高中
数学教学讲座

主编　翟连林　杨志刚

北京出版社

目　录

第一讲　集合 映射 函数

一、学习目标

1. 掌握集合、映射的有关概念，能正确运用集合的两种表示法，掌握求子集以及交、并、补集的运算，并能熟练运用这些知识解题.

2. 掌握函数概念的三要素——定义域、值域、对应法则，反函数概念及求法.

3. 掌握函数的单调性、奇偶性、周期性和函数的图象，并能综合运用.

二、重、难点分析

1. 集合作为高中代数的基础，以其灵活多变的形式，对初等数学的各个分支具有广泛的应用性和渗透性

例 1　设方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根为 α、β，方程 $x^2-bx+c=0$ 的两根为 δ、γ，又 α、β、γ、δ 互不相等，设 $M=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，$S=\{x+y\mid x\in M,y\in M$ 且 $x\neq y\}=\{5,7,8,9,10,12\}$，$P=\{xy\mid x\in M,y\in M$ 且 $x\neq y\}=\{6,10,14,15,21,35\}$. 求 a、b、c 的值.

思路分析：关键是 S、P 要用与 a、b、c 有关的 α、β、γ、δ 来表示，并注意 $b=\alpha\cdot\beta=\gamma+\delta$ 是 S 与 P 的公共元素.

解：依题意 $S=\{\alpha+\beta,\alpha+\gamma,\alpha+\delta,\beta+\gamma,\beta+\delta,\gamma+\delta\}=\{5,7,8,9,10,12\}$，

$P=\{\alpha\beta,\alpha\gamma,\alpha\delta,\beta\gamma,\beta\delta,\gamma\delta\}=\{6,10,14,15,21,35\}$.

S 中各元素相加，得 $3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=51$，即 $a+b=17$ ①

P 中各元素相乘，得 $(\alpha\beta\gamma\delta)^3=210^3$，即 $bc=210$ ②

又 b 是 S、P 中的公共元素，∴ $b=10$.

代入①、②，得 $\begin{cases}a=7,\\b=10,\\c=21.\end{cases}$

例 2 已知集合 $\{(x,y)\mid(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant4\}=P$，$\{(x,y)\mid(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\}=Q$，且 $P\cap Q=Q$，求 m 的取值范围.

思路分析：P、Q 都是圆内的点集，$P\cap Q=Q$ 的几何意义是 Q 表示的圆内切或内含于 P 表示的圆.

解：依题意，得 $\sqrt{1+(m-3)^2}\leqslant2-\frac{1}{2}$，

即 $m^2-6m+10\leqslant\frac{9}{4}$.

∴ $\frac{6-\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{6+\sqrt{5}}{2}$.

故所求 m 的范围是 $\{m\mid\frac{6-\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{6+\sqrt{5}}{2}\}$.

2. 映射在新大纲中只要求掌握概念，因此，学习映射必须注重基础知识

例 3 在映射 $f:(x,y)\to(x+y,x-2y)$ 下，求 $(2,5)$ 的原象.

解：设 $(2,5)$ 的原象是 (x,y)，

依题意，得 $\begin{cases}x+y=2,\\x-2y=5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=3,\\y=-1.\end{cases}$ $\therefore$ (2,5)的原象是(3,−1).

例 4 设 $A=\{(a,b)\mid(a-1)^2+(b-1)^2<2,a,b\in Z\}$，$B=\{z\mid z=a+bi,a、b\in \overline{Z^-}$ 且 $|z|\leqslant\sqrt{5}\}$，$f:(a,b)\to a+bi$ 是 A 到 B 的对应关系，试判断 f 是不是从 A 到 B 的映射?

解:由已知 $A=\{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1)\}$，

$$B=\{0,1,2,i,2i,1+i,1+2i,2+i\}.$$

由对应法则 $f:(a,b)\to a+bi$，知 A 中任何一个元素，在 f 作用下，都有 B 中唯一元素与之对应. 由映射定义知，f 是从 A 到 B 的映射.

