数学分析
学习指导书

下 册

刘玉琏　苑德新　编

★ 高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

数学分析学习指导书

下　册

刘玉琏　苑德新　编

高等教育出版社

本书是与刘玉琏编的中学教师培训教材《数学分析》下册配套的学习指导书。按教材章次，分章对应编写，每章包括内容结构、学习要求、补充说明、补充例题、自我检查题等五部分。内容结构主要是概述教材内容的安排、处理及该内容所处的地位、作用；补充说明和补充例题主要是帮助读者深化、理解教材的有关内容。书末附有各章自我检查题答案。

数学分析学习指导书

下 册

刘玉琏 苑德新 编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 4 字数 95,000
1988 年 10 月第 1 版 1989 年 4 月第 2 次印刷
印数 15 661—30 670

ISBN 7-04-000609-X/O·239

定价 1.15 元

目　录

第十章 数值级数

一、内容结构

本章有三节十段. 数值级数简称为级数，它是数学分析不可缺少的组成部分. 在中小学«数学»中，虽然没有级数的内容，但是级数的问题我们早在算术中就遇到了. 例如，无限小数 $a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 实质是一个级数，即

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots.$$

因为在算术中没有也不可能有极限运算，所以在那里只能就数论数，不可能涉及级数的问题. 虽然收敛级数及其和数与收敛数列及其极限可以互相转化，并有异曲同工之效，但是常常出现可将某数(极限)自然地表为级数之和，而形式又特别简单，显现出级数的特殊功用.

级数收敛和发散的概念(10.1.1)是本章立论的基础. 收敛级数求和，以及讨论收敛级数的性质都是建立在收敛概念的基础之上的. 有了等比级数求和的公式，顺便给出了无限循环小数化为分数(10.1.2)的一般规律. 只有有了级数的收敛概念才真正解决了无限小数是一个数这个理论问题. 级数理论的核心问题是级数的收敛问题，为此自然要讨论收敛级数的性质(10.1.3). 例如，级数收敛的必要条件，收敛级数的线性性(定理 2 与定理 3) 等，因为级数的收敛与其部分和数列的收敛是等价的，所以可以平行地得到级数敛散性的必要充分条件，即级数的柯西收敛准则(10.1.4). 一般来说，应用柯西收敛准则判别级数的敛散性需要经过复杂的计算，并不方便. 为此要进一步讨论判别级数收敛的一些充分条件.

从级数的总体来说，只有两种：同号级数与变号级数．同号级数的收敛性可归结为正项级数的收敛性．因为正项级数的部分和数列是单调增加的，所以正项级数有一些比较简便的敛散性判别法(10.2.1, 10.2.2)．例如，比较判别法．从而与几何级数比较就得出柯西判别法和达朗贝尔判别法．

交错级数是一类特殊的变号级数．判别交错级数收敛性的充分条件有莱布尼兹判别法(10.3.1)． 从收敛级数的总体来说，只有绝对收敛（同号收敛级数都是绝对收敛）和条件收敛(10.3.2)．收敛级数只满足结合律，而不满足交换律和分配律(10.3.4)，只有绝对收敛的级数才满足交换律和分配律(10.3.3)．

二、学习要求

1．掌握级数收敛(级数的和)与发散的概念，熟练地掌握判别级数敛散性的判别法．

2．知道收敛级数的基本性质，记住几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 和广义调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性．

3．掌握级数绝对收敛和条件收敛的概念，了解两类收敛级数在运算(交换律、分配律)上的差别．

4．具有证明级数中一些比较简单的理论问题的能力．

三、补充说明

1．级数与数列

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性归结为它的部分和数列 $\{S_n\}$ $(S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k)$ 的敛散性，即级数的敛散性转化为数列的敛散性．反之，数列 $\{a_n\}$ 的敛散性又可转化为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1}) \quad (令\ a_0=0)$$

的敛散性．事实上，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 的 n 项部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_n-a_{n-1})=a_n$$

恰是数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n．

因此，级数与数列只是形式上的不同，没有本质的区别．所以我们说："研究级数及其和只不过是研究数列及其极限的一种新形式"．而级数这种形式有着特殊的意义．例如，我们已知，圆周率 π 是一个无理数，它可以表为十进无限非循环小数，即

