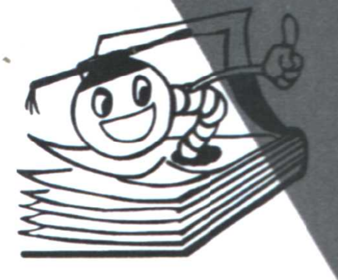
考试虫



2005年

考试虫学习体系

考研数学基础教程

王式安 概率论与数理统计 （执教41年，命题16年，教育部考试中心资深命题专家）
蔡燧林 高等数学 （执教43年，命题 9年，教育部考试中心资深命题专家）
胡金德 线性代数 （执教40年，命题 9年，教育部考试中心资深命题专家）
丁丽娟 高等数学 （执教39年，国内著名考研辅导专家）

- 命题人员浓缩、精炼四本数学教材（高数上下、线代、概率）打造三基
- 历年试题B卷（备选考题）＋阅卷中考生容易出错的试题＋前瞻性试题＝高质量试题

赠30元
网上超值服务

航空工业出版社

2005年

考研数学基础教程

王式安 概率论与数理统计 （执教41年，命题16年，教育部考试中心资深命题专家）
蔡燧林 高等数学 （执教43年，命题 9年，教育部考试中心资深命题专家）
胡金德 线性代数 （执教40年，命题 9年，教育部考试中心资深命题专家）
丁丽娟 高等数学 （执教39年，国内著名考研辅导专家）

10

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学基础教程/王式安等主编. －北京:航空工业出版社,2004.7
ISBN 7-80183-389-9

Ⅰ.考… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 055594 号

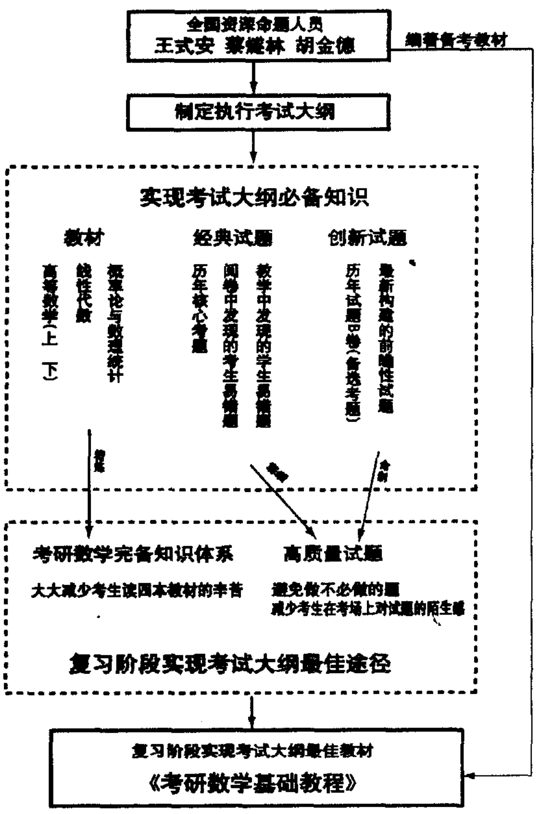
航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里 14 号　100029)
北京威远印刷厂　全国各地新华书店经销
2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月第 1 次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:34.75　字数:550 千字
印数:1～10000 册　定价:39.00 元

前　　言

数学历来堪称最严谨、最理性的学科。然而，很多考生在考研数学备考时却显得有些盲目。有些同学在基本功不扎实的情况下贸然采用题海战术大量做题，结果越做心里越没底，心里越没底越做题，从而陷入一个封闭的怪圈；还有些同学专抠难题，一道题啃了一个星期还啃不下来，向我请教，我说这个题是超纲题，考研是不会考的。这种情况相当普遍。

相当多的考生给人的印象是数学基础薄弱，不知从何补起。现行的考研大纲所涉及的大学数学教科书篇幅较大，如果从头到尾地复习一遍会耗费很多时间。考生手头的考研数学辅导书有些只是急功近利地要考生背下几个僵硬的解题套路，忽视了基础知识与基本方法的讲解和训练，没有从根本上提高考生运用基本知识和基本方法解决普遍性问题的能力。雪上加霜的是模拟题质量良莠不齐，而同学们又缺乏鉴别力，盲目从众，等发现问题已经来不及补救，时间都已经浪费了。结果，很多考生在数学上花了很多时间和精力，经过长时间的复习，而考出来的成绩却很不理想。