3. 函数是本讲的重点内容，函数的运算、图象和性质贯穿高中数学的始终，所以学习这一部分不能与其它内容隔裂开

例 5 已知 $f(x)=\begin{cases}x-12 & (x\geqslant 2\ 000),\\ f[f(x+18)] & (x<2\ 000),\end{cases}$

求 $f(1992)$.

思路分析:此题最终应从 $f(x)=x-12,x\geqslant 2\ 000$ 中求出值来.

解:由已知

$$\begin{aligned}f(1\ 992)&=f[f(1\ 992+18)]=f[f(2\ 010)]\\&=f(2\ 010-12)=f(1\ 998)\\&=f[f(1\ 998+18)]=f[f(2\ 016)]\\&=f(2\ 016)-12=f(2\ 004)\\&=2\ 004-12=1\ 992.\end{aligned}$$

例 6 已知定义在 $x\neq 0$ 的函数 $f(x)$，满足 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=x$，判断 $f(x)$的奇偶性.

解:$\because$ $f(x)+2f(\frac{1}{x})=x$ ①

以$\frac{1}{x}$代x，得 $f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{1}{x}$ ②

解①、②， $f(x)=\frac{1}{x}-x(x\neq 0)$，

∴ $f(x)$是奇函数.

例7 设定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x)\geqslant 0$且$f(x+y)=f(x)+f(y)+2\sqrt{f(x)\cdot f(y)}$，求证：$f(nx)=n^2f(x)$，$n\in N$.

证明：1°当$n=1$时，$f(x)=1^2\cdot f(x)$显然成立.

2°假设$n=k$时命题成立，即$f(kx)=k^2f(x)$，$f(x)\geqslant 0$，

则
$$\begin{aligned} f[(k+1)x]&=f(kx+x)\\ &=f(kx)+f(x)+2\sqrt{f(kx)\cdot f(x)}\\ &=k^2f(x)+f(x)+2\sqrt{k^2f^2(x)}\\ &=k^2f(x)+f(x)+2kf(x)\\ &=(k^2+2k+1)f(x)\\ &=(k+1)^2f(x). \end{aligned}$$

说明$n=k+1$时命题成立.

由1°、2°知$n\in N$，$f(nx)=n^2f(x)$.

评注：例5、6、7说明，对$f(x)$定义域内x取任意值或任意不同形式所得的各种不同结果都可以在解题中发挥作用.

例8 判断下列函数的奇偶性

(1)$f(x)=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$；(2)$f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3)$f(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$，($a>0$且$a\neq 1$)；

(4)$f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$，($|x|<\frac{\pi}{2}$).

解：(1)∵ $f(x)=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$，定义域不是关于原点的对称区间，

∴ $f(x)=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$是非奇非偶函数.

(2) ∵ $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$,

∴ $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})$

$=\lg\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

$=-f(x)$.

∴ $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

(3) ∵ $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^x+1}{2(a^x-1)}$,

∴ $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+1}{2(a^{-x}-1)}$

$=\dfrac{1+a^x}{2(1-a^x)}=-\dfrac{a^x+1}{2(a^x-1)}=-f(x)$,

∴ $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$是奇函数.

(4) ∵ $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$,

∴ $f(-x)=\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$

$$\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}\cdot\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}$$

$$=\frac{1-(\sin x+\cos x)^2}{1-(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{-2\sin x\cos x}{2\sin x\cos x}=-1,$$

∴ $f(-x)=-f(x)$.

故 $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$是奇函数.

评注:判断函数奇偶性要注意:

(i)定义区间关于原点对称是函数为奇(或偶)函数的必要条件. 比如已知偶函数 $f(x)$的定义域是$[a,b]$,求动点 $P(a,b)$的轨迹方程,直接可得 $b=-a(a\geqslant 0)$.