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\cdots$$

显然，我们找不到一个规律能够说出小数点后的第 n 位（譬如，$n=500$）是几．尽管如此，但是 $\frac{\pi}{4}$ 却能写成下面级数的形式（见11.3.3 例 4）：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots$$

或
$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots\right).$$

于是，数 π 可表为一般项很有规律的级数，显现出级数的优越性．

正是因为级数与数列的敛散性可互相转化，所以收敛级数与收敛数列的有些性质也是平行的．现列表对比如下．

	级　　数	数　　列
线性性质	若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，其和分别是 A 与 B，则 $$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$$ 也收敛，其和是 $aA+bB$，其中 a 与 b 是常数．	若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，其极限分别是 a 与 b，则 $$\{\alpha a_n+\beta b_n\}$$ 也收敛，其极限是 $\alpha a+\beta b$，其中 α，β 是常数．

(续表)

	级　　数	数　　列
收敛的充分条件	若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.	若数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界，则 $\{a_n\}$ 收敛.
柯西收敛准则	级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n>N,$ $\forall p\in\mathbf{N} \Rightarrow$ $\lvert u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}\rvert<\varepsilon.$	数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n>N,$ $\forall p\in\mathbf{N} \Rightarrow$ $\lvert a_{n+p}-a_n\rvert<\varepsilon.$

因为级数是无限和的形式，所以判别级数的收敛性比判别数列的收敛性多了一些特殊的方法.

2. 关于级数的敛散性

我们已知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$，但它不是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分条件，即当 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散．那么为什么当 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有的收敛有的发散呢？下面分别讨论正项级数与变号级数两种情况：

1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ $(S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k)$ 是单调增加的．当 $n\to\infty$ 时，部分和数列 $\{S_n\}$ 的变化只有两种情况：一是部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界．此时只有一般项 u_n 趋近于 0 的速度“足够快”才能使数列 $\{S_n\}$ 有上界．从而，一般项 u_n 趋近于 0 的速度“足够快”才能使正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；二是部分和数列 $\{S_n\}$ 无上界．此时一般项 u_n 趋近于 0 的速度必然“相当慢”才能使数列 $\{S_n\}$ 无上界．从而，一般项 u_n 趋近于 0 的速度“相当慢”才能使正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 例如, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 之所以收敛, 是由于它的一般项 $u_n=\frac{1}{n^2}$ 趋近于 $0(n\to\infty)$"足够快"; 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 之所以发散, 是由于它的一般项 $u_n=\frac{1}{n}$ 趋近于 $0(n\to\infty)$ "相当慢". 这就是说, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0)$能否收敛, 关键在于它的一般项 u_n 趋近于 0 的"速度". 正项级数敛散性的比较判别法实质就是比较两个正项级数一般项趋近于 0 的速度. 若 u_n 趋近于 0 的速度比一个收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的一般项 v_n 趋近于 0 的速度快, 即 $\forall n\in\mathbf{N}$, $u_n\leqslant v_n$, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛; 若 u_n 趋近于 0 的速度比一个发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的一般项 v_n 趋近于 0 的速度慢, 即 $\forall n\in\mathbf{N}$, $u_n\geqslant v_n$, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是变号级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 则两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$(见 10.3.3的引理及其推论). 由上面已知, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 收敛与否取决于它们的一般项(u_n^+ 与 u_n^-)趋近于 0 的速度, 所以变号级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的绝对收敛仍取决于变号级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项 u_n 趋近于 0 的速度. 因此, 交换绝对收敛级数无限多项的位置不会改变原级数一般项趋近于 0 的速度, 从而交换其项的新级数也收敛, 其和不变.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛, 则两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都发散到正无穷大(见练习题 10.3 第 9 题). 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收

敛，虽然它的一般项 u_n 趋近于0，但是其收敛性不完全取决于 u_n 趋近于0的速度，而取决于变号级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n^+ - u_n^-)$$

的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k^+ - u_k^-)$ 的代数运算．由于对 S_n 进行代数运算时，正项与负项互相抵消，并且部分和数列 $\{S_n\}$ 有稳定的变化趋势，变号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 才收敛．由于交换条件收敛级数无限多项的位置能够改变原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k^+ - u_k^-)$ 的结构，所以不仅能够改变原级数的和，也能使其发散．