鉴于当前考研数学的严峻形势，《考试虫丛书》有幸请到教育部考试中心多位资深命题人员沿着他们多年的命题思路，为同学们精心打造了本书。



高等数学由蔡燧林教授和丁丽娟教授编写。蔡燧林教授是教育部考试中心资深命题专家，具有 43 年的大学执教经验和 9 年的全国考研命题经验；丁丽娟教授是国内著名考研辅导

专家,从事大学教学 39 年。线性代数由胡金德教授编写,他是教育部考试中心资深命题专家,有 40 年的大学执教经验和 9 年的命题经验。概率论与数理统计由王式安教授编写,他是教育部考试中心资深命题专家,有 41 年的执教经验和 16 年的命题经验。

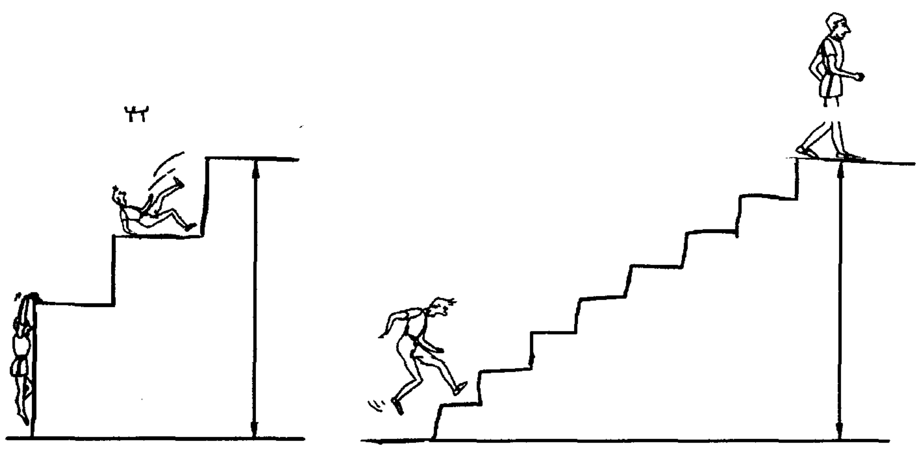
论考研数学基本功

科学分成四个层次,从高到低依次为:科学精神、科学思想、科学方法和科学知识。本书是建立在科学思想和科学方法层面上的,重点是三基。三基 = 基本概念 + 基本理论 + 基本方法。

目前,在考研数学备考复习中浮躁之风甚烈,各种急功近利的辅导书应运而生,题海战术、题型妙招层出不穷。事实上,题型是建立在科学方法、科学知识基础上的,是对普遍适用方法的局部有限固化,某些情况下有一定作用,其特点是比较简便。所谓的题型和思维定式都有明显的局限性,这个道理就像下围棋背棋谱一样,如果不懂棋理只在表面上会几个招式,很难想象这个人在比赛中能够胜棋。同理,如果复习的精力主要放在掌握题型上,在面对以能力测试为指导思想的综合考卷时,必然会遇到套不上题型的题,无法取得好成绩。

思想和方法为本,题型则是标;方法是无形的,题型是有形的;方法是普遍的,题型是特殊的。事实上本书在三基原则指导下,已经把基本题型有机地包含到方法之中了。

本书的作者既是大纲的制定者,又是大纲的执行者、资深命题人,他们根据自己对大纲的理解把考研数学相关教科书《高等数学》(同济版 上下册)、《线性代数》和《概率论与数理统计》加以提炼,形成了本书完备的知识体系。本书中数学基础知识讲述的篇幅尽管大大低于原来四本书的总和,但考研数学所需相关知识点并无任何遗漏,体现了编写者对考试大纲准确、深刻、独特的理解和把握。本书的编写者非常重视知识的系统性、连续性和渐进性,从而避免了"大跃进"所产生的问题,如下图:



同学们可以放心地跟着命题者有侧重点地夯实基础知识,免受苦读四本教材的磨难。

论题

很多同学考研数学成绩提高缓慢的原因是,做了很多不该做的题,把精力花在大量低质量的题上,这些题包括:

