

01555

少年智力训练

数学

北京师范大学出版社

少年智力训练

数 学

周国镇 李文普 编

北京师范大学出版社

内 容 提 要

本书包括初中代数和平面几何的有关内容，作者通过学生在学习过程中所遇到的一些疑难问题，选取了近40个，对其拓广和引申，但并没有超出现行教学大纲的范围。文字通俗，语言生动，图文并茂，有些问题以故事的形式讲述，引导学生积极思维，有利于启迪学生的智力，每个问题讲述完后附有练习，书末给以解答或提示，是初中学生一本较好的补充读物。

读者对象：初中生，中学老师，自学青年。

少年智力训练

数 学

周国镇 李文普 编

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7 字数：148千

1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷

印数：1—31,000

统一书号：7243·390 定价：0.96元

前 言

初中阶段，是青少年在整个学习过程中开发智力、增长知识、提高思维能力的重要阶段。但是目前专门为初中学生编写的科学知识丛书还不多，我们就是为此而编写这套《少年智力训练》丛书。

本套丛书包括数学、物理、化学三个分册。每一分册都结合本学科的基本知识、基本理论和基本规律提出并引导解决一些十分有趣的问题。在编写过程中，我们在以下几个方面进行了探索。

1. 趣味性。任何一位科学家的成长或多或少地总是跟兴趣相联系的。当一个人对某一门学问产生了浓厚的兴趣时，他也就具备了研究这门学问的专一性，而成就和专一性是分不开的。本丛书通过一些有趣的自然现象，引导少年读者去思考、分析。

2. 科学性。这是本丛书的关键。在内容上我们力求与初中现行教学大纲紧密结合，但又不局限于课本知识。作为一本课外读物，我们对某些知识的深度和广度做了适当的扩展。这样有助于开阔眼界，提高分析问题、解决问题的能力。

3. 通俗化。在内容叙述上，我们力求语言生动、活泼、适合少年读者的口味，使书中介绍的知识、理论能够顺利地为学生理解与接受。

为了方便，每分册中的智力问题，都附有答案。在有些答案中，我们针对问题的内容做了进一步的介绍，或提出问题供读者思考。

由于我们的水平有限，对编写此类丛书的经验不足，书中难免出现错误，请广大读者给以批评指正。

编者

目 录

大教授做过的数学题.....	(1)
正负数的妙用.....	(3)
狗在何处追上狐狸.....	(6)
代数魔术.....	(9)
非负数及其应用.....	(16)
巧算无理式.....	(20)
过河的桥.....	(24)
关于“ $3=4$ ”的证明.....	(30)
你会应用配方法吗?	(35)
从 0 不能做除数谈起.....	(45)
“如果是他.....”	(52)
试一试你的能力.....	(55)
早晨和晚上一样高吗?	(59)
3^{91} 的个位数是几?.....	(64)
殊途同归.....	(67)
你会应用判别式吗?	(70)
奇妙的 45.....	(83)
$\sqrt{2}$ 能表示为分数吗?	(89)
0 和 1 的算术.....	(96)
从高斯做过的一道题目谈起.....	(102)
笨蛋的难关.....	(112)
在春天加剧的病症.....	(116)

马索若尼圆规·····	(120)
斯坦纳直尺·····	(124)
$S-L$ 定理·····	(128)
等积变换·····	(131)
一道高考副题·····	(134)
勾股容圆与面积割补法·····	(137)
拼拼凑凑·····	(141)
割圆术点滴·····	(146)
杨辉三角形的几何意义·····	(149)
拿破仑三角形·····	(153)
费马点·····	(157)
欧拉线·····	(161)
一题十二解·····	(164)
关于辅助线的对话·····	(170)
奇妙的同心圆·····	(174)
天鹅之歌·····	(178)
冲破迷雾·····	(183)
解答或提示·····	(190)

大教授做过的 数学题



我国著名数学家苏步青教授很重视做题，他认为解题是终生受益的基本训练，他自己就做了很多很多题，仅仅是微积分的题目就做了两万多道！现在，苏步青教授已是年近古稀，对做题仍怀有浓厚的兴趣。

