 $b-^24ac=0$. 故二根爲相等之實數. 3. $b^2-4ac\leqslant 0$,則二根爲共軛虛數. 例如 $x^2-2x+3=0$,則因 $b^2-4ac=-8$,故二根爲共軛虛數. 4. b^2-4ac 爲正,且爲有理數之平方,則二根爲有理之實數. 例如 $x^2-5x+4=0$,則因 $b^2-4ac=9$. 故二根爲有理之實數. 5. b^2-4ac 爲正,而非有理數之平方,則二根爲共軛無理之實數. 例如 $x^2-5x+2=0$,則因 $b^2-4ac=17$. 故二根爲共軛無理之實數. 6. $b=0$,則二根之絕對值相等,而符號相反. 例如 $2x^2+5=0$,則二根之絕對值相等,而符號相反. 7. $c=0$,則一根爲有理之實數,一根爲0. 例如 $2x^2-3x=0$,則一根爲有理之實數,一根爲0. 8. $b=0$, $c=0$,則二根俱爲0, 例如 $2x^2=0$, 則二根俱爲0. 又如 a 爲0,則元方程式,非二次而爲一次. 然須研究 a 漸小時,二根爲如何之值. (1). $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$,則一根爲無窮大,而餘一根爲 $-\frac{c}{b}$ 蓋雖 $a=-\frac{b}{0}+\frac{\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0}$ 成不定之形,然

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$=\frac{[-b+\sqrt{(b^2-4ac)}][-b-\sqrt{(b^2-4ac)}]}{2a[-b-\sqrt{(b^2-4ac)}]}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{[2a-b-\sqrt{(b^2-4ac)}]}$$

$$=\frac{2c}{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}},$$

故 $a=0$,則 $\alpha=-\frac{c}{b}$ 又 $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-2b}{0}=\infty$. 例如 $0.x^2+2x+3=0$, 則一根爲無窮大一根爲 $-\frac{3}{2}$. (2). $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$, 則二根皆爲無窮大. 蓋

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$=\frac{b^2(b^2-4ac)}{2a[-b-\sqrt{(b^2-4ac)}]}$$

$$=\frac{2c}{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}},$$ 及

$$\beta=\frac{-b^2-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a[-b+\sqrt{(b^2-4ac)}]}$$

$$=\frac{2c}{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}},$$

故 $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$, 則 $\alpha=\infty$, $\beta=\infty$. 例如 $0.x^2+0.x+2=0$, 則二根俱爲無窮大.

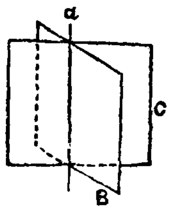
二次式. 代 英 Quadratic expression. 代數式含某文字之二乘方,或含二文字以上二次元之項,謂之二次式. 例如 $3x^2-5x+6$, $xy+y^2-1$, $xy-xz-y+6$. 等. 又 x 之普通二次式,爲 ax^2+bx+c,

二次函數之分別式. 代 英 Discriminant of quadratic function. x 之二次函數

ax^2+bx+c 之分別式,爲 b^2-4ac. 其分別之法,見二次方程式之條.

二次根數. [代] 英 Surd of the second order 或 Quadratic surd. 謂根指數爲2之根數. 例如 $\sqrt{3}$, $\sqrt{a}$ 等.

二面角. [幾] 英 Dihedral angle. 謂二平面[B,C]相交所成之二面角. 其交線 a, 謂之二面角之稜,其各平面,謂之二面角之面. 又二面角,亦可視爲以稜爲軸,而旋轉一面所生之角.



而角之大小,因其旋轉量之多少,而不關於其面之大小. 二直線相交成每二相等二組之角,謂之對頂角. 二平面相交,亦成每二相等二組之角,謂之對稜角. 於二面角稜之任一點,作稜之垂線於各平面,則所成之角爲常數. 此角謂之二面角之平面角. 測二面角時,用此角.

二面角之平面角. [幾] 英 Plane angle of dihedral angle. 見二面角條.

二乘方. [算] [代] 英 Second power. 謂某數或某式之平方也. 例如5之二乘方,爲 5^2. 而 a 之二乘方,爲 a^2. [詳見乘方條].

二乘比. [算] [代] 英 Duplicate ratio. 比 $a^2:b$ 謂爲 $a:b$ 之二乘比.

二乘根. [算] [代] 英 Second root. 同平方根.

二乘冪. [算] [代] 英 Second power 與二乘方同.

二項方程式. [代] 英 Binomial equation. a 爲正數或負數,實數或虛數,而 m 爲任意之正整數,則能化成 $x^m-a=0$ 之形之方程式,謂之二項方程式. 二項方程式,可化爲最簡之形. 蓋將 a, 之 m 乘根爲 a' 而 $a'y=x$, 則 $ay^m=a$. 故 $ay^m-a—0$, 卽 $y^m-1=0$, 故二項方程式之研究,以 $y^m-1=0$ 之形開始. 1. m 爲奇數,則方程式有一實根,卽1. 其餘根皆爲虛數. 蓋將大於1之數,代入 y, 則左邊爲正數,將小於1之數代入 y, 則左邊爲負數,故無論如何之正數或負數,不能適當於 $y^m-1=0$. 2. m 爲偶數,則 $+1$ 及 -1, 爲 $y^m-1=0$ 之根. 其餘根皆爲虛數. 其理同上. 3. r 爲方程式之一根,則 r 任意乘方,亦爲方程式之一根. 蓋 r 爲一根,則 $r^m=1$. 取兩邊之 n 乘冪,則 $r^{mn}=1$. 故 $r^m-1=0$ 之根爲 r, 則 r^2, r^3, r^4……r^{-1}, r^{-2}……, 亦其根也. 然方程式於此等之中,惟能得 m 個相異之根,而又能證明任二根之不相等. 4. m 爲奇數,則各虛數之代數和爲 -1. 蓋凡方程式諸根之和,爲第二項係數[此則爲0]之符號相反者. 而 $y^m-1=0$ 之實根爲1, 故也. 若 m 爲偶數,則各虛根之和爲0, 其理同上. 5. m 爲奇數,則各虛根之連乘積,等於 $+1$. 蓋凡方程式諸根之積,等於不含 x 項之符號相反者. 卽在此爲 $+1$. 而實根爲 $+1$. 故各虛根之連乘積,亦當爲 $+1$. 依同理,能證明 m 爲偶數,其各虛根之連乘積,亦爲 $+1$. 又依同理,能證明各根相異二個之和,或相異三個和之和,……相異 n 個[但 $n<m$]之和,亦爲0. 6. $y^m-1=0$ 各之根,能自