※超纲题:把数学系的专业内容插到工科辅导材料的题目中,此举貌似高深,但实质却是

误导。这些知识不具系统性,考生不但记不住,而且根本就不可能学会,白白耗费大量的时间。最重要的是:考研试题不允许超纲,这些内容从未考过。应该说这些难题答一答对考生有好处,但在有限的备考复习时间中去做这类题,既不能解决当务之急,又要影响考生的情绪和分散注意力。实际上任意一本数学专业教材都比它有用,具有良好职业道德的教师根本不会把这种题编入书中。比如微分方程的算子法,没几个考生学懂了,正确用该法解题在考试中得分的廖廖无几。请注意:数学是一个完备的体系,零散学习难收佳效。

※过于简单的题:做这样的试题仅须套一下公式,虽涉及的考点不多,但计算量不小。

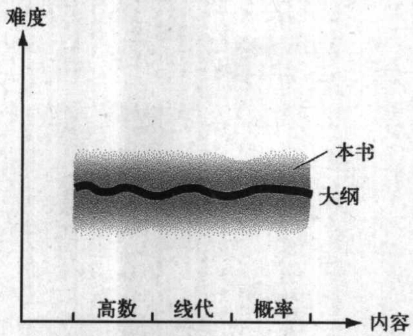
※偏题:这种题不具普遍性,解这种题的方法当然没有必要花精力去探索。

※泡沫题:辅导书为拼凑篇幅而编造的虚拟题,无实际用途。

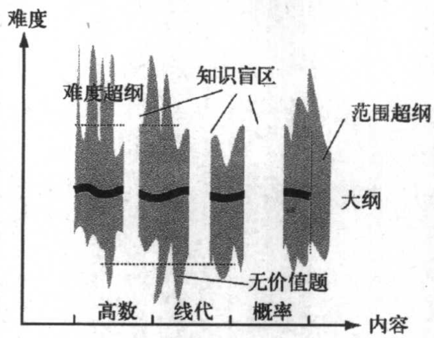
※错题:试题本身存在致命的缺陷和逻辑错误。很多同学把错题、错解奉若神明。

顺便提一下,数学考不好非常打击人的自信心,因为人们通常把数学和智力联系在一起。但据我观察,很多人数学考不好是因为训练手段不科学,并不是智力问题。

本书的试题包括:阅卷过程中发现考生最容易出错的试题;40 年教学过程中总结的同学们易犯错误的试题和历年重点试题。我们建议考生千万不要做不应该做的题目,即超纲题、难题、偏题、怪题和泡沫题。最难能可贵的是本书包含了考生无法见到的历年备选考题和命题人员最新构建的前瞻性试题。这些试题构思巧妙,独具匠心。做此类题,既巩固知识,又学习方法;既锻炼逻辑分析能力和数学思想,又可减少考生在考场上遇到新题时的陌生感。



本书



有些辅导书

考试虫丛书一贯以科学性见长。本书设计合理、编辑严谨,全部试题均经过仔细校对和复算,准确率高。本书将为考生铺平一条省时、高效、安全的通道。

数学辅导书种类繁多,学生因水平所限难以判断其良莠,等考试过后发觉时已被误导和耽误。机遇和前途极可能由此而错失!本书的内容是国内这方面权威几十年执教和命题的升华和实例化,绝无急功近利、哗众取宠之意。随着时间的延续,广大读者一定会认识到本书的水准和内涵。

考试虫

目　　录

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　微 积 分

第一章 函数、极限、连续

本章考试要求 **理解与掌握(或并会用)**:函数的概念及其表示,建立简单应用问题中的函数关系,复合函数与分段函数,基本初等函数的性质及图形,极限与左、右极限的概念以及它们之间的关系,极限的性质及运算法则,极限存在的两个准则并会用它们求极限,用两个重要极限求极限,无穷小与无穷大的概念,无穷小的比较的概念并会用等价无穷小求极限,函数的连续性(包括左、右连续)的概念、间断点的分类.

会求与了解 函数的单调性、周期性和有界性.连续函数的性质与初等函数的连续性,闭区间上的连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)以及这些性质的应用.

第一节 函 数

一、函数的概念

1.邻域:设 $\delta > 0$,实数集 $U_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的 δ 的邻域,如果不必说及邻域半径 δ 的大小,则简记为 $U(x_0)$,称为 x_0 的某邻域,$\mathring{U}_\delta(x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域,类似地有记号 $\mathring{U}(x_0)$ 及相应的名称.

此外还有 x_0 的左(右)半 δ 邻域与 x_0 的左(右)半去心 δ 邻域等概念.

