

中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

材料力學

下 冊 第一分冊

Н. М. БЕЛЯЕВ 著 千光瑜等譯

商 務 印 書 館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



材 料 力 學

下 冊 第一分冊

H. M 別捷耶夫著 干光瑜等譯

商 務 印 書 館

本書係根據 1951 年蘇聯國營技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的別達耶夫 (Н. М. Беляев) 著“材料力學” (Сопротивление материалов) 第七版修正增訂本譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教科書。

本書分上下兩冊出版。

參加本書翻譯的為哈爾濱工業大學千光瑜(第二十一章, 第二十二章)、張守鑫(第二十三章)、黎紹敏(第二十四章至三十章)、和顧震(第二十六章至三十四章)等四同志, 並由王光遠同志校訂。

材 料 力 學

下 冊 第一分冊

千 光 瑜 等 譯

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一號

中國圖書發行公司發行

商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷

(64943 B1)

1953 年 7 月初版 版面字數 300,000

(9月第2次印) 20,001—25,000 定價 ¥13,500

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

振

中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

下册第一分册目錄

第七篇 位能與靜不定樑

第二十一章 位能概念對求變形之應用	449
§ 124 命題	449
§ 125 位能的計算	451
§ 126 卡斯奇梁諾定理	455
§ 127 卡斯奇梁諾定理之應用的例題	460
§ 128 引用附加力之方法	462
§ 129 功之互等定理	465
§ 180 馬克斯威爾——馬爾定理	466
§ 181 維力沙金法	469
§ 182 樑由於切力所引起的撓度	471
§ 183 例題	475
第二十二章 樑之撓曲軸的近似方程式	482
§ 184 計算撓度的近似方法	482
§ 185 將撓曲軸方程式分解為三角級數	484
第二十三章 靜不定樑	489
§ 136 一般概念與計算方法	489
§ 187 變形比較法	491
§ 138 卡斯奇梁諾定理，馬爾定理及維力沙金法之應用	493
§ 189 多餘未知數與可定基之選擇	495
§ 140 解靜不定題的程序	498
§ 141 靜不定體系計算之例題	500
§ 142 求靜不定樑之變形	505

§ 143 連續樑之計算	507
§ 144 三彎矩定理	509
§ 145 連續樑的支反力之計算與圖之作法	516
§ 146 具有外伸臂的連續樑，具有固定端的樑	520
§ 147 計算連續樑的例題	523
§ 148 支座的高度放得不準確的影響	526
第二十四章 按許可荷重計算靜不定樑	529
§ 149 一般的概念，雙跨樑的計算	529
§ 150 三跨樑的計算	532
§ 151 例題	533
第二十五章 彈性基礎樑	537
§ 152 一般概念	537
§ 153 承受一個集中力 P 的無限長的彈性基礎樑的計算	538
§ 154 例題	543
§ 155 定長樑的計算	544
第八篇 複雜抗力	
第二十六章 斜彎曲	547
§ 156 基本概念	547
§ 157 斜彎曲，應力計算	548
§ 158 在斜彎曲時的變形計算	555
§ 159 斜彎曲的計算例題	558
第二十七章 彎曲及拉伸或壓縮的聯合作用	562
§ 160 在軸向力及切力的作用下的樑的彎曲	562
§ 161 考慮樑的變形	564
§ 162 例題	565
§ 163 偏心壓縮或拉伸	567
§ 164 斷面核心	572
§ 165 例題	576
第二十八章 扭轉和彎曲的聯合作用	579