$$y=\cos\frac{2k\pi}{m}\pm\sin\frac{2k\pi}{m}\sqrt{-1}$$

之公式求之. 但 k 爲0, 或爲正整數,而 $\pi=180°$ 也. 各根之在此公式,而 m 爲奇數,則次

第自 $k=0$, $k=1$, $k=2$,.........$k=\frac{m-1}{2}$ 得之. 如斯所得 y 之值, 雖互相異, 而此等 k 以上之值, 所得 y 之值, 亦同前, 且同次序而循環之. 此理已述於前之[3]. 例如欲求 $y^m-1=0$ 之根. 其 $m=4$,而 $k=0$,則 $y=1$,$k=1$,則 $y=\pm\sqrt{-1}$, $k=2$, 則 $y=-1$. 故此方程式有 $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ 之四根.

又如欲求 $y^3-1=0$ 之根. 其 $m=3$. 而 $k=1$ 則 $y=1$, $k=2$, 則

$y=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}$. 但 $\cos\frac{2\pi}{3}=$

$\cos 120^\circ=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=$

$\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. 故 $y=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$ ...

因得三根為 1, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3-})$, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$. 通例以 1, w, w^2 表之. 若欲求 $x^m-a=0$ 之根,則將 a 之 m 乘冪, 乘 $y^m-1=0$ 之根, 卽得.

二項式. 假 英 Binomial expression. 謂自二項所成之式. 例如 $a+b$, $3x+2y^2$ 等.

二項式定理. 假 英 Binomial theorem 二項式定理, 謂

$$(x+a)^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2$$
$$+\ldots\ldots+\frac{n!}{r!(n-r)!}x^{n-r}a^r+\ldots.$$

但 n 爲正數或負數, 爲整數或分數,皆可, 茲證明之. 先將 n 爲正數, 假定

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2+\ldots$$
$$+{}_nC_rx^{n-r}a^r+\ldots\ldots+a^n$$

爲眞. 將 $x+a$ 之因數乘其兩邊, 則

$$(x+a)^{n+1}=x^{n+1}+(1+{}_nC_1)x^na+({}_nC_1+{}_nC_2)x^{n-2}a^2+\ldots\ldots+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)x^{n-r}a^r+\ldots\ldots+a^{n+1}.$$

而 $1+{}^nC_1=1+n={}_{n+1}C_1$,

${}_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{(n+1)n}{2!}={}_{n+1}C_2$,

而一般 ${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$

故 $(x+1)^{n+1}=x^{n+1}+{}_{n+1}C_1x^na+{}_{n+1}C_2x^{n-1}a^2+\ldots\ldots+{}_{n+1}C_rx^{n+1-r}a^r+\ldots\ldots+a^{n+1}$

故此定理, 若 n 爲任意之值而眞, 則 $n+1$ 亦眞, 如是 $(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$,

$(x+a)^3=x^3+3x^2a+\frac{3.2}{1.2}xa^2+a^3$.

故 $n=3$, 此定理亦眞. 而 $n=4$, 此定理亦眞. 既知 $n=4$ 亦眞, 則 $n=5$ 亦眞. 故知此定理 n 爲任意之整數, 皆眞, 如此之證明法, 謂之數學的歸納法. [Mathematical induction] [最大項] $\frac{(n+1)x}{x+1}+1>r>\frac{(n+1)x}{x+1}$, 則 $(1+x)^n$ 之展開式第 r 項之絕對值, 大於其餘諸項之絕對值. 若 $r=\frac{(n+1)x}{x+1}$, 則第 r 項與第 $r+1$ 項相等, 而其絕對值大於其餘諸項之絕對值. [最大係數]. n 爲偶數. 而 $r=\frac{n}{2}+1$, 則第 r 項之係數最大, n 爲奇數,則 $(n+1)/2$ 項及 $(n+3)/2$ 項之係數相等, 而大於其餘諸項之係數. [係數之性質]. 將二項展開式, 記爲

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+{}_2cx_2+\ldots\ldots+c_rx^r$$
$$+\ldots\ldots+c_nx^n\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

但 $c_0=c_n=1$, $c_r=c_{n-1}=n$. 而凡 $c_r=c_{n-r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$. I. 於 (1) 而 $x=1$, 則

$2^n=c_0+c_1+c_2+\ldots\ldots\ldots+c_n$,

卽 $(1+x)^n$ 之展開式係數和爲 2^n.

II. 於 (1) 而 $x=-1$, 則

$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2\ldots\ldots\ldots+(-1)^nc_n$, $\therefore$

$0=(c_0+c_2+c_4+\ldots\ldots)-(c_1+c_3+c_5+\ldots)$. 故 $(1+x^n)$ 之展開式,其奇數項之係數和,等於偶數項之係數和. 次再證明此定理 n 為任意數皆眞. 試先補一題. [依 x 方而序列之二級數,取其成收斂級數時 x 之各值,而使二級數相等,則對應之係數,必互相等.] 卽方程式 $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots\ldots$

$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots\ldots$ (1). 二級數以 x 之各值而收斂時爲眞. 然則 $x=0$, 此方程式亦必眞. 今將 $x=0$, 則 $a=A\ldots\ldots\ldots(2)$.