引入 ∞ 的(去心)邻域一词在今后的叙述上会带来一些方便.这是指:$U = \{x \mid |x| > X\}$,其中 X 为充分大的正数.

2.函数的定义:设有两个变量 x 与 y,X 是一个非空的实数集.若存在一个对应规则 f,使得对于每一个 $x \in X$,按照这个规则,y 有惟一确定的实数值与之对应,则称 f 是定义在 X 上的一个函数,x 称为自变量,X 称为函数 f 的定义域,y 称因变量.函数 f 在 $x \in X$ 对应的 y 的值,称为函数值.记为

$$y = f(x), \quad x \in X$$

函数值所成的集合,常记为 Y,$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$,称为函数的值域,以后“实数”的实字常省去.

习惯上,也称 y 或 $f(x)$ 为 x 的函数.

二、函数的表示

1.用一个解析式子表示:例如 $y = \sin x, -\infty < x < +\infty$;$y = \lg x, x > 0$,等等.这是常用的一种表示方式.如不作另外说明,用一个解析式子表示的函数的定义域是指该式的自然定义域.

2.分段函数:在定义域的不同部分用不同的解析式子表示的函数称为分段函数.

例如从邮局寄一封平信,其重量 x(克)与所付邮资 y(元)之间的函数关系可由如下分段函数表达:

$$y=\begin{cases}0.8, & 0<x\leqslant 20,\\ 1.6, & 20<x\leqslant 40,\\ 2.4, & 40<x\leqslant 60,\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

注 分段函数是一个函数,不能认为每一段是一个函数、是多个函数.

常见的几种分段函数:

例 1 绝对值函数(其图像如图 1-1)

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例 2 符号函数(其图像如图 1-2)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

它表示 x 的符号.显然有

$$|x|=x\operatorname{sgn}x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

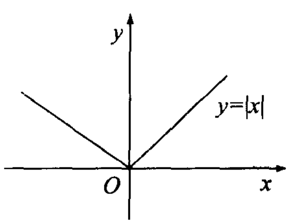


图 1-1

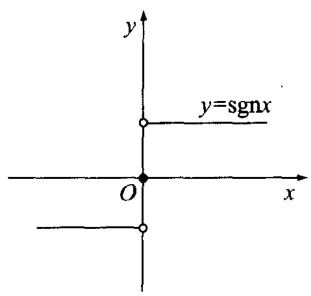


图 1-2

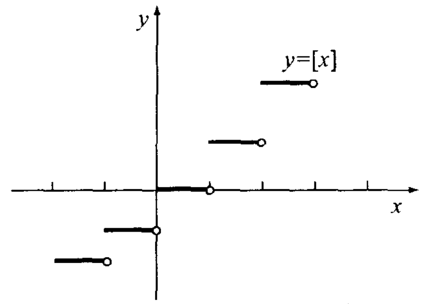


图 1-3

例 3 取整函数$[x]$,它表示不超过 x 的最大整数.例如,$[3.2]=3,[4]=4,[-\pi]=-4$.一般,$[x]=n$,当 $n\leqslant x<n+1,n=\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$.

$y=[x]$ 的图像如图 1-3,显然有性质:

对于 $x\in(-\infty,+\infty)$,有$[x]\leqslant x<[x]+1$,且$[x+1]=[x]+1$.

例 4 狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时},\\ 0, & x\text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

狄利克莱函数无法描出它的图像.

3.隐函数:设 x 在某数集 X 内每取一个值时,由方程 $F(x,y)=0$ 可惟一确定一个 y 的值,则称由 $F(x,y)=0$ 确定一个隐函数 y,虽然不一定能将 y 明显地解出来.

4.由参数式表示的函数(此段数学三、四不要求):设 $x=x(t),y=y(t)$.若 x 在某数集 X 内每取一个值时,由 $x=x(t)$ 可惟一确定一个 t 的值,并且对于此 t,由 $y=y(t)$ 可确定惟一的一个 y 的值,则称由参数式 $x=x(t),y=y(t)$ 确定了 y 为 x 的函数.

例 5 半径为 a 的圆周上一个定点 P.开始时圆在点 P 与 x 轴在原点相切,让圆沿 x 轴自左向右滚动,求点 P 的运动轨线的方程(如图 1-4).

