中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

材料力學

下 册 第一分册

Н. М. БЕЛЯЕВ 著 干光瑜等譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

材　料　力　學

下　册　第一分册

H. M 别遼耶夫著　于光瑜等譯

商務印書館

本書係根據1951年蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的別遼耶夫（Н. М. Беляев）著“材料力學”（Сопротивление материалов）第七版修正增訂本譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教科書。

本書分上下兩册出版。

參加本書翻譯的爲哈爾濱工業大學干光瑜（第二十一章，第二十二章）、張守鑫（第二十三章）、黎紹敏（第二十四章至三十章）、和顧震隆（第二十六章至三十四章）等四同志，並由王光遠同志校訂。

材　料　力　學

下　册　第一分册

干光瑜等譯

商　務　印　書　館　出　版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司發行

商務印書館上海廠印刷
（64943 B1）

1953年7月初版　版面字數300,000
（9月第2次印）20,001—25,000　定價￥13,500

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

振

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容爲基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：'蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解决。'我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作爲現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作爲該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

下册第一分册目録

第七篇　位能與靜不定樑

第八篇 複雜抗力

第九篇　結構構件的穩定

材 料 力 學

第七篇　位能與靜不定樑

第二十一章　位能概念對求變形之應用

§124　命　題

除了前面所研究過的計算樑上各斷面的撓度和轉角的幾種方法以外，還有更普遍的適用於求任何彈性結構變形的方法。這一方法就是根據能量不滅定律的應用。

在彈性桿之靜荷拉伸或壓縮時，位能由一種形式轉化爲另一種形式；作用於桿的荷重的位能的一部份完全轉化爲桿之變形位能。實際上如果我們用逐漸懸掛的方法對桿之下端加以非常小的荷重 dp（圖322），則在每一次增加這一荷重時，已經掛上的一部份荷重就要下降，而它的位能也就減少，而相應地桿之變形位能則增加。

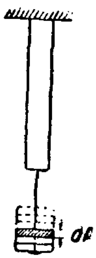

圖　322

這一現象在任何彈性結構受靜荷重作用時的任何變形形式裏都會發生；這種結構可以看作像一具能把位能的一種形式改變成另一種形式的特殊的機器一樣。

我們曾經規定(§ 2)把這樣的荷重，就是它是逐漸地增加的因而可以不計結構構件的加速度的荷重稱爲"靜荷重"；壓力(力)

從結構的一部件傳給另一部件時並不改變這些部件運動的性質，即它們的速度不變，而沒有加速度。

在這樣的情況下，結構之變形並不伴隨着該體系動能之改變，僅只將發生位能從一種形式變成另一種形式而已。同時我們也不去考慮伴隨着物體的彈性靜變形而產生的極小的磁、電及熱的現象。

因爲所有結構構件的運動性質不隨時間而改變，所以在任何時間內，不論對於處在外力和反力作用下的結構的每部份和對於這一部份的每一個在外力及應力作用下的單元都是平衡的。結構之變形，其各部份之應力及由一部份傳給另一部份的反力都來得及跟隨荷重的增加而增長。

如是，可以說，如果變形的發生並沒有破壞體系的平衡時一種形式的位能即可完全轉變爲另一種形式。轉化爲另一形式的能量的度量就是作用在結構上的力所做的功的數值。

以U來代表變形所貯有的位能的數值，而以U_P代表外荷重的位能之減少。如此，U_P之值就以這些荷重的正功A_P來計量；從另一方面來說，所集聚的變形位能U就相當於各部份間的內力的負功A，因爲物體內之各點在變形時的位移對於內力來說是發生在相反方向的。

在彈性體系變形時的能量不滅定律的形式爲：

$$U_P=U; \tag{21.1}$$

將這一公式裏的值U_P和U以等於它們的數值的功A_P和$-A$代入，可得到這一定律的另一公式：

$$A_P=-A \text{ 或 } A_P+A=0。 \tag{21.2}$$

這一能量不滅定律的公式與應用於彈性體系的所謂虛位移原理相吻合；恆等式(21.2)表示這樣的意義，就是在沒有破壞平衡的位移時，所有作用於物體上各點之力的功之和等於零。

如是，應用於彈性體系的虛位移原理起源於能量不滅定律。

從公式(21.1)得出變形的位能U數值上就等於外力在這一變形時所做的功A_P。

$$U=A_P. \tag{21.3}$$

有時在某些建築力學的教科書上對這一公式可以見到這樣的解釋"在桿件變形時外力之功轉變爲變形之位能，"這是完全不對的；只有另一種形式的能量才可能轉變爲變形的位能；通常這就是外力的位能。而在這一轉變過程中由外力所做的功之值僅僅是轉化過去的一部份能量的數字上之度量吧了。