自 (1) 減 (2), 而以 x 除其兩邊, 則 $b+cx+dx^2+\ldots\ldots=B+Cx+Dx^2+\ldots\ldots\ldots(3)$, 若 $x=0$, 則 $b=B\ldots\ldots(4)$, 自 (3) 減 (4), 而以 x 除其兩邊, 則 $c+dx+\ldots\ldots=C+Dx+\ldots\ldots\ldots\ldots$ (5), 若 $x=0$, 則 $c=C$. 餘類推. 以上旣證明本定理 n 為正整數, 而

$$(1+x)^n\equiv 1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots\ldots$$

再論 n 爲分數及負數者. I. n 爲正分數,而等於 p/q. 如 x 之 $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots\ldots$ 爲收斂級數, 假定 $(1+x)^p=(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots\ldots)^q$ ………… (1), [此假定之適當, 蓋若將 (1) 之兩邊各展開, 則

$$1+px+\frac{p(p-1)}{1.2}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^3$$
$$+\ldots\ldots$$

及
$$A^q+qA^{q-1}Bx+\left.\begin{array}{l}\dfrac{q(q-1)}{1.2}A^{q-2}B^2\\+qA^{q-1}C\end{array}\right|x^2$$
$$\left.\begin{array}{l}+\dfrac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}A^{q-3}B^3\\+q(q-1)A^{q-2}BC+qA^{q-1}D\end{array}\right|x^3+\ldots\ldots$$

此第二級數,其前 k 個係數,爲 A, B, C, D…… k 個相雜而成. 若令二級數至第 k 項相對之係數相等, (補題) 則可得其前 k 個未知數 A, B, C, D ………故 (1) 之假定爲適當也. 二第一項使相等, 又二第二項使相當, 則 $A^q=1$. $\therefore$

$A=1$. 又 $qA^{q-1}B=p$, $\therefore$ $B=\frac{q}{p}$.

取兩邊之 q 乘根, 則

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}=1+\frac{p}{q}x+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots(2).$$

但 x 須取其右邊之級數爲收斂者.

II. $n=-m$, 則 m 爲正, 而

$$(1+x)^n=(1+x)^{-m}=\frac{1}{(1+x)^m}.$$

自 (2) 知 m 爲整數或分數, 皆爲

$$\frac{1}{(1+x)^m}=\frac{1}{1+mx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots}.$$

依實際之除法, 知其爲

$$(1+x)^{-m}=1-mx+Cx^2+Dx^{-3}+\ldots\ldots\ldots(3)$$

之形. 自 (2) 及 (3) 知 n 爲整數或分數, 正數或負數, 均爲

$$(1+x)^n=1+nx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots\ldots,$$

但其右邊須爲收斂級數, 兩邊若平方之, 則

$$(1+2x+x^2)^n=1+2nx+\left.\begin{array}{l}+2C\\+n^2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}+2D\\+2nC\end{array}\right|x^3+\ldots\ldots(4)$$

又 $(1+y)^n=1+ny+Cy^2+Dy^3+\ldots\ldots\ldots$

故置 $y=2x+x^2$, 則

$$(1+2x+x^2)^n=1+n(2x+x^2)+C(2x+x^2)^2$$
$$+D(2x+x^2)+\ldots\ldots$$
$$=1+2nx+\left.\begin{array}{l}n\\+4C\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}+4C\\+8D\end{array}\right|x^3+\ldots\ldots(5)$$

將 (4) 及 (5) 相對之係數使相等, 而

$$n+4C=2C+n^2,$$
$$4C+8D=2D+2nC,$$

$2C=n^2-n, \qquad \therefore C=\dfrac{n(n-1)}{1.2}$

$3D=(n-2)C, \qquad \therefore D=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

餘類推. 故n爲整數或分數, 正數或負數, 皆爲

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3\ldots\ldots$$

但右邊須爲收斂級數. n非正整數, 則所得之數, 爲無窮級數, 例如

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}x^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3.6}x^2+\frac{2.5}{3.6.9}x^3-,\ldots$$

但右邊必爲收斂級數方合. 又將344之立方根, 求至小數第六位.

$$344=343\left(1+\frac{1}{343}\right)=7^3\left(1+\frac{1}{343}\right)$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{344}=7\left(1+\frac{1}{343}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=7\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{343}\right)+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}\left(\frac{1}{343}\right)^2+\ldots\right]$$

$$=7(1+0.00097187-0.000000944$$

$$=7.006796.$$

二項係數. 代 英 Binomial coefficients. 二項係數者, 爲依二項式定理, 展開$(x+a)^m$之係數而爲$1, m, \dfrac{m(m-1)}{2!}$, $\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}, \ldots, \dfrac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{r!}$

其m爲正整數, 則此係數等於 1, ${}_mC_1$, ${}_mC_2, \ldots\ldots\ldots, {}_mC_r, \ldots\ldots\ldots$

但${}_mC_r$者, 謂自m物式取r物組合之數也.

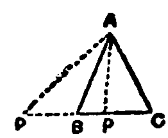
二項級數. 代 英 Binomial series. 謂將$(x+a)^m$, 依二項式定理展開之級數也. 卽

$$x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{m-3}a^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{r!}x^{m-r}a^r+\ldots\ldots,$$

若m爲分數或負數, 則爲無窮級數.

二等分線. [角的]. 幾 英 Bisector. 角之二等分線者, 謂將角分爲全相等二部分之直線也, 又某角之外角之二等分線, 謂爲其角之外二等分線, 因此謂其角之二等分線, 爲內二等分線. 某角之內二等分線, 與其外二等分線, 成直角.