§ 166 彎矩及扭矩的計算	579
§ 167 在彎曲兼扭轉時應力計算及強度校核	581
§ 168 例題	586
第二十九章 複雜抗力的一般性情況	589
§ 169 應力及變形的計算	589
§ 170 最簡單的曲柄軸之計算	594
第三十章 薄壁桿件扭轉和彎曲計算的基本原理	601
§ 171 概論	601
§ 172 自由扭轉和約束扭轉之概念	602
§ 173 約束扭轉時桿件斷面上之內力假設	605
§ 174 與斷面不均勻突凹有關的薄壁桿件之變形	610
§ 175 扇性垂直應力，斷面的扇性性質	615
§ 176 力的因素之間的微分關係	620
§ 177 約束扭轉時變形之微分方程式，力因素之求法	623
§ 178 薄壁桿件斷面上切應力的計算	630
§ 179 扇性面積之計算，扇性圖之繪製	632
§ 180 斷面扇性幾何特性的求法	637
§ 181 計算斷面扇性幾何特性之例題	641
§ 182 薄壁桿件在複雜抗力的一般情況下的應力計算	648
§ 183 薄壁桿件上應力計算之例題	651
第三十一章 曲桿	661
§ 184 一般性概念	661
§ 185 彎矩，垂直力及切力的計算	662
§ 186 力 Q 及 N 引起的應力之計算	665
§ 187 彎矩引起的應力之計算	666
§ 188 長方形斷面的中性層曲率半徑的計算	672
§ 189 圓及梯形的中性層曲率半徑的計算	674
§ 190 確定中性層位置的近似法	676
§ 191 曲桿的垂直應力公式的分析	677
§ 192 對垂直應力公式的補充說明	681

§ 193 曲桿的應力計算例題	683
§ 194 曲桿的變形	685
§ 195 考慮桿的曲率的變形計算	688
§ 196 曲桿的計算例題	690
第三十二章 厚壁容器和薄壁容器的計算	694
§ 197 厚壁圓筒的計算	694
§ 198 在厚壁球型容器內的應力	701
§ 199 薄壁容器的計算	702

第九篇 結構構件的穩定

第三十三章 壓桿的穩定校核	705
§ 200 緒論，關於壓桿形狀的穩定之概念	705
§ 201 臨界力的歐拉公式	708
§ 202 桿端的固定方法的影響	713
§ 203 歐拉公式的應用範圍及臨界應力總圖的作法	717
§ 204 壓桿的穩定校核	722
§ 205 材料及斷面形式的選擇	725
§ 206 例題	728
§ 207 穩定校核的實際意義	733
第三十四章 構件的更複雜的穩定校核的問題	735
§ 208 槓彎曲的平面形式的穩定	735
§ 209 桿件在軸向力及切力的聯合作用下的強度校核（考慮其變形）	743
§ 210 壓力的偏心距及桿件初曲率的影響	749
§ 211 組合桿件裏的連接格條的計算之基礎	752
§ 212 壓縮並撓曲之桿件的計算例題	755
§ 213 不封閉斷面的薄壁桿件的穩定校核	757
§ 214 穩定計算的發展	763

附錄

下冊第一分冊中俄名詞對照表

俄、英、中文度量衡單位符號對照表

材 料 力 學

第七篇 位能與靜不定樑

第二十一章 位能概念對求變形之應用

§ 124 命 題

除了前面所研究過的計算樑上各斷面的撓度和轉角的幾種方法以外，還有更普遍的適用於求任何彈性結構變形的的方法。這一方法就是根據能量不減定律的應用。

在彈性桿之靜荷拉伸或壓縮時，位能由一種形式轉化為另一種形式；作用於桿的荷重的位能的一部份完全轉化為桿之變形位能。實際上如果我們用逐漸懸掛的方法對桿之下端加以非常小的荷重 dp (圖 322)，則在每一次增加這一荷重時，已經掛上的一部份荷重就要下降，而它的位能也就減少，而相應地桿之變形位能則增加。

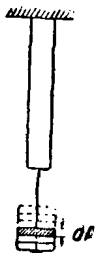


圖 322

這一現象在任何彈性結構受靜荷重作用時的任何變形形式裏都會發生；這種結構可以看作像一具能把位能的一種形式改變成另一種形式的特殊的機器一樣。

我們曾經規定 (§ 2) 把這樣的荷重，就是它是逐漸地增加的因而可以不計結構構件的加速度的荷重稱為“靜荷重”；壓力(力)