(ii)比较 $f(-x)$与 $f(x)$的关系要慎重,尤其是较复杂的

函数可以从以下几方面考虑

$f(-x)\pm f(x)$是否得零，如(2)中 $f(-x)+f(x)=0$；$\dfrac{f(-x)}{f(x)}$是否得±1，如(4)中$\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1$；$f(x)$可否变为较简形式，如(3)．

例9　已知 $f(x)$为一次函数，且 $f[f(x)]=4x-6$，求 $f(x)$．

解：设一次函数 $f(x)=ax+b$，则　$f[f(x)]=a(ax+b)+b$

$=a^2x+(ab+b)=4x-6$，

比较系数，得　$\begin{cases}a^2=4,\\ab+b=-6.\end{cases}$

即　$\begin{cases}a=2,\\b=-2,\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2,\\b=6.\end{cases}$

故　$f(x)=2x-2$ 或 $f(x)=-2x+6$.

三、疑难解析

1. 函数定义域及在解题中的作用

在利用函数解题时，不注意定义域的讨论就会引起错误．

例如　已知 $f(x)=|x|$，$x\in[-1,1]$，试求作 $y=f(x+1)+1$ 的图象．

若不注意定义域的讨论，就会得如下错误答案：

$y=f(x+1)+1=|x+1|+1$，$x\in[-1,1]$，如图 1－1.

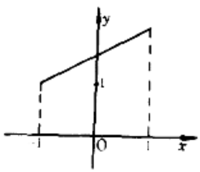

图 1－1

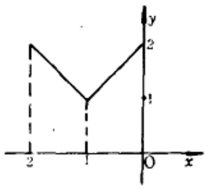

图 1－2

这种错误在于将 $y=f(x)=|x|$ 的定义域搬用到 $y=f(x+1)+1$ 上.

事实上,应用代换原理,不难得出 $y=f(x+1)+1$ 的定义域是 $-1\leqslant x+1\leqslant 1$,即 $-2\leqslant x\leqslant 0$.

所以 $y=f(x+1)+1$

$$=\begin{cases}-x, x\in[-2,-1],\\ x+2, x\in(-1,0].\end{cases}$$

如图 1—2.

一般说来,如果题目中已经明确给出了有关函数的定义域,那么解题中,特别是解答的最后,要注意检验自变量取值是否与所给定义域一致;如果所解题目中没有明确给出有关函数的定义域,就要首先求出定义城,以便解题中限定变量取值范围.

例 10 若 $x\in R$,且 $(5x-3)^{\frac{1}{a^2+2a+1}}=(5x-3)^{\frac{1}{2a^2-3a+7}}$,求 a 的值.

解:由已知,得 $\dfrac{1}{a^2+2a+1}=\dfrac{1}{2a^2-3a+7}$,

解之,得 $a=2$ 或 $a=3$.

但是 $a=3$,$(5x-3)^{\frac{1}{16}}$ 仅对 $x\geqslant\dfrac{3}{5}$ 时有意义,与已知 $x\in R$ 不合,所以应舍去,故 $a=2$.

例 11 如果实数 x、y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$,求 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值.

解:由 $(x-2)^2+y^2=3$,得 $2-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{3}$,

$\therefore\quad 2-\sqrt{3}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 2+\sqrt{3}$.

将 $(x-2)^2+y^2=3$ 变形,得

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-1,\ \frac{1}{x}\in[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}].$$

$\therefore$ 当$\frac{1}{x}=2$，即$x=\frac{1}{2}$时，$(\frac{y}{x})^2_{max}=3$.

故 $(\frac{y}{x})$的最大值为$\sqrt{3}$.

例 12 求$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+4x+1)$的单调区间.

解：要使函数有意义，必须$-x^2+4x+1>0$，

即 $2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}$.

又$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+4x+1)=\log_{\frac{1}{2}}[-(x-2)^2+5]$，

在区间$(2-\sqrt{5},2]$上，$-(x-2)^2+5$单调递增；

在区间$(2,2+\sqrt{5})$上，$-(x-2)^2+5$单调递减.

$\therefore$ $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+4x+1)$在$(2-\sqrt{5},2]$上单调递减；在$(2,2+\sqrt{5})$上单调递增.

2. 函数图象及应用

在很多实际问题中涉及到函数的图象，那么准确作图就是解题的关键. 要作图，首先要熟悉基本初等函数的图象，其次要掌握两函数图象的关系.

一般来讲，初等函数的图象都可经过基本初等函数的图象变换得到，下面的结论可由解析几何中点的坐标变换得到：

(1)$y=f(x+a)$是由$y=f(x)$图象向左$(a>0)$或向右$(a<0)$平移$|a|$个单位；

(2)$y=f(x)+b$是由$y=f(x)$图象向上$(b>0)$或向下$(b<0)$平移$|b|$个单位；

(3)$y=-f(x)$与$y=f(x)$关于x轴对称；

(4)$y=f(-x)$与$y=f(x)$关于y轴对称；

(5)$y=-f(-x)$与$y=f(x)$关原点对称；

(6)$y=|f(x)|=\begin{cases}f(x) & \text{当 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时},\\ -f(x) & \text{当 } f(x)<0 \text{ 时}.\end{cases}$

是将$y=f(x)$图象在x轴上方的点及x轴上的点保留，将

x 轴下方的点对称转移到 x 轴的上方合并而成.

$$(7) y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}), \\ f(-x) & (\text{当 } x<0 \text{ 时}). \end{cases}$$

是将 $y=f(x)$ 图象在 y 轴右方的点及 y 轴上的点保留，并将这部分对称到 y 轴左方合并而成.

例 13 作下列函数的图象

(1) $y=\lg(-x)$；

(2) $y=|\lg|x||$.

解：(1)如图 1—3，$y=\lg(-x)$ 与 $y=\lg x$ 图象关于 y 轴对称，是图中的实线部分

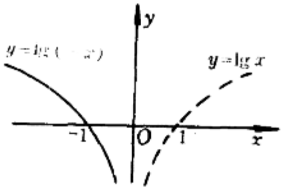

图 1—3

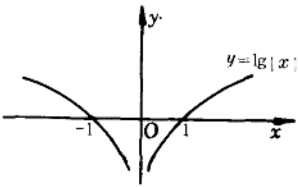

图 1—4

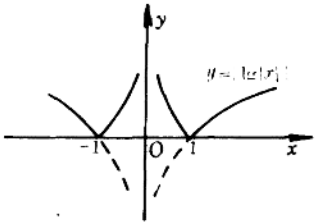

图 1—5

(2)先作 $y=\lg|x|$ 图象(如图 1—4)，再作 $y=|\lg|x||$ 的图象，如图 1—5 实线部分.

例 14 已知 $y=f(x)$ 的定义域不是 $\varnothing$，判断 $y=f(x+3)$ 与 $y=f(7-x)$ 图象的对称关系.

思路分析：

易得 $y=f(x+3)$ 与 $y=f(7-x)$ 关于 $x=\dfrac{7-3}{2}=2$ 对称.

例 15 k 为何值时，方程 $|x^2-3x+2|=kx$ 有两个不等实

$$\begin{tikzcd} y=f(x) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{关于}y\text{轴对称}"] \arrow[d, "\text{左移3单位}"'] & y=f(-x) \arrow[d, "\text{右移7单位}"'] \\ y=f(x+3) & y=f(7-x)=f[-(x-7)] \end{tikzcd}$$

根.

思路分析：此题宜用图解方程组$\begin{cases} y=|x^2-3x+2|, \\ y=kx. \end{cases}$求解.

解：如图 1－6，易知当 $k=0$ 或 $k>3-2\sqrt{2}$ 时，原方程有两个不等实根.