解　如图1-4，并设运动过程中的中心角为 t，P 的坐标为 (x,y)，于是得到轨线的参数方程：

$$\begin{cases} x = \overline{OD} - \overline{PA} = \overset{\frown}{PD} - a\sin t = a(t - \sin t) \xlongequal{\text{记为}} x(t), \\ y = \overline{DA} = \overline{DC} - \overline{AC} = a - a\cos t = a(1 - \cos t) \xlongequal{\text{记为}} y(t). \end{cases}$$

此轨线称为摆线.设想从第一式中解出 $t = \varphi(x)$，代入第二式中，便得摆线的直角坐标方程，即得 y 依赖于 x 的函数关系.但是事实上，用简洁的表达式 $t = \varphi(x)$ 是不可能的，亦即直接得到 y 与 x 的关系是不可能的，这样就更显得用参数式表示的重要性了.

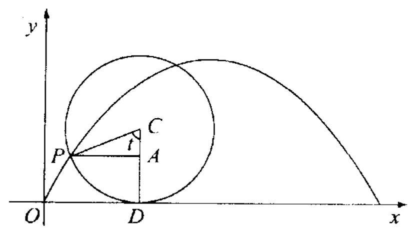


图 1-4

除了上面这些表示方式之外，还有用图形表示、用表格表示，将来还会见到用极限表示、用变上限的积分表示、用级数表示函数等等.

三、函数的几种特性

1.单调性：设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果对于任意的 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$，就一定有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加(减少)的.如果一定有

$$f(x_1) < f(x_2), \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是严格单调增加(减少)的.

2.奇、偶性：设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某数集 X 上有定义，并且对于任意 $x \in X$，必有 $f(-x) = f(x)(f(-x) = -f(x))$，则称 $f(x)$ 在 X 上是偶(奇)函数.

在直角坐标 xOy 中，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点 O 对称.

任一定义在对称于原点的数集 X 上的函数 $f(x)$，必可分解成一奇一偶函数之和：

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)].$$

3.周期性：设 $f(x)$ 的定义域是数集 X，如果存在常数 $T > 0$，当 $x \in X$ 时，有 $x \pm T \in X$，并且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为它的一个周期.通常称的周期是指使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的最小正数 T(如果存在的话).

4.有界性：设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果存在常数 M，当 $x \in X$ 时 $f(x) \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界；如果存在 m，当 $x \in X$ 时 $f(x) \geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界；如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

定义中的 m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 X 的下界与上界.显然，如果 $m(M)$ 是 $f(x)$ 在 X 的下(上)界，则比 m 小(比 M 大)的任何数，都是 $f(x)$ 在 X 的下(上)界.

如果不论 M 多么大，总有 $x \in X$ 使 $f(x) > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无上界；类似地可以定义无下界.

例如，函数 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界；$a^x(a > 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有下界，无上界；$\log_a x(a > 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无下界，也无上界.函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无上界，有下界.对于 $\delta > 0, f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $[\delta, +\infty]$ 上既有上界又有下界.可见一个函数有界与否，与 x

的取值范围 X 有关.

四、反函数与复合函数

1.反函数:设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 X,值域是 Y.如果对于 Y 内的每一个 y,由 $y=f(x)$ 可以确定惟一的 $x\in X$.这样在 Y 上定义了一个函数,称为 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$ 或 $x=\varphi(y),y\in Y$.

由反函数的定义,有

$$y\equiv f(f^{-1}(y)),\quad y\in Y;\quad x\equiv f^{-1}(f(x)),\quad x\in X$$

有时,也常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.

在同一坐标系中,$y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是一致的.而 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 6　求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1\end{cases}$$ 的反函数.

解　当 $x\leqslant 1$ 时,由 $y=(x-1)^2$ 得 $0\leqslant y<+\infty$,并解得 $x=f^{-1}(y)=1-\sqrt{y}$.当 $x>1$ 时,由 $y=\dfrac{1}{1-x}$,得 $-\infty<y<0$,并解得 $x=f^{-1}(y)=1-\dfrac{1}{y}$.所以反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}1-\sqrt{y}, & 0\leqslant y<+\infty,\\ 1-\dfrac{1}{y}, & -\infty<y<0.\end{cases}$$

或写成

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x}, & 0\leqslant x<+\infty,\\ 1-\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0.\end{cases}$$

2.复合函数:设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 D_φ,值域是 R_φ.若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$($\varnothing$ 表示空集),则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数,它的定义域是 $\{x\mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}$.u 称为中间变量,x 称为自变量.