二等邊三角形. 幾 英 Isosceles triangle. 三角形二邊相等者, 謂之二等邊三角形, 或謂之等脚三角形, 或謂之等腰三角形, 而其餘一邊, 謂之底, 其對於底之角, 謂之頂角. 三角形之二邊相等, 則對之之角亦相等. 而其逆亦眞. 二等邊三角形頂角之二等分線, 爲底之垂直二等分線, 而其逆亦眞. 自頂角向二等邊三角形之底, 作一中線, 則爲底之垂直二等分線, 又爲頂角之二等分線. 於二等邊三角形 ABC 之底 BC 上, 或其延長上, 取一點 P, 則



$\overline{AP}^2 \sim \overline{AB}^2=BP.CP.$

二等邊梯形. 幾 英 Isosceles trapezoid. 梯形不平行之二邊相等者. 謂之二等邊梯形. 二等邊梯形, 平行二邊之一, 其兩端之角相等.

二進記法. 代 英 Binary scale. 謂記數滿2進位之法也. 現行於世者, 爲

十進法, 滿 10 則進位. 將此 10 變爲用 2, 謂之二進記法. 故二進記法.但用 0 及 1 之數字, 足矣. 例如以二進記法所書之1101.卽爲 $1\times2^3+1\times2^2+1$ 之意.德意志之來不里慈氏[Leibnity 1646–1716] 研究此記法之算術乃輕實用而重奇巧也.

二線所成之矩形. 幾 英 Rectangle contained by two lines. 謂以二直線爲兩鄰邊所作之矩形也.

二冪. 算 代 英 Square 同二乘冪.

七角形. 幾 英 Heptagon. 以七直線所成之多角形也.

八角形. 幾 英 Octagon. 以八直線所成之多角形也.

八面體. 幾 英 Octahedron. 以八平面所成之多面體也.

八線. 三 英 Trigonmetricl functions 舊譯三角函數之名. 謂正弦, 餘弦, 正切, 餘切, 正割, 餘割, 正矢, 餘矢也.

九十面體. 幾 英 Enneacontahedron. 謂以九十個平面,所成之多面體也.

九九數. 算 英 Multiplication table 見乘法表條中.

九角形. 幾 英 Nonagon, 或 Enneagon. 以九直線所成之多角形也.

九容. 古 古算術名. 元李冶得之洞淵老人者也. 見測圓海鏡二卷中. 卽句上容圓,股上容圓,弦上容圓,句股上容圓,句外容圓,股外容圓,弦外容圓,句外容半圓,股外容半圓,是也. 句股容圓,非洞淵所創,故不在內.

九章. 古 方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,句股,謂之九章.

九減法. 算 英 Rule for casting out the nines. 某數字之和, 可以9除盡者, 則其數能以9除盡, 而數字之和, 不能以9除盡者,則其數亦不能以9除盡. 例如 $4532=4000+500+30+2$

$$=4(999+1)+5(99+1)+3(9+1)+2$$

$$=4\times999+4+5\times99+5+3\times9+3+2.$$

如是 4×999, 5×99, 3×9 皆能以9除盡,故 4532 以9除之之剩餘, 等於以 9 除 $4+5+3+2$ 之剩餘. 故某數數字之和, 以9除之之剩餘爲0, 卽其數字之和能以9除盡, 則此數能以9除盡. 例如 24573 以9除之之剩餘, 等於以9除 $2+4+5+7+3$ 之剩餘. 卽皆爲3也. 以9除數字之和而求其剩餘, 其數字中之9與1, 2, 6, 及 4, 5, 均可省之. 例如求以 9 除 1926754 之剩餘. 其數字中之9與1,2,6, 及 4, 5, 均可省之, 惟餘一數字 7. 又如 254786 省其 5, 4, 及 2, 7, 惟自 $8+6$ 減 9 剩餘爲5. 用此理, 可驗算加減乘除之結果. 示之如次.

I. [以九減驗加法].

$$\left.\begin{aligned}81346&=(\text{九之倍數})+4\\27632&=(\text{九之倍數})+2\\38507&=(\text{九之倍數})+5\\67549&=(\text{九之倍數})+\underline{4}\end{aligned}\right\}\text{加}$$

$$6\ldots\ldots\overline{215034}\qquad\qquad 15\ldots\ldots6$$

自應加之各數, 減去 9, 又自其各剩餘之和, 減去 9, 得剩餘 6, 而與自其和減去 9 之剩餘同, 卽知此運算, 大抵無誤.

II. [以九減驗減法].

$$\left.\begin{aligned}176543&=(\text{九之倍數})+8\\\underline{85674}&=(\text{九減倍數})+\underline{3}\end{aligned}\right\}\text{減}$$

$$5\ldots\ldots90869\qquad\qquad 5$$

自被減數及減數, 各減去 9, 又自被減數之剩餘, 減減數之剩餘, 得剩餘 5, 而與自其差減去 9 之剩餘同, 卽知此運算, 大抵無誤.

又 51786531＝九之倍數＋0 } 減
23456780＝九之倍數＋8 }

1.........28329751 1

若被減數之剩餘，小於減數之剩餘，則須加 9 於被減數之剩餘.

III. [以九減驗乘法].

47＝45＋2， 61＝54＋7， 故

$47\times61=(45+2)\times61=45\times61+2\times61,$

$=45\times(54+7)+2\times(54+7),$

$=45\times54+45\times7+2\times54+2\times7.$

45×54, 45×7, 2×54, 爲 9 之倍數故全積爲 (9 之倍數)$+2\times7$, 但 $2\times7=9+5$, 故全積爲 (9 之倍數)$+5$, 而 57×61 之積卽 2867, 爲 (9 之倍數) ＋5. 故此運算，大抵無誤.