3．关于正项级数的敛散性判别法

正项级数收敛的必要充分条件是它的单调增加的部分和数列有上界．这就是正项级数敛散性判别法的理论基础．在此基础上有比较判别法，它有两种形式：有限形式和极限形式．

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 用 (u) 表示，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 用 (v) 表示．

比较判别法

有限形式	极限形式
设 $\exists N\in\mathbf{N}$，$\exists c>0$，$\forall n\geqslant N$，有 $u_n\leqslant cv_n$．	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k$，$(0\leqslant k\leqslant+\infty)$
1）若 (v) 收敛，则 (u) 收敛．	1）若 (v) 收敛，且 $k\neq+\infty$，则 (u) 收敛．
2）若 (u) 发散，则 (v) 发散．	2）若 (v) 发散，且 $k\neq 0$，则 (u) 发散．

在比较判别法中，将级数 (v) 选作几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$，即将级数 (u) 与几何级数比较，有下列两个敛散性判别法：

柯西判别法

有限形式	极限形式
1) 若 $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n\geqslant N$, 有 $u_n\leqslant q^n$ 或 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q$, 且 $q<1$, 则 (u) 收敛. 2) 若 $\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists m>n$, 有 $\sqrt[m]{u_m}\geqslant 1$, 则 (u) 发散.	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, 1) 若 $l<1$, 则 (u) 收敛. 2) 若 $l>1$, 则 (u) 发散.

达朗贝尔判别法

1) 若 $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n\geqslant N$, 有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$ 或 $u_{n+1}\leqslant qu_n$, 且 $q<1$, 则 (u) 收敛. 2) 若 $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n\geqslant N$, 有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$ 则 (u) 发散.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 1) 若 $l<1$, 则 (u) 收敛. 2) 若 $l>1$, 则 (u) 发散.

尽管柯西判别法与达朗贝尔判别法都是与几何级数比较得到，但是这两个判别法略有区别．我们能够证明，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$(证明见下注)．从而判别正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性，若能够用达朗贝尔判别法，则一定能够用柯西判别法．反之则不然．例如，判别正项级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots$$

的敛散性．若用柯西判别法，$\forall n\in\mathbf{N}$, 有

$$\sqrt[k]{u_k}=\begin{cases}\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\end{cases}\leqslant\frac{1}{2},\quad \begin{matrix}当\ k=2n-1, \\ 当\ k=2n,\end{matrix}$$

则该级数收敛. 而用达朗贝尔判别法, $\forall n\in\mathbf{N}$, 有

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k<1, & 当\ k=2n-1, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k>1, & 当\ k=2n,\end{cases}$$

该级数的敛散性无法确定, 即达朗贝尔判别法失效.

这两个判别法的极限形式, 当

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1\quad 与\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1,$$

都失效, 即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散.

注 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$.

证明 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n\geqslant N\Rightarrow$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon\text{或 } l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon.$$

当 $n=N$ 时, 有 $l-\varepsilon<\frac{u_{N+1}}{u_N}<l+\varepsilon$. (固定 $N\in\mathbf{N}$)

当 $n=N+1$ 时, 有 $l-\varepsilon<\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}<l+\varepsilon$.

……

当 $n=N+m-1$ 时, 有 $l-\varepsilon<\frac{u_{N+m}}{u_{N+m-1}}<l+\varepsilon$.

将这 m 个不等式相乘, 有

$$(l-\varepsilon)^m<\frac{u_{N+m}}{u_N}<(l+\varepsilon)^m$$

或
$$(l-\varepsilon)^m u_N<u_{N+m}<(l+\varepsilon)^m u_N.$$

将这个不等式每项开 $N+m$ 次方, 有

$$(l-\varepsilon)^{\frac{m}{N+m}}u_N^{\frac{1}{N+m}}<\sqrt[N+m]{u_{N+m}}<(l+\varepsilon)^{\frac{m}{N+m}}u_N^{\frac{1}{N+m}}.$$

已知 $\lim\limits_{m\to\infty}(l\pm\varepsilon)^{\frac{m}{N+m}}u_N^{\frac{1}{N+m}}=l\pm\varepsilon$. 从而，当 $m\to\infty$ 时，有

$$l-\varepsilon\leqslant\lim_{m\to\infty}\sqrt[N+m]{u_{N+m}}\leqslant l+\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l.$$

四、补 充 例 题

例 1 求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}$，$a$ 是常数，$a\neq0$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解法 首先求部分和，其次取极限.