從結構的一部份傳給另一部份時並不改變這些部份運動的性質，即它們的速度不變，而沒有加速度。

在這樣的情況下，結構之變形並不伴隨着該體系動能之改變，僅只將發生位能從一種形式變成另一種形式而已。同時我們也不去考慮伴隨着物體的彈性靜變形而產生的極小的磁、電及熱的現象。

因為所有結構構件的運動性質不隨時間而改變，所以在任何時間內，不論對於處在外力和反力作用下的結構的每部份和對於這一部份的每一個在外力及應力作用下的單元都是平衡的。結構之變形，其各部份之應力及由一部份傳給另一部份的反力都來得及跟隨荷重的增加而增長。

如是，可以說，如果變形的發生並沒有破壞體系的平衡時一種形式的位能即可完全轉變為另一種形式。轉化為另一形式的能量的度量就是作用在結構上的力所做的功的數值。

以 U 來代表變形所貯有的位能的數值，而以 U_p 代表外荷重的位能之減少。如此， U_p 之值就以這些荷重的正功 A_p 來計量；從另一方面來說，所集聚的變形位能 U 就相當於各部份間的內力的負功 A ，因為物體內之各點在變形時的位移對於內力來說是發生在相反方向的。

在彈性體系變形時的能量不滅定律的形式為：

$$U_p = U; \quad (21.1)$$

將這一公式裏的值 U_p 和 U 以等於它們的數值的功 A_p 和 $-A$ 代入，可得到這一定律的另一公式：

$$A_p = -A \text{ 或 } A_p + A = 0. \quad (21.2)$$

這一能量不滅定律的公式與應用於彈性體系的所謂虛位移原理相吻合；恆等式 (21.2) 表示這樣的意義，就是在沒有破壞平衡的位移時，所有作用於物體上各點之力的功之和等於零。

如是，應用於彈性體系的虛位移原理起源於能量不減定律。

從公式(21.1) 得出變形的位能 U 數值上就等於外力在這一變形時所做的功 A_P 。

$$U = A_P. \quad (21.3)$$

有時在某些建築力學的教科書上對這一公式可以見到這樣的解釋“在桿件變形時外力之功轉變為變形之位能，”這是完全不對的；只有另一種形式的能量才可能轉變為變形的位能；通常這就是外力的位能。而在這一轉變過程中由外力所做的功之值僅僅是轉化過去的一部份能量的數字上之度量吧了。

§ 125 位能的計算

A. 在計算位能時，我們將假設不僅材料而且是整個結構的變形都服從虎克定律而與荷重成比例，即與它們成線性關係並與它們一起逐漸地增長。

我們知道 (§ 11) 在桿件受力 P 之靜荷拉伸或壓縮時，功 A_P 之值與能量 U 之值等於：

$$U = A_P = \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{\Delta l^2 EF}{2l}. \quad (21.4)$$

在剪切的情形下 (§ 54)

$$U = A_P = \frac{1}{2} Q \Delta s = \frac{Q^2 a}{2GF} = \frac{\Delta s^2 GF}{2a}. \quad (21.5)$$

在扭轉時 (§ 62)

$$U = \frac{1}{2} M_k \varphi = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p} = \frac{\varphi^2 GJ_p}{2l}. \quad (21.6)$$

同樣地如像在扭轉時一樣，也可以計算在純彎曲時的位能。

樑在受彎矩作用時(圖323)，它二端的斷面旋轉角度 $\theta = \frac{\varphi}{2}$ ，此處 φ 是樑的沿半徑為 ρ 的弧之撓曲軸的中心角。

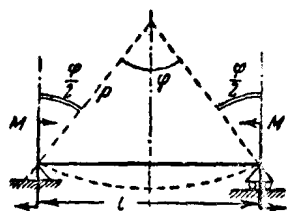


圖 323

$$U = A_P = \frac{M\varphi}{2} = \frac{M^2 l}{2EJ} = \frac{\varphi^2 EJ}{2l} \quad (21.7)$$