今將此方法，列之於次，

47.........2 } 乘
61.........7 }
47　　14.........5
282
2867.....................5

IV. [以九減驗除法].

498)1348708(2708
996
3527
3486
4108
3984
124

卽 $1348708=498\times2708+124,$

但 1348708＝九之倍數＋4，

由前條

498×2708＝九之倍數＋6，

124＝九之倍數＋7，

故

$498\times2708+124$＝九之倍數＋6＋7，

＝九之倍數＋4，

故 1348708 及 $498\times2708+124$ 二數各以 9 除之，而同得剩餘 4，故上之運算，大抵無誤.

今將此方法列之於次，

8..................2708
3.......498)1348708.......4
6.......24　　996
3527
3486
4108
3984
7........................124
4.....13

驗加減乘除之結果，若所誤者，爲 9 之倍數，則此法失其效力. 例如有加法之和，本應爲 215 034，誤爲 210534，或誤爲 214134，以此法驗之，無效力也.

九數. 卽九章也. 以數言之，曰九數，以篇言之，曰九章.

九點圓. 英 Nine point circle. 謂三角形之垂心與各頂角之中點（三個），各邊之中點（三個），各垂線之趾（三個），同在一圓周上. 此定理係龐士勒發明. (Poncelek 法國數學者 1788-1867)，

見平面幾何學解法之部 121 題.

十一角形. 英 Hendecagon, 或 Undecagon. 謂以十一直線所成之平面形.

十二角形. 英 Dodecagon. 謂以十二直線所成之平面形.

十二面體. 英 Dodecahedron. 謂以十二平面所成之立體.

十二進法. 英 Duodecimal method. 謂以十二爲記數之底之命數記數法也. 此法必有表十及十一之數字. 今將十爲 t，十一爲 l，則如以十二進

法書 350 t 7 l, 爲 $3\times 12^5+5\times 12^4+t\times 12^2+7\times 12+1$.

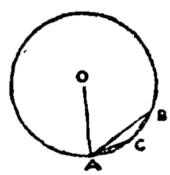
十分之要件. 數 英 Sufficient condition. 數學中恆有所謂十分之要件,及必要之要件者. 某事成立,必有不可缺之要件,謂之必要之要件. 又某要件不缺,則某事必成立,此要件謂之十分之要件.

例如 ab, 若 $a=0$, 則必 $ab=0$, 故 $a=0$ 爲 $ab=0$ 之十分之要件.

然 $ab=0$, 則不必要 $a=0$, 卽 $b=0$ 亦可, 故此要件,非必要之要件.

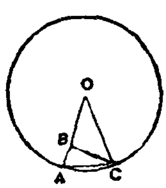
又 $ab=0$ 則必 $a=0$, 或 $b=0$. 故 $ab=0$, 則謂 a 或 b 必有一爲 0 之要件, 爲必要之要件. 而 $ab=0$ 則 a 或 b 有一爲 0 卽足, 故此爲必要且十分之要件.

十五角形. 幾 英 Quindecagon. 謂以十五直線所成之平面形. 圓內欲作內接正十五角形,則作與半徑 OA 等之弦 AB, [此卽圓內內接正六角形之一邊] 又作與此圓內接正十角形之一邊等之弦 AC, 則 BC 卽此圓內接正十五角形之一邊, 蓋因 $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{16}$ 故也.



十五邊形. 幾 英 Quindecagon 同十五角形.

十角形. 幾 英 Decagon. 以十直線所成之平面形也. 圓內欲作內接正十角形,則引半徑 OA, 於 OA 上取一點 B, 使其 $OA.AB=\overline{CB}^2$ 則 OB 卽等於內接正十角形之一邊. 故取等於 OB 之 AC, 卽爲內接正十角形之一邊.



十面體. 幾 英 Decahedron. 謂以十平面所成之立體.

十進法. 算 英 'Decimal system, 或 Denary scale. 以一二三四五六七八九爲基數,九增一則爲十,次第每十倍,則命新名爲百,千,萬,十萬,千萬,億等,此進法卽謂之十進法. 現今行於世界者,大抵皆十進法也.

十進算. 算 英 Decimal arithmetic. 謂十進法之算術.

十橫. 算 古籌算之名. 十位之數,橫籌記之,故名.

力學. 數 英 Dynamics. 原來與重學 [Mechanics] 同,卽今亦有用爲同意義者. 卽重學之中,有靜力學 [Statics] 動力學 [Dynamics]. 然近來恆總稱爲 Dynamics. 卽力學之中,有靜力學 [Statics] 及動力學, [Kinetics] 而重學則單爲器械學也. 由前之說,則重學爲力之加於質點或物體時論其靜止及運動之學科,由後之說,則重學爲器械力學論適用力於器械之原理也.

三畫

三次方程式. 代 英 Cubic equation. 三次方程式,皆可化爲 $x^3+mx^2+nx+c=0$. 令 $x=y-\frac{1}{3}m$, 則得

$$y^3+qy+r=0.$$

故解三次方程式,卽解

$$y^3+qy+r=0$$

式可矣. 而此式,可以之比較 $x^3-3abx-a^3-b^3$, 卽 $(x-a-b)(x-\omega a-\omega^2 b)(x-\omega^2 a-\omega b)=0$ 而得之. 但 ω 爲 1 之立方根之虛數. 故所求之根,爲 $a+b$, $\omega a+\omega^2 b$,

$\omega^2 a+\omega b$，而 a 及 b，可自 $q=-3ab$，$r=-a^3-b^3$ 求得之．即

$$a^3=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$b^3=-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

例如解 $x^3-15x=126$，乃將 $q=-15$，$r=-126$，故 $x=5+1=6$，

或 $x=5.\omega^2+1.\omega^2=-3+2\sqrt{-3}$，

或 $x=5.\omega^2+1.\omega=-3-2\sqrt{-3}$.

[根之研究] (1). $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 爲正，則 a^3，b^3 皆爲實數．今 a, b，若爲算術的立方根，則三根 $a+b$，$\omega a+\omega^2 b$，$\omega^2 a+\omega b$，之第一根爲實數，而他二根爲虛數，如次 $-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}$，

及 $-\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}$，

(2). $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 爲 0，則 $a^3=b^3$，即 $a=b$，而三根爲 $2a$，$a(\omega+\omega^2)$，$a(\omega^2+\omega)$，即 $2a, -a, -a$.