有一次，苏步青教授在德国作学术访问的时候，一个很有名的数学家在电车里出了个题目，请苏步青做。这个题目是：

一个甲，一个乙，同时相对而行，距离是 100 里，甲每小时走六里，乙每小时走四里，甲和乙总有一个时候会碰到面的，那么，要几小时能碰到？

苏步青教授一下子就想出了答案：10 小时。那位外国数学家接着又提出了一个题目：

甲带着一只狗，狗每小时走 10 里，狗走的比人快，它同甲一起出发，当碰到乙的时候它就往回走向甲，碰到甲后又折回走向乙，这样在甲和乙之间来回走，那么当甲和乙相遇时，这只狗共走了多少里？

那位外国数学家要求苏步青教授在电车里回答。要在短的时间里，在下车前就答出来，确实不是易事。但是，我们的苏步青教授不但在学术讲台上令外国人折服，即使在电

车里也没有让外国人问住，他在下电车之前给出了答案：狗一共走了 100 里。苏步青教授思考问题如此敏捷，使外国朋友对他更敬重了。

亲爱的少年读者，你也能像苏步青教授那样，在短短时间里，心算出上面的两个题目吗？

解答：

问题1 甲和乙每小时共走 10 里，走 100 里则需

$$100 \div 10 = 10 \text{ (小时)} .$$

问题2 甲和乙从出发到相遇共需10小时，而狗每小时走 10 里，所以共走100里。

正负数的妙用

$-5 \times 2 = -10$

如果你是一个中学生，或者你曾经是一个中学生，那么你一定熟悉正负数的概念，也一定会作正负数的运算，但是，你不一定能够灵活地运用它们。要是你想考查一下自己是不是具有这种灵活性，就请你算一算下面这个题目：

一家水果店从果园购进 40 筐苹果，经过磅秤的称量，每筐的重量（以斤作单位）依次是：

88	90	87	91	90	88	87	92
91	87	89	89	89	88	90	92
89	90	92	92	87	87	92	91
92	90	91	89	92	89	89	91
92	92	90	90	88	89	88	91

每只空筐按 2 斤计算，那么，这 40 筐苹果一共是多少斤？

你怎样算这道题呢？

如果你是把这 40 个数一个一个地连续加起来，那么，很显然这种算法既费时间又容易出错。

如果你是把这 40 个数分为 6 类，即

87 的一类： $5 \times 87 = 435$ ，

88 的一类： $5 \times 88 = 440$ ，

89 的一类： $8 \times 89 = 712$ ，

90 的一类： $7 \times 90 = 630$ ，

91 的一类: $6 \times 91 = 546$,

92 的一类: $9 \times 92 = 828$.

然后把所得的六个数加起来,那么,这种算法虽然比前面的算法要好一些,但仍然没有用上中学的数学知识.

如果你是用下面的算法,那么,你就应该受到称赞.这种算法是:

1. 把所有的数都看作是90, 于是有

$$40 \times 90 = 3600.$$

2. 把不足90的数记作负数,如87记作‘-3’.把超过90的数记作正数,如92记作‘+2’这样就得到下列正负数,即

$$-2-3-2-3-3-1-1-1-2-1$$

$$-3-3-1-1-1-2-1-2$$

$$+1+2+1+2+2+2+2+1+2+1$$

$$+2+1+2+2+1$$

然后把上下两行中的相反数(或和是相反数)划去,剩下

$$-3-3-1-1-1 = -9.$$

因此总斤数是

$$3600 + (-9) = 3591,$$

由这个数减去总筐重,得

$$3591 - 2 \times 40 = 3511 \text{ (斤)},$$

这就是所要求的数.

上面这个算法的优越性是:巧妙地运用了正负数的概念和相反数的和为0这些代数知识,避免了繁复易错的累加运算,提高了计算速度和准确性.我们容易想到,凡是求接近于某个数的多个数的和,都可以用这种算法,它比使用算

盘、计算器去逐个累加要来得快，而且不容易错。

练习一

1. 某班 40 名学生的身高（以厘米为单位）是：

170, 168, 159, 175, 165, 169, 171, 170,

172, 169, 169, 168, 165, 175, 172, 167,

173, 173, 168, 175, 165, 168, 167, 170,

158, 160, 174, 170, 171, 174, 171, 172,

180, 169, 172, 168, 169, 160, 165, 173.