因為 $\varphi = \frac{l}{\rho}$ ，而 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$ (13.10) (參閱 § 78)。

從公式 (21.4) — (21.7) 得出變形的位能等於力或力偶與在該力所作用的斷面上沿該力的方向所產生的位移的乘積之一半。今規定以專門術語“廣義力”來稱呼任何引起相應於該荷重之位移的荷重，即集中力，力偶等等；而相應於該力的位移也將稱為“廣義位移”。

這裏的“相應”指的是：我們所說的位移是該力所作用的斷面的位移，同時指的是這樣的位移，就是它與該力的乘積可得出功的位移；對於集中力這就是在力作用方向上的線位移——撓度，伸長；對於力偶——這就是斷面在力偶作用方向上的轉角。

現在我們可以來綜合公式 (21.4) — (21.7)：變形的位能數值上就等於廣義力與相應於該力的位移的乘積之半。

$$U = \frac{P\delta}{2}, \quad (21.8)$$

式中 P 是廣義力， δ 是廣義位移。

公式 (21.4) — (21.7) 指出位能是獨立外力的二次函數，因為在這些公式裏沒有依賴於作用在構件上的外力並以平衡方程式與之相聯系的反力。從這些公式裏還可以看出變位位能之值是“廣義位移”的二次函數並完全可由它們來決定。如是，荷重作用的先後在這方面是沒有區別的，重要的只是變形構件的最後形狀。所以雖然在這一節裏的結果是在荷重的增長是靜的，在全部載荷的過程中均保持平衡的假設下

得到的，但是只要力和變形的值是以線性關係聯系的，並且是在結構成為平衡的時間內，則不管荷重是以任何方法加上去的，所導出的公式都可應用。

B. 在一般的彎曲中，彎矩 $M(x)$ 是一個變值。在任何斷面上與它一起的還有切力 $Q(x)$ 。所以就不應該研究整個的樑，而只能研究長為 dx 的無限小的樑的單元。

在彎曲內力的作用下，單元體的二個斷面旋轉着並互相形成一角度 $d\theta$ (圖 324 a)。而切力引起單元體的剪切 (圖 324 b)；如是，由於垂直應力所發生的位移與切應力的方向垂直，反之亦然。這就能够獨立地來計算彎曲內力和剪切內力的功了。

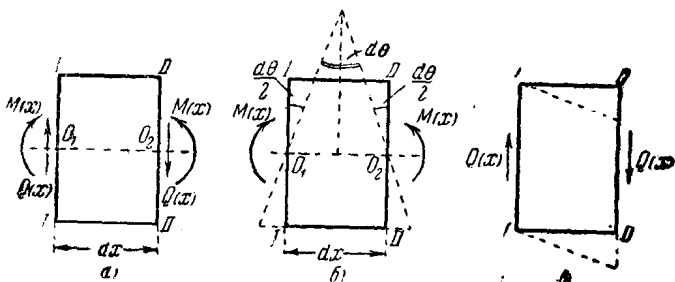


圖 324

通常由於切應力所做的功與垂直應力的功相較甚為微小，所以我們暫時不去考慮它。垂直應力的單元功 (如在純彎曲的情況下一樣) 等於：

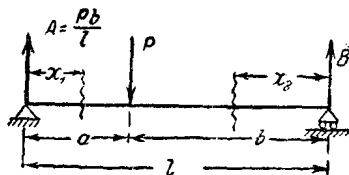


圖 325

$$\begin{aligned} dA_P = dU &= \frac{1}{2} M(x) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} M(x) \frac{M(x) dx}{EI} \quad (21.9) \end{aligned}$$

或

$$dU = \frac{M^2(x) dx}{2EI} \quad (21.9')$$

彎曲的全部位能可沿樑之長度相加而得

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EJ} = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2(x) dx \quad (21.9'')$$