(3). $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 爲負數，則 a^3 及 b^3 即成 $\alpha+i\beta$，$\alpha+i\beta$ 之形之式．今將此立方根爲 $m+in$ 及 $m-in$ 則三根如次．

$m+in+m-in$ 即 $2m$，

$(m+in)\omega+(m-in)\omega^2$ 即 $-m-n\sqrt{3}$，

$(m+in)\omega^2+(m-in)\omega$ 即 $-m+n\sqrt{3}$，

由是各根皆爲實數，然求虛數立方根精密之值，無算術的及代數的解法，故三根俱爲實數而不等者，不能以前法解之，遂謂爲不能化之式，[Irreducible case]． 例如

$$x^3-15x-4=0.$$

代入 (1)，而爲

$$a=\sqrt[3]{2\pm\sqrt{\frac{-3375}{27}+4}}=\sqrt[3]{2\pm 11\sqrt{-1}}.$$

依視察得 $(2\pm\sqrt{-1})^3=2\pm 11\sqrt{-1}$.

$\therefore\ a=2+\sqrt{-1},\quad b=2-\sqrt{-1}$.

因得 $x=4$．乃以 $x-4$ 除已知之方程式，得二次方程式，解之，得 $x=-2\pm\sqrt{3}$．但用三角函數解之，則可免此困難，即於 (3) 而得 $x=(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{3}}+(\alpha-i\beta)^{\frac{1}{3}}$，若 $\alpha=r\cos\theta$，$\beta=r\sin\theta$，則 $r^2=\alpha^2+\beta^2$ 及 $\tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$，而 $(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{3}}=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{\frac{1}{3}}$ 乃由朵謨阿布爾 * [Demoivre,] 之定理，得三值如次．

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right),$$

$$\text{及}\quad r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right).$$

但 $r^{\frac{1}{3}}$ 爲 r 之算術的立方根，而 θ 爲自 $\tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$ 求得之最小正角．又 $(\alpha-i\beta)$ 之值，在上之結果，可由變 i 之符號而得之．由是所求之三根如次．

$$2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\ 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},\ 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}.$$

本條始之解法，爲自加爾旦氏 [Cardan, 意大利之數學者 1501—1576] 解法少變更之者也．第十一世紀之中葉亞剌伯人阿克黑氏 [Alkhayyami] 所著之代數學書中，揭載三次方程式，以幾何學之作圖法解之，然未論及一切之解法，第十三世紀之初，意大利人里阿拉爾氏，[Leonardo]，從亞剌伯人習代數學，傳之於意大利，爾後意大利人遂研究斯學．1494 年勒克巴士革氏 [Lucus Paciolus] 著一書，準亞剌伯人之法，立三次方程式之階級，其解法爲當時之代數學所不能

解者，同時又發明三次式之一切解法，誠數學中之最得力人也三次方程式之解法，雖成於西皰鄂弗若氏，[Scipio Ferreo]，然僅於1505年傳於其門人弗若利杜氏[Florido]而不傳於世1530年塔特利亞氏[Tartaglia]得三次方程式 $x^3+px^2=q$ 之解法，而弗若利杜氏聞之，遂宣言已得方程式 $x^3+m=n$ 之解法．塔特利亞氏聞而疑之，1535年與弗若利杜氏爭論，斯時塔特利亞氏已知 $x^3+mx=n$ 之解法，其解法之要，卽將二根之差 $(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})$ 代入 x，卽爲加爾但氏之法也．當1539年，加爾但氏學此學於塔特利亞氏，初不肯授，屢爲請求，遂漸傳之，且約弗洩，然加爾但氏背此約，於1545年載於其所著書中，而公於世塔特利亞氏，遂欲自刊之．於1556年刊其著述；然爲大部，頗難成功，至1559年僅刊其三次方程式以前之部分而卒．故經歷年代，塔特利亞氏*之功，遂湮沒，而歸於加爾但氏之發明．故以加氏之名呼之．

*桑識阿布魯之定理如次．n 或爲正數，或爲負數，或爲整數，或爲分數，$\cos n\theta+i\sin n\theta$ 恆爲 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ 之值之一．但 $i=\sqrt{-1}$.

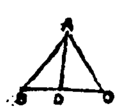
三次式． 代 英 Cubic expression. 含某字母之三乘方或含二個以上三次元之積，謂之三次式．例如 $4x^3-5x^2+6x-7$, $3x^2y-5xy-7y+1$, $xyz-x+y^2-3$.
三次式之普通式，爲 ax^3+bx^2+cx+d.

三次根數． 代 英 Cubic surd，或 Surd of third order. 謂根指數爲3之根數．例如 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{(a+b)}$.

三角比． 目 英 Trigonometrical ratio 同三角函數．

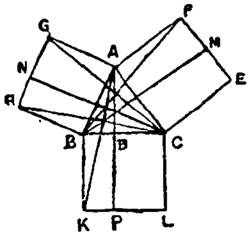
三角形． 幾 英 Triangle，或 Trigon. 謂以三線所成之面．有平面三角形，[Plane triangle]，有球面三角形 [Spherical triangle]．平面三角形，謂以三直線所成之面，球面三角形，謂以三大圓弧所成球面之一部，(見球面三角形之條)，平面三角形，往往略稱爲三角形．平面三角形，有次之分類．(1)．斜三角形，[Scalene triangle] 謂三邊不等之三角形，又謂之不等邊三角形．
(2)．二等邊三角形，[Isosceles triangle] 謂二邊相等之三角形，又謂之等脚三角形．又謂之等腰三角形．三角形之二邊相等，則相對之角亦相等．(3)．等邊三角形，[Equilateral triangle] 謂三邊相等之三角形，三角形之三邊相等，則三角亦相等，故等邊三角形，又謂之等角三角形．[Equiangular triangle] 因之又謂之正三角形．[Regulart riangle] (4)．直角三角形．[Right angled triangle] 謂三角形有一角爲直角者，其對直角之邊[卽斜邊]上之正方形，等於倫二邊上正方形之和，[此證明見披他哥剌斯之定理之條] (5)．斜角三角形，[Oblique angled triangle] 謂其角皆非直角之三角形．(6)．銳角三角形，[Acute angled triangle] 謂各角皆爲銳角之三角形，而對銳角之邊上之正方形，小於倫二邊上正方形之和，但所小者，等於一邊與在其邊上倫一邊之射影所成之矩形之二倍．