§125　位能的計算

A．在計算位能時，我們將假設不僅材料而且是整個結構的變形都服從虎克定律而與荷重成比例，即與它們成線性關係並與它們一起逐漸地增長。

我們知道(§11)在桿件受力P之靜荷拉伸或壓縮時，功A_P之值與能量U之值等於：

$$U=A_P=\frac{1}{2}P\Delta l=\frac{P^2l}{2EF}=\frac{\Delta l^2EF}{2l}. \tag{21.4}$$

在剪切的情形下　(§54)

$$U=A_P=\frac{1}{2}Q\Delta s=\frac{Q^2a}{2GF}=\frac{\Delta s^2GF}{2a} \tag{21.5}$$

在扭轉時　(§62)

$$U=\frac{1}{2}M_K\varphi=\frac{M_K^2l}{2GJ_\rho}=\frac{\varphi^2GJ_\rho}{2l}. \tag{21.6}$$

同樣地如像在扭轉時一樣，也可以計算在純彎曲時的位能。

樑在受彎矩作用時(圖323)，它二端的斷面旋轉角度$\theta=\frac{\varphi}{2}$，此處φ是樑的沿半徑爲ρ的弧之撓曲軸的中心角。

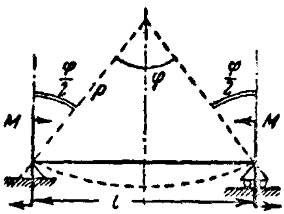

圖　323

$$U=A_P=\frac{M\varphi}{2}=\frac{M^2l}{2EJ}=\frac{\varphi^2EJ}{2l}. \quad (21.7)$$

因爲 $\varphi=\frac{l}{\rho}$，而 $\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EJ}$ （13.10）（參閱§78）。

從公式(21.4)—(21.7)得出變形的位能等於力或力偶與在該力所作用的斷面上沿該力的方向所產生的位移的乘積之一半。今規定以專門術語"廣義力"來稱呼任何引起相應於該荷重之位移的荷重，卽集中力，力偶等等；而相應於該力的位移也將稱爲"廣義位移"。

這裏的"相應"指的是：我們所說的位移是該力所作用的斷面的位移，同時指的是這樣的位移，就是它與該力的乘積可得出功的位移；對於集中力這就是在力作用方向上的線位移——撓度，伸長；對於力偶——這就是斷面在力偶作用方向上的轉角。

現在我們可以來綜合公式（21.4)—(21.7)：**變形的位能數值上就等於廣義力與相應於該力的位移的乘積之半。**

$$U=\frac{P\delta}{2}, \quad (21.8)$$

式中 P 是廣義力，δ 是廣義位移。

公式(21.4)—(21.7)指出位能是獨立外力的二次函數，因爲在這些公式裏沒有依賴於作用在構件上的外力並以平衡方程式與之相聯系的反力。從這些公式裏還可以看出變位位能之值是"廣義位移"的二次函數並完全可由它們來決定。如是，荷重作用的先後在這方面是沒有區別的，重要的只是變形構件的最後形狀。所以雖然在這一節裏的結果是在荷重的增長是靜的，在全部載荷的過程中均保持平衡的假設下

得到的，但是只要力和變形的值是以線性關係聯系的，並且是在結構成爲平衡的時間內，則不管荷重是以任何方法加上去的，所導出的公式都可應用。

Б. 在一般的彎曲中，彎矩 $M(x)$ 是一個變值。在任何斷面上與它一起的還有切力$Q(x)$。所以就不應該研究整個的樑，而只能研究長爲 dx 的無限小的樑的單元。

在彎曲內力的作用下，單元體的二個斷面旋轉着並互相形成一角度 $d\theta$(圖 324 б)。而切力引起單元體的剪切(圖 324 в)；如是，由於垂直應力所發生的位移與切應力的方向垂直，反之亦然。這就能够獨立地來計算彎曲內力和剪切內力的功了。