求全班平均身高。

2. 某班 42 人化学测验成绩是：

100, 100, 99, 99, 98, 98, 98, 97,

96, 96, 95, 95, 95, 95, 94, 94,

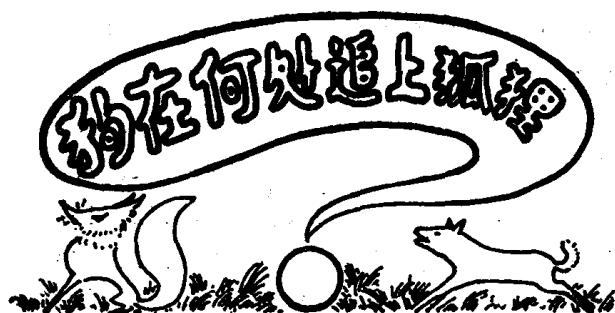
89, 89, 89, 89, 88, 86, 85, 85,

85, 85, 84, 84, 83, 83, 81, 80,

74, 73, 73, 72, 70, 70, 69, 68,

63, 61.

求全班平均成绩。



有这样一个趣题：

A处的狗去追相距 30 米远的狐狸。狗一跳前进 2 米，狐狸一跳前进 1 米。狗跳两次的时间是狐狸跳三次的时间。问：狗跑了多远才追上了狐狸？

这个题目属于追及问题。

用算术方法就可以解答这个题目：

因为“狗一跳前进 2 米，狐狸一跳前进 1 米”。所以，每跳一次，狗比狐狸多前进 1 米。

因为“狗跳两次的时间是狐狸跳三次的时间”，所以，狗每跳两次（同时狐狸跳三次）比狐狸多前进了，也就是狗、狐狸间的距离缩短了

$$2 \times 2 - 3 \times 1 = 1 \text{ (米)} .$$

由于狗与狐狸间隔了 30 米，因而狗需要跳 30 个两次，故跑了 $30 \times 2 \times 2 = 120$ （米）。这就是狗追上狐狸时跑过的距离。

追及问题是行程问题的一类。一个在前面跑，一个在后面追。能不能追上呢？这决定于追的速度，追的速度大于跑的速度时，就追得上，反之，则追不上。

追及问题的基本关系是

$\frac{\text{追者与跑者的间距}}{\text{“追速”} - \text{“跑速”}} = \text{追及时间}.$

你只要留心，就会发现不少追及问题的例子：

在田径运动会上，进行长跑比赛时，枪声一响，运动员同时冲出起点线，在观众助兴的呼喊声中，运动员们沿着400米环形跑道跑了一圈又一圈，并且彼此拉开了距离，领先的“15”号运动员与后面的“10”号运动员的距离越来越大，跑着跑着，跑道上出现了戏剧性的场面：一直跑在最后面的“10号”忽然跑在最“前面”，而一直领先的“15”号反而在后面追他了！他们之间的距离愈来愈近，在观众的一片欢呼声中，一路领先的“15”号终于奋力追过了“10”号而冲向终点…。这个例子就是一个追及问题——相当于“15”号从相距400米处去追“10”号。

在正午时，钟表的时针与分针同时指着刻度“12”，过了12点后，由于分针转得快，时针转得慢，因而分针转在前面，时针转在后面，经过一段时间，分针就可追上时针而与时针重合。这也是一个追及问题。分针每分钟转过的角度是 $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ ，时针每分钟转过的角度是 $\frac{360^\circ}{12} \times \frac{1}{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ ，因而

每过1分钟，分针与时针之间的角度就是 $6^\circ - \left(\frac{1}{2}\right)^\circ =$

$(5.5)^\circ$ 。由此可以求出分针和时针自中午12点以后第1次相重合，第2次相重合，…第 n 次相重合时是几点几分。

练习二

1. 在5000米赛跑中，假定“5”号运动员平均每秒跑6.5米，“21”号运动员平均每分钟跑 $\frac{9}{10}$ 圈（每圈400

米长)。问“5”号追上“21”号时距离终点多远？

2. 两个物体在圆周上按同一个方向运动。每隔 56 分钟相会合一次，如果它们以原速按相反方向运动，那么，它们将每隔 8 分钟相遇一次（不论同向或反向都假定同时出发）。已知按相反方向运动时，它们之间的距离（沿圆周上的）在 24 秒内从 40 米减少到 26 米。求每个物体的运动速度和圆周长。

代数魔术



传说俄罗斯大文豪托尔