[第一證]．三角形 ABC，其 AD，爲自 A 向 BC 所作之垂線，[卽高]，則 $AC^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+$



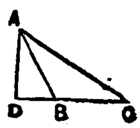
$\overline{BC-BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2BC\cdot BD$
$=\overline{AB}^2+BC^2-2BC.BD.$

[第二證]. 於AC, AB, BC上,各作正方形ACEF, ABHG, BCLK, 又於AB, AC, BC,各作垂線BM, CN, AP,則因ΔBAF, ΔGAC二邊與夾角各相等,

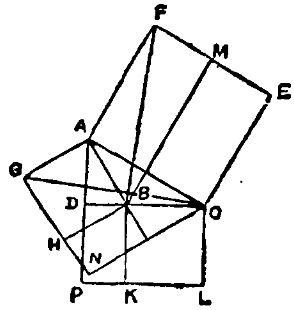


[$AB=AG$, $AF=AC$, $B\hat{A}F=G\hat{A}C$] 故全相等. 如是 $\triangle BAF=\frac{1}{2}\square AM$, $\triangle GAC=\frac{1}{2}\square AN$, 故 $\square AM=\square AN$ 準此 $\square CM=\square CP$, $\therefore \overline{AC}^2=\square AN+\square CP=\overline{AB}^2+BC^2-\square BN-\square BP$ 又因 $\triangle ABK$, $\triangle HBC$ 二邊與夾角各相等, [$AB=HB$, $BK=BC$, $A\hat{B}K=H\hat{B}C$] 故全相等,而此兩形等於BD·BC, 故$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BD.BC$.

(7). 鈍角三角形, [Obtuseangled triangle] 謂有一角為鈍角之三角形,而對鈍角邊上之正方形,大於餘二邊上正方形之和,但所大者,等於一邊與在其邊餘一邊之正射影所成之矩形之二倍. [第一證]. $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC+BD}^2$
$=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+2BC.BD=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2BC.BD.$



[第二證]. 作圖與前條銳三角形同,證明亦略同即ΔBAF, ΔGAC,因二邊與夾角各相等,故全相等,而$\Delta BAF=\frac{1}{2}\square AM$, $\Delta GAC=\frac{1}{2}\square AN$, 故 $\square AM=\square AN$. 準此, $\square CM=\square CP$, 故 $\overline{AC}^2=\square AN+\square CP=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\square BN+\square BP=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2BC.BD.$



茲述一切三角形求面積之法.

(1). 若將ΔABC之底邊為b, 及高為h, 面積為$\frac{1}{2}bh$. (2). 若以二邊a, b與其夾角C, 求面積, 則等於$\frac{1}{2}ab\sin C$.

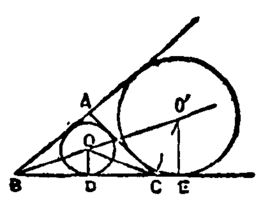
(3). 以三邊求面積, 則為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

[第一證]. 將三角A, B, C之對邊為a, b, c. [看6之前圖] $BD=x$, 則因
$b^2=a^2+c^2-2ax$,
故 $x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.

故 $\overline{AD}^2=c^2-x^2=(c-x)(c+x)$
$=\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\cdot\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}$
$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2}$
$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$

$\therefore \Delta ABC$之面積$=\frac{1}{2}aAD$
$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

[第二證]. 將內切圓半徑$OD=r$, 對於角B之傍切圓半徑$O'E=r'$, 則面積$=sr$.......(1), 又因ΔODC, ΔCEO'相似, 故$OD:CD=CE:O'E$, 即r:



$s\ c=s-a:r'$, 又 $OD:BD=:O'E:BE$, 卽 $r:r-b=r':s$, 故自此二比例得

$$r^2:(s-b)(s-c)=s-a:s,$$

$$\therefore s^2r^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

代入(1), 得面積

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

[第三證]. 自範式, $\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$,

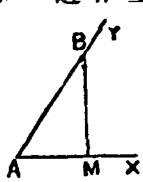
$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$, $\therefore$ 面積 $=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$=ab\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

三角形之解法. 目 英 Solution of triangles. 謂自三角形之已知件, 而求其未知件也. 已知件, 必有三件, 但在平面三角形, 已知件, 至少必有一邊.

三角法. 數 英 Trigonometry. 三角法爲數學之一分科, 論三角函數[或謂之圓函數]之性質及其解法, 且述其應用者也. 三角法大別分爲平面, 球面, 及解析三種. 平面三角法, [Plane trigonometry] 論三角函數之性質及關係, 應用之而述三角形邊角之關係, 且自此論三角形之解法及高遠測量之大要. 球面三角法 [Spherical trigonometry] 用三角函數, 論球面三角形邊角邊關係. 解析三角法 [Analytical trigonometry] 論一切三角函數之關係及性質.