解 (1) 因为

$$\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right),$$

所以，它的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+k-1)(a+k)(a+k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}-\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a(a+1)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right).$$

于是，级数的和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a(a+1)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right)=\frac{1}{2a(a+1)}.$$

(2) 因为 $\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$
$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

所以，它的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\right]$$
$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1).$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-(\sqrt{2}-1).$$

于是，级数的和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-(\sqrt{2}-1)\right]=1-\sqrt{2}.$$

例 2 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)\quad(a>1)$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.

解法 应用比较判别法

解 (1) 已知有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a>0,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)$ 发散.

(2) 已知有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}=\frac{1}{2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$收敛。

(3) 已知有不等式(见教材的预备知识)

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

有 $$0<\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$收敛。

例 3 证明，当 $p>1$ 时，下列级数都收敛：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$. (2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$.

证法 应用练习题 10.2 第 12 题。

证明 (1) 已知数列$\left\{\frac{1}{n(\ln n)^p}\right\}$是正的单调减少的，且

$$2^n u_{2^n}=2^n\cdot\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p}=\frac{1}{(n\ln 2)^p}=\frac{1}{(\ln 2)^p n^p},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n u_{2^n}=\frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，则级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛。

(2) 已知数列$\left\{\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}\right\}$是正的单调减少的，且

$$2^n u_{2^n}=2^n\frac{1}{2^n\ln 2^n\cdot(\ln\ln 2^n)^p}=\frac{1}{n\ln 2(\ln n+\ln\ln 2)^p}.$$

有极限 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln 2(\ln n+\ln\ln 2)^p}}{\frac{1}{n(\ln n)^p}}=\frac{1}{\ln 2}>0,$$

由(1)知，当 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛，则级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2(\ln n+\ln\ln 2)^p}$$

收敛．于是，当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ 收敛．

说明 当 $p>1$ 时，正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p},\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$$

都收敛，依次后者比前者收敛较慢（即一般项趋近于 0 的速度较慢）．当 $p\leqslant 1$ 时，它们都是发散的．

例 4 证明，若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也发散．

证法 应用级数的柯西收敛准则．

证明 已知 $S_1<S_2<\cdots<S_n<\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$．

$\forall m\in\mathbf{N}$，将 m 固定，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_m}{S_{m+n}}=0$，即 $\exists n\in\mathbf{N}$，使 $\frac{S_m}{S_{m+n}}<\frac{1}{2}$．于是，

$$\exists\ \frac{1}{2}>0,\ \forall N\in\mathbf{N},\ \exists n,\ m>N,\text{有}$$

$$\frac{a_{m+1}}{S_{m+1}}+\frac{a_{m+2}}{S_{m+2}}+\cdots+\frac{a_{m+n}}{S_{m+n}}>\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+n}}{S_{m+n}}$$

$$=\frac{S_{m+n}-S_m}{S_{m+n}}=1-\frac{S_m}{S_{m+n}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也发散．

说明 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{S_n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的一般项之比，有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{S}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=0$$

表明，当 a_n 是无穷小时，$\frac{a_n}{S_n}$ 是 a_n 的高阶无穷小，即 $\frac{a_n}{S_n}$ 趋近于 0 的速度比 a_n 快．于是，例 4 说明，任意正项发散级数总存在比它

发散更慢的发散级数.

例 5 (拉阿伯判别法)若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant r>1\ \left(\text{或}\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leqslant 1\right),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛(或发散).

证法 应用比较判别法.

证明 首先证明收敛性. 不妨设 $n\in\mathbf{N}$, 有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant r\ \text{或}\ \frac{u_n}{u_{n+1}}\geqslant 1+\frac{r}{n}.$$

任意取定 p, 使 $1<p<r$. 当 n 充分大时, 有

$$1+\frac{r}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p. ①$$

从而, 当 n 充分大时, 有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}\geqslant 1+\frac{r}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p$$

或

$$u_{n+1}<u_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^p. ②$$

---

① 已知极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}=p<r,$$

即 $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}<r\ \text{或}\ 1+\frac{r}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p.$$

② 当 n 充分大时, 且 $p>1$, 这个不等式 $u_{n+1}<u_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ 可改写为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^p}{\left(\frac{1}{n}\right)^p}.$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛. 由本章"自我检查题"第 9 题, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.