例 7　设 $f(x)$ 严格单调增加,$\varphi(x)$ 严格单调减少,并且可以构成下面所见的复合函数,则　(　　)

(A)$f(\varphi(x))$ 必严格单调增.　　(B)$\varphi(f(x))$ 必严格单调减.

(C)$f(x)\varphi(x)$ 必严格单调增.　　(D)$f(x)\varphi(x)$ 必严格单调减.

解　设 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $\varphi(f(x_1))>\varphi(f(x_2))$.应选(B).其他均可举出反例.

五、初等函数

1.常值函数:C(C 为常数),$x\in R$.

2.幂函数:x^α(α 为常数),其定义域由 α 确定,但不论 α 如何,在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.

3.指数函数:a^x(常数 $a>0,a\neq 1$),$x\in R$.

4.对数函数:$\log_a x$(常数 $a>0,a\neq 1$),$x\in(0,+\infty)$.

5.三角函数:$\sin x,x\in(-\infty,+\infty)$,$\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$,$\tan x,x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$k \in Z$.$\cot x, x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in Z$.

6.反三角函数:$\arcsin x, x \in [-1,1]$;$\arccos x, x \in [-1,1]$;$\arctan x, x \in R$;$\operatorname{arccot} x, x \in R$.

以上六类函数称基本初等函数,由它们经有限次加、减、乘、除及复合而成并用一个式子表示的函数称初等函数.

六、典型例题分析

1.求复合函数定义域

例7　设$f(x)$的定义域是$[0,1]$,常数$a > 0$.求$f(x)+f(x+a)$的定义域.

解　$f(x+a)$的定义域是$0 \leqslant x+a \leqslant 1$,即$-a \leqslant x \leqslant 1-a$.而$f(x)$的定义域是$0 \leqslant x \leqslant 1$.若$0 < a \leqslant 1$,则$f(x)+f(x+a)$的定义域是$0 \leqslant x \leqslant 1-a$.若$a > 1$,则$f(x)+f(x+a)$无定义.

例8　设$f(x) = \ln\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,$\varphi(x) = \arcsin x$,求$f(\varphi(x))$与$\varphi(f(x))$的定义域.

解　由$f(\varphi(x)) = \ln\left(\varphi(x)+\frac{\pi}{4}\right)$知$\varphi(x) > -\frac{\pi}{4}$,从而$\arcsin x > -\frac{\pi}{4}$.又$\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$,所以$-\frac{\pi}{4} < \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$.于是推知$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 1$.即$f(\varphi(x))$的定义域为$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 1$.

由$\varphi(f(x)) = \arcsin f(x)$知$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.从而$-1 \leqslant \ln\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$.所以

$e^{-1}-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant e-\frac{\pi}{4}$.即$\varphi(f(x))$的定义域为$e^{-1}-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant e-\frac{\pi}{4}$.

注　求复合函数的定义域方法如下:先求最外层的定义域,以此作为第二层函数的值域求出第二层的定义域,如此直至最后获得自变量的变化范围.

2.求分段函数的复合函数

例9　设$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$,求$f\{f[f(x)]\}$.

解　$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |f(x)| \leqslant 1, \\ 0, & |f(x)| > 1. \end{cases}$

而　$|f(x)| \leqslant 1 \Leftrightarrow$一切$x$,$|f(x)| > 1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$,

所以　$f[f(x)] = 1$,对一切x.

于是　$f\{f[f(x)]\} = 1$,对一切x.

3.已知$f(x)$在某区间上的表达式,在一定条件下求$f(x)$在另一指定区间上的表达式

例10　已知$f(x)$是周期为2的奇函数,且当$0 < x < 1$时$f(x) = e^x + x^2 + x + 1$,求当$1 < x < 2$时$f(x)$的表达式.

解　当$0 < x < 1$时,$f(x) = e^x + x^2 + x + 1$;

当$-1 < x < 0$时,$0 < -x < 1$,从而

$$f(x) = -f(-x) = -[e^{-x} + (-x)^2 - x + 1] = -e^{-x} - x^2 + x - 1;$$

当$1 < x < 2$时,$-1 < x-2 < 0$,于是

$$\begin{aligned} f(x) = f(x-2) &= -e^{-(x-2)} - (x-2)^2 + (x-2) - 1 \\ &= -e^{-x+2} - (x-2)^2 + x - 3. \end{aligned}$$