積分極限的符號規定表示積分應該遍及樑的全部；在這樣情況下，就是當對於 $M(x)$ 有若干分段時，積分 (21.9'') 就必須變為若干積分之和。

現在我們來計算一樑的位能，該樑安裝在二支座上，並承受力 P (圖325)。力矩圖有二段；所以

$$U = \int_0^a \frac{M_1^2 dx}{2EJ} + \int_0^b \frac{M_2^2 dx}{2EJ};$$

$$M_1 = +Ax_1 = +\frac{Pb}{l}x_1; \quad M_2 = +Bx_2 = +\frac{Pa}{l}x_2;$$

$$U = \frac{1}{2EJ} \left[\int_0^a \left(\frac{Pb}{l}\right)^2 x_1^2 dx + \int_0^b \left(\frac{Pa}{l}\right)^2 x_2^2 dx \right] = \frac{Pa^3b^3}{6EJl}$$

B. 知道位能之值並利用在外力中只有力 P 在樑變形時做功這一點，我們就可以從下列關係求出在該力下面的撓度：

$$A_P = \frac{1}{2} Pf = U, \quad U = \frac{Pa^3b^3}{6EJl}$$

從這裏得：

$$f = \frac{Pa^3b^3}{3EJl}$$

在 $a=b=\frac{l}{2}$ 的特殊情況下，就得到我們所熟知的撓度值：

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

在作功的外力很少時，彎曲時位能的計算有時可以不用公式 (21.9) 而用計算外力之功的方法來進行。[譯者註：此處原書是“不用公式 (21.8)”，可能是印刷的錯誤]

例如，試研究 A 端固定的、並在 B 端受一集中力 P 作用的樑。樑的跨度為 l 。樑上作用着該力以及由它所引起的反力 A 、 M_A 和 H_A 。因為支座斷面是固定的，所以在樑變形時反

力不作功。只有力 P 做功；樑端的撓度在力 P 逐漸增加時，以直線關係與該力聯系着。

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ} \quad \text{或} \quad P = \frac{3fEJ}{l^3};$$

力 P 之功

$$A_P = U = \frac{1}{2} Pf = \frac{P^2 l^3}{6EJ} = \frac{3f^2 EJ}{2l^3}.$$

如果對結構構件作用若干個力，則總位能可由所有對結構聯合作用的力所計算的乘積之和來求得，因為每一個位移都與所有的荷重有關。

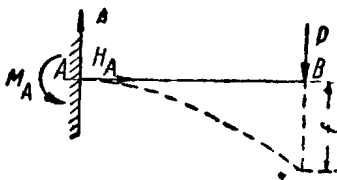


圖 326

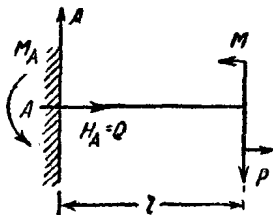


圖 327

例如，對一端固定的樑（圖327）在作用於自由端 B 上的力 P 和力偶 M 的作用下，位能等於：

$$\begin{aligned} A_P = U &= \frac{1}{2} Pf_B + \frac{1}{2} M\theta_B = \frac{1}{2} P \left(\frac{Pl^3}{3EJ} - \frac{Ml^2}{2EJ} \right) + \frac{1}{2} M \left(\frac{Ml}{EJ} - \frac{Pl^2}{2EJ} \right) = \\ &= \frac{P^2 l^3}{6EJ} + \frac{M^2 l}{2EJ} - \frac{P M l^2}{2EJ}. \end{aligned}$$

在最後的二個例題裏，對於求外力之功 $A_P = U$ 的數值需要知道外力作用的斷面的撓度或轉角之值。

§ 126 卡斯奇梁諾定理

現在來說明一個求位移的方法，此法之基礎為變形位能之計算。提出一個求彈性體系各點沿作用於該體系的外力作用方向上的位移之命題。

我們將用幾個方法來解決這一問題；首先來分析最簡單的情況

(圖328), 就是在樑的斷面1、2、3……上只作用着集中力 P_1 、 P_2 、 P_3 ……等等。在這些力的作用下樑依照曲線 I 彎曲並仍變成平衡。

以 y_1 、 y_2 、 y_3 ……等來代表在力 P_1 、 P_2 、 P_3 ……等所作用的斷面1、2、3……的撓度。現在來求這些撓度中的一個撓度, 例如 y_1 ——作用着力 P_1 的斷面的撓度。