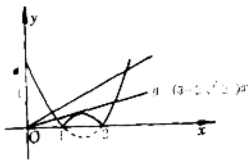

图 1－6

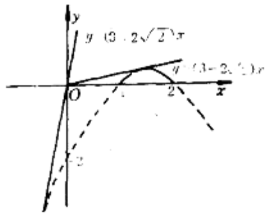

图 1－7

评注：利用 $y=kx$ 与 $y=-x^2+3x-2$ 相切求 k 时，求得 $k=3\pm2\sqrt{2}$，如图 1－7，知所取 $k=3-2\sqrt{2}$.

例 16 设 $f(x)$是周期 $T=2$ 的周期函数，$I_k=[2k-1,2k+1]$，k 是非负整数，已知在 I_0 上 $f(x)=x^2$.

(1)求 I_k 上 $f(x)$的表达式；

(2)讨论在 I_5 上 $f(x)=mx$ 的解的情况.

解：(1)∵ $f(x)$是周期函数且周期 $T=2$，又每一个 I_k 的区间长度都等于 2.

∴ 在 I_k 上函数图象是 I_0 上的图象向右平移 $2k$ 个单位.

故所求表达式为 $f(x)=(x-2k)^2, x\in I_k$；

(2)如图 1－8，在 I_5 上 $f(x)=(x-10)^2$.

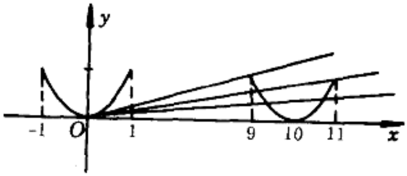

图 1－8

(i)当 $m<0$ 时，方程无实根；

(ii)当 $m=0$ 时，方程有一解 $x=10$；

(iii)当 $0<m<\frac{1}{11}$时，方程有二不等实根；

(iv)当$\frac{1}{11}<m<\frac{1}{9}$时，方程有一解；

(v)当 $m>\frac{1}{9}$时，方程无解.

3. 二次函数图象在初等数学中的应用

初等数学中，最常见的函数是二次函数，其中一些最值问题和二次方程根的范围问题，利用二次函数及图象可以得到简明的解决.

对于二次函数的最值问题我们就 $a>0$ 进行说明：

(1)$f(x)=ax^2+bx+c,x\in[m,n],a>0$ 的最大值.

因为抛物线开口向上，最大值只能是左、右端点函数值中的一个，因此，只需讨论顶点横坐标$-\frac{b}{2a}$与区间中点$\frac{m+n}{2}$的大小.

当$-\frac{b}{2a}\geqslant\frac{m+n}{2}$时，$f(m)$最大；

当$-\frac{b}{2a}<\frac{m+n}{2}$时，$f(n)$最大.

(2)$f(x)=ax^2+bx+c, x\in[m,n], a>0$ 的最小值.

最小值只能是左、右端点或顶点函数值中的一个，因此要讨论$-\frac{b}{2a}$与区间$[m,n]$的关系.

当$-\frac{b}{2a}\leqslant m$时，$f(m)$最小；

当$m<-\frac{b}{2a}<n$时，$f(-\frac{b}{2a})=\frac{4ac-b^2}{4a}$最小；

当$-\frac{b}{2a}\geqslant n$时，$f(n)$最小.

例 17　求$y=\sin^2x+a\sin x-2$的最小值.

解：　令$t=\sin x$，则$y=t^2+at-2, t\in[-1,1]$.

(i)当$-\frac{a}{2}\leqslant -1$即$a\geqslant 2$时，$t=-1$时，$y_{min}=-a-1$，此时$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in Z$；

(ii)当$-1<-\frac{a}{2}<1$，即$-2<a<2$时，$t=-\frac{a}{2}$时，$y_{min}=\frac{-8-a^2}{4}$，此时$x=k\pi+(-1)^k\arcsin(-\frac{a}{2}), k\in Z$；

(iii)当$-\frac{a}{2}\geqslant 1$即$a\leqslant -2$时，$t=1$时，$y_{min}=a-1$，此时$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$.