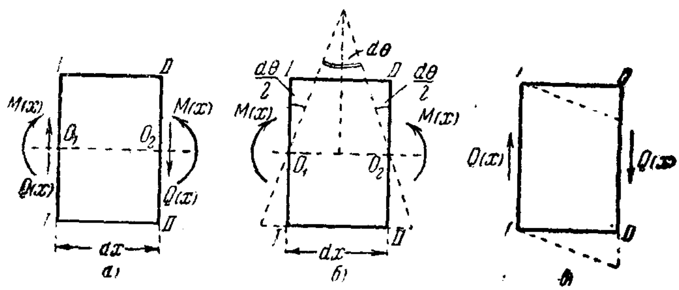

圖　324

通常由於切應力所做的功與垂直應力的功相較甚爲微小，所以我們暫時不去考慮它。垂直應力的單元功(如在純彎曲的情況下一樣)等於：

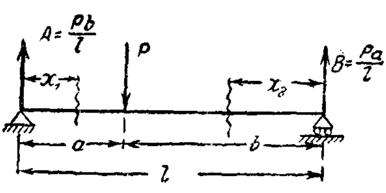

圖　325

$$dA_P = dU = \frac{1}{2} M(x)\,d\theta = \frac{1}{2} M(x)\frac{M(x)\,dx}{EJ} \qquad (21.9)$$

或

$$dU = \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}. \qquad (21.9')$$

彎曲的全部位能可沿樑之長度相加而得

$$U=\int_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}=\frac{1}{2EJ}\int_l M^2(x)\,dx \qquad (21.9'')$$

積分極限的符號規定表示積分應該遍及樑的全部；在這樣情況下，就是當對於 $M(x)$ 有若干分段時，積分 (21.9″) 就必須變爲若干積分之和。

現在我們來計算一樑的位能，該樑安裝在二支座上，並承受力 P（圖325）。力矩圖有二段；所以

$$U=\int_0^a \frac{M_1^2dx}{2EJ}+\int_0^b \frac{M_2^2dx}{2EJ};$$

$$M_1=+Ax_1=+\frac{Pb}{l}x_1;\quad M_2=+Bx_2=+\frac{Pa}{l}x_2;$$

$$U=\frac{1}{2EJ}\left[\int_0^a\left(\frac{Pb}{l}\right)^2x_1^2\,dx+\int_0^b\left(\frac{Pa}{l}\right)^2x_2^2\,dx\right]=\frac{P^2a^2b^2}{6EJl}$$

B. 知道位能之值並利用在外力中只有力 P 在樑變形時做功這一點，我們就可以從下列關係求出在該力下面的撓度：

$$A_P=\frac{1}{2}Pf=U,\ U=\frac{P^2a^2b^2}{6EJl},$$

從這裏得：

$$f=\frac{Pa^2b^2}{3EJl}$$

在 $a=b=\frac{l}{2}$ 時的特殊情況下，就得到我們所熟知的撓度值：

$$f=\frac{Pl^3}{48EJ}。$$

在作功的外力很少時，彎曲時位能的計算有時可以不用公式(21.9)而用計算外力之功的方法來進行。[譯者註：此處原書是"不用公式(21.8)"，可能是印刷的錯誤]

例如，試研究 A 端固定的、並在 B 端受一集中力 P 作用的樑。樑的跨度爲 l。樑上作用着該力以及由它所引起的反力 A、M_A 和 H_A。因爲支座斷面是固定的，所以在樑變形時反

力不作功。只有力P做功；樑端的撓度在力P逐漸增加時，以直線關係與該力聯系着.

$$f=\frac{Pl^3}{3EJ} \quad 或 \quad P=\frac{3fEJ}{l^3};$$

力P之功

$$A_P=U=\frac{1}{2}Pf=\frac{P^2l^3}{6EJ}=\frac{3f^2EJ}{2l^3}.$$

如果對結構構件作用若干個力，則總位能可由所有對結構聯合作用的力所計算的乘積之和來求得，因爲每一個位移都與所有的荷重有關。

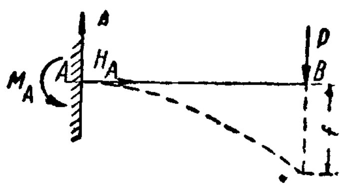

圖　326

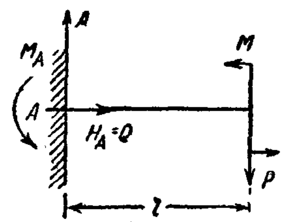

圖　327

例如，對一端固定的樑（圖327）在作用於自由端B上的力P和力偶M的作用下，位能等於：

$$A_P=U=\frac{1}{2}Pf_B+\frac{1}{2}M\theta_B=\frac{1}{2}P\left(\frac{Pl^3}{3EJ}-\frac{Ml^2}{2EJ}\right)+\frac{1}{2}M\left(\frac{Ml}{EJ}-\frac{Pl^2}{2EJ}\right)=$$
$$=\frac{P^2l^3}{6EJ}+\frac{M^2l}{2EJ}-\frac{PMl^2}{2EJ}.$$