將樑從位置 I 移到相鄰的位置 II 去(以虛線繪於圖328上者)而不破壞其平衡。這可以用各種不同的方法來做: 添加新的荷重, 增加已經作用上去的荷重等等。

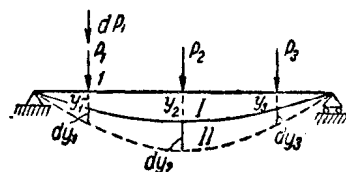


圖 328

我們設想爲了變成爲相鄰的變形狀態 II , 在力 P_1 上添加一無限小的 dP_1 (圖328); 同時爲了在這轉變中不致破壞平衡起見將認爲這一添加的力是靜

靜地安放的, 也就是說從零到終值是緩慢地、逐漸地增長的。

當樑從狀態 I 轉爲狀態 II 時, 所有的荷重 P 都下降着, 即它們的位能減少着。因爲平衡未曾破壞, 所以荷重能量 dU_p 的減少完全轉變爲樑的變形位能 dU 的增加。 dU_p 之值由外力在從狀態 I 到狀態 II 的轉變中的功來計量:

$$dU = dA_p. \quad (21.10)$$

爲力 P_1 、 P_2 、 P_3 ……的函數的變形位能之改變 dU 是由這些獨立變數中的一個 P_1 的極小的增量來產生的; 所以這樣的複雜函數的微分等於:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_1} dP_1. \quad (21.11)$$

至於 dA_p 的值, 這功也就是爲各荷重 P 對於位置 II 和 I 的功之差:

$$dA_p = A_2 - A_1.$$

當各 P 力同時地、並逐漸地增長時，功 A_1 等於：

$$A_1 = \frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_2 y_2 + \frac{1}{2} P_3 y_3.$$

在計算功 A_2 時，考慮到它的值完全由變形樑的最後的形狀來決定 (§ 125)，而與置放荷重的先後無關。

假設開始我們以重量 dP_1 作用於樑上；樑就稍微有一些彎曲(圖 329, 位置 III)，它在點 1、2、3 上的撓度將為 dy_1 、 dy_2 、 dy_3 。靜作用的荷重 dP_1 的功就等於 $\frac{1}{2} dP_1 dy_1$ 。以後再開始逐漸地以漸增的荷重 P_1 、 P_2 、 P_3 同時地加在樑上。

在最初的撓度 dy_1 、 dy_2 、 dy_3 上添上了撓度 y_1 、 y_2 、 y_3 (圖 329)。

在這一載荷階段裏力 P_1 、 P_2 、 P_3 做功

$$\frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_2 y_2 + \frac{1}{2} P_3 y_3 = A_1;$$

除此以外，還有已經位在樑上的重量 dP_1 也做功；它經過路程 y_1 ，但因為在第二個載荷階段裏它保持為常量，所以

它的功等於 $dP_1 y_1$ 。樑就佔着以虛線繪於圖 329 上的位置 II。

如是，樑在從未變形狀態轉到位置 II 時由外力所做的總功就等於 (圖 329)

$$A_2 = \frac{1}{2} dP_1 dy_1 + A_1 + dP_1 y_1.$$

現在來計算

$$dU = dA_p = A_2 - A_1 = \frac{1}{2} dP_1 dy_1 + dP_1 y_1.$$

將二次微量的一項略去不計，即得：

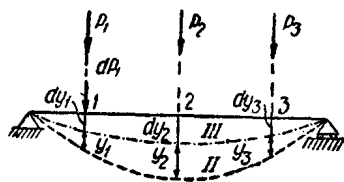


圖 329