对于二次方程$ax^2+bx+c=0$　　①

的根与$f(x)=ax^2+bx+c$图象的关系，我们有如下结论.

结论1：方程①在(m,n)内有且只有一个根的充要条件是$f(m)\cdot f(n)<0$(注：不包括两相等实根的情况).

例 18　k为何值时，方程$x^2-(2k+1)x+k=0$的一个根在$(0,1)$内，而另一根在$(2,3)$内.

解：　设$f(x)=x^2-(2k+1)x+k$,

依题意，有 $\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)<0, \\ f(2)<0, \\ f(3)>0. \end{cases}$ 解之，得 $\frac{2}{3}<k<\frac{6}{5}$.

∴ 当$\frac{2}{3}<k<\frac{6}{5}$时，原方程的两根一个在(0,1)内，而另一个在(2,3)内.

结论 2：如图 1—9，1—10. 方程①在(m,n)内有两实根(包括两相等实根)的充要条件是

(i)$a>0$ 时

$$\begin{cases} f(m)>0, \\ f(n)>0, \\ \Delta\geqslant 0, \\ m<-\frac{b}{2a}<n. \end{cases}$$

(ii)$a<0$ 时

$$\begin{cases} f(m)<0, \\ f(n)<0, \\ \Delta\geqslant 0, \\ m<-\frac{b}{2a}<n. \end{cases}$$

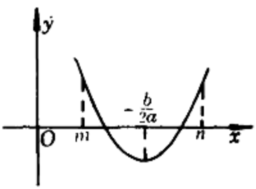

图 1—9

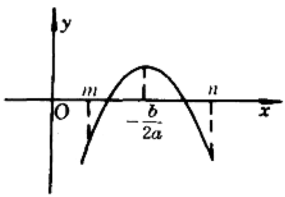

图 1—10

评注：结论 2 是用结论 1 来证明的，即在$(m,-\frac{b}{2a}]$和$[-\frac{b}{2a},n)$内各有一根.

例 19　对适合 $0°\leqslant\theta\leqslant 90°$的任何 θ，$\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2<0$ 恒成立，求 m 的取值范围.

解：令 $t=\sin\theta$，$0°\leqslant\theta\leqslant 90°$，

则　$t^2-2mt+2m+1>0$ 在 $t\in[0,1]$内恒成立，

即　$t^2-2mt+2m+1>0$ 的解集包含$[0,1]$.

∴　方程 $t^2-2mt+2m+1=0$　①

无实根或两实根都在$(-\infty,0)$上或两实根都在$(1,+\infty)$上,

(i)方程①无实根时,

$\Delta=4m^2-4(2m+1)<0$,得 $1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}$.

(ii)方程①两实根均在$(-\infty,0)$上时,

$$\begin{cases} f(0)>0, \\ \Delta\geqslant 0, \\ m\in(-\infty,0). \end{cases}\quad 得\quad -\frac{1}{2}<m\leqslant 1-\sqrt{2}.$$

(iii)方程①两实根均在$(1,+\infty)$上时,

$$\begin{cases} f(1)>0, \\ \Delta\geqslant 0, \\ m\in(1,+\infty). \end{cases}\quad 得\quad m\geqslant 1+\sqrt{2}.$$

综上所述,当原不等式恒成立时,m 的范围是以上集合的并集$\{m|m>-\frac{1}{2}\}$.

例 20　求点$(1,0)$到椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的最大距离和最小距离.

思路分析:此题可转化为方程组$(x-1)^2+y^2=r^2$,$\frac{x^2}{4}+y^2=1$有实数解时,求 r 的范围的问题.

解:当$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=r^2(r>0) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$有实数解时,

即　$(x-1)^2-\frac{x^2}{4}=r^2-1$ 在$[-2,2]$内有实根.

即　$3x^2-8x+(8-4r^2)=0$ 在$[-2,2]$内有一根或两根.

设 $f(x)=3x^2-8x+(8-4r^2)$.