三角函數. 目 英 Trigonometrical functions. XAY 爲任意之角, 於其一邊上, 取任意之一點 B, 向餘一邊作垂線 BM, 則將比 $\frac{BM}{AB}$ 名爲 A 角之正弦, 以 $\sin A$ 記之, 比 $\frac{AM}{AB}$ 名爲 A 角之餘弦,



以 $\cos A$ 記之, 比 $\frac{BM}{AM}$ 名爲 A 角之正切. 以 $\tan A$ 記之, 比 $\frac{AM}{BM}$ 名爲 A 角之餘切, 以 $\cot A$ 記之, 比 $\frac{AB}{AM}$ 名爲 A 角之正割, 以 $\sec A$ 記之, 比 $\frac{AB}{BM}$ 名爲 A 角之餘割, 以 $\mathrm{cosec}\,A$ 記之, 此正弦, 餘弦, 正切, 餘切, 正割, 餘割, 謂之三角函數, 又謂之圓函數, [Circular function] 又 $\cos A=\frac{AM}{AB}=\sin B$, 故角之餘弦等於其餘角之正弦. 準此某角之餘切, 等於其餘角之正切, 某角之餘割, 等於其餘角之正割, 而自定義有次之關係. $\sin A=\frac{BM}{AB}$, $\cos A=\frac{AM}{AB}$, $\tan A=\frac{AB}{BM}$,

$\cot A=\frac{AM}{BM}$, $\sec A=\frac{AB}{AM}$, $\mathrm{cosec}\,A=\frac{BM}{AM}$,

故 $\sin A$ 小於 $\tan A$. [$\sin A$ 與 $\tan A$ 之分子相等, 而 $\sin A$ 之分母, 大於 $\tan A$ 之分母故也] $\tan A$ 小於 $\sec A$ 又 $\cot A$ 小於 $\mathrm{cosec}\,A$. [大小關係.] 又[二重關係.]

$$\sin A\cdot\mathrm{cosec}\,A=\frac{BM}{AB}\cdot\frac{AB}{BM}=1,$$

$$\cos A\cdot\sec A=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AB}{AM}=1,$$

$$\tan A\cdot\cot A=\frac{BM}{AM}\cdot\frac{AM}{BM}=1.$$

又[三重關係].

$$\tan A=\frac{BM}{AM}=\frac{BM}{AB}\div\frac{AM}{AB}=\frac{\sin A}{\cos A},$$

$$\cot A=\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{AB}\div\frac{BM}{AB}=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

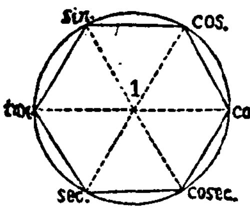
又[平方關係].

$$\sin^2A+\cos^2A=\frac{\overline{BM}^2}{\overline{AB}^2}+\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AB}^2}=1,$$

$$1+\tan^2A=1+\frac{\overline{BM}^2}{\overline{AM}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AM}^2}=\sec^2A,$$

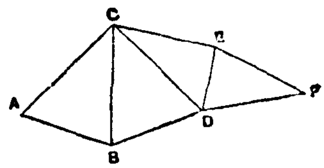
$$1+\cot^2 A=1+\frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BM}^2}$$
$$=\operatorname{cosec}^2 A.$$

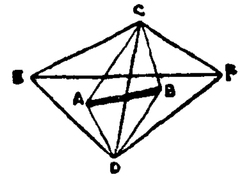
以上八個關係[二重關係三個,三重關係二個,平方關係三個]均非獨立者,自平方關係任意之一個,與其餘關係任意之四個,可求得其餘之三個.以上所示之關係,可自次圖記憶之.此謂之三角比之六角形.[Ratio-hexagon]即將三角函數sin., cos, tan., cot., sec., cosec.順次平列於六角形之角頂,書1於其中心,則(1).左右兩邊向下之值增大.[大小關係SinA < tanA < secA 及 cosA < cotA < cosecA] (2).在對角線兩端二個之積,等於在中心之數,卽1.[二重關係].(3).在連續三角頂之三函數其一端者,等於以他端者除中間者之數.[三重關係].(4).同在水平線上相鄰二數平方之和,等於其下在中間之數之平方.[平方關係]又三角函數,不限於銳角,任意之角皆可.但在第一分面則正弦正切正割爲正,在第二分面之正弦爲正而正切正割爲負,在第三分面則正弦正割爲負,而正切爲正,在第四分面則正弦正切爲負,而正割爲正,而各分面之餘弦餘切餘割之正負,同於正割正弦正切之正負.



三角級數. 目 英 Trigonometrical series. 見級數條.

三角測量. 目 英 Triangulation. 三角測量第一需測基線之器,第二需測角之器.在極小之地,可用鍊測測基線.若極大之地,爲國土測量,則基線之測量,須精密,故須以鋼製之直桿,測量數次,且須檢查溫度,將桿之伸縮,一一算入.[三角網].測量地面連接之三角形,謂之三角網.例如自基線AB,測定F點之位置,則將F點與AB由三角形ABC, BCD, CDE連接之,卽C點之目標,爲自A, B,能望得者,D點之目標,爲自B, C,能望得者,E點之目標,爲自C, D,能望得者,F點之目標,爲自D, E,點能望得者.夫三角形ABC,既測定基線AB,又定測角ABC, BAC,則能自三角形公式,算得AC及BC,而三角形BCD, CDE, DEF,亦次第如此能測定F點之位置.[三角測量之等級]三角測量恆分爲一等[Primary]二等[Secondary]三等[Tertiary]陸地測量部之一等三角,其一面之中等距離約60粁,而二等三角一邊之中等距離約12粁,三等三角一邊之中等距離約4粁.[基線與一等三角一邊之關係]測定基線AB之長,取他二點C, D [取二點C, D令角ACB, ADB爲34°以上60°以下]而計算CD之長,又取他二點E, F,而計算EF之長,如此將AB增大爲CD,又將CD增大爲EF,此EF卽取爲一等三角之基線.





三角傍面臺. 圖 英 Prismatoid. 三角傍面臺,其二底爲在平行之二平面