在最後的二個例題裏，對於求外力之功$A_P=U$的數值需要知道外力作用的斷面的撓度或轉角之值。

§ 126　卡斯奇梁諾定理

現在來說明一個求位移的方法，此法之基礎爲變形位能之計算。提出一個求彈性體系各點沿作用於該體系的外力作用方向上的位移之命題。

我們將用幾個方法來解決這一問題；首先來分析最簡單的情況

(圖328)，就是在樑的斷面1、2、3……上只作用着集中力P_1、P_2、P_3……等等。在這些力的作用下樑依照曲線I彎曲並仍變成平衡。

以y_1、y_2、y_3……等來代表在力P_1、P_2、P_3……等所作用的斷面1、2、3……的撓度。現在來求這些撓度中的一個撓度，例如y_1——作用着力P_1的斷面的撓度。

將樑從位置I移到相鄰的位置II去（以虛線繪於圖328上者）而不破壞其平衡。這可以用各種不同的方法來做：添加新的荷重，增加已經作用上去的荷重等等。

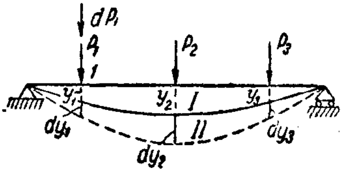

圖 328

我們設想為了變成為相鄰的變形狀態II，在力P_1上添加一無限小的dp_1（圖328）；同時為了在這一轉變中不致破壞平衡起見將認為這一添加的力是靜靜地安放的，也就是說從零到終值是緩慢地、逐漸地增長的。

當樑從狀態I轉為狀態II時，所有的荷重P都下降着，即它們的位能減少着。因為平衡未曾破壞，所以荷重能量dU_P的減少完全轉變為樑的變形位能dU的增加。dU_P之值由外力在從狀態I到狀態II的轉變中的功來計量：

$$dU=dA_P. \tag{21.10}$$

為力P_1、P_2、P_3……的函數的變形位能之改變dU是由這些獨立變數中的一個P_1的極小的增量來產生的；所以這樣的複雜函數的微分等於：

$$dU=\frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1. \tag{21.11}$$

至於dA_P的值，這功也就是為各荷重P對於位置II和I的功之差：

$$dA_p = A_2 - A_1.$$

當各P力同時地、並逐漸地增長時，功 A_1 等於:

$$A_1 = \frac{1}{2}P_1y_1 + \frac{1}{2}P_2y_2 + \frac{1}{2}P_3y_3.$$

在計算功 A_2 時，考慮到它的值完全由變形樑的最後的形狀來決定(§ 125)，而與置放荷重的先後無關。

假設開始我們以重量 dP_1 作用於樑上；樑就稍微有一些彎曲(圖329，位置III)，它在點 1、2、3 上的撓度將爲 dy_1、dy_2、dy_3。靜作用的荷重dP_1 的功就等於$\frac{1}{2}dP_1\ dy_1$。以後再開始逐漸地以漸增的荷重 P_1、P_2、P_3 同時地加在樑上。

在最初的撓度 dy_1、dy_2、dy_3 上添上了撓度 y_1、y_2、y_3 (圖 329)。在這一載荷階段裏力 P_1、P_2、P_3 做功 $\frac{1}{2}P_1\,y_1 + \frac{1}{2}P_2\ y_2 + \frac{1}{2}P_3\ y_3 = A_1$；除此以外，還有已經位在樑上的重量 dP_1 也做功；它經過路程 y_1，但因爲在第二個載荷階段裏它保持爲常量，所以它的功等於 $dP_1\ y_1$。樑就佔着以虛線繪於圖 329 上的位置II。

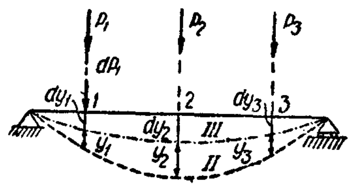

圖 329

如是，樑在從未變形狀態轉到位置II時由外力所做的總功就等於(圖329)

$$A_2 = \frac{1}{2}dP_1\ dy_1 + A_1 + dP_1y_1。$$

現在來計算

$$dU = dA_p = A_2 - A_1 = \frac{1}{2}dP_1\ dy_1 + dP_1y_1。$$

將二次微量的一項略去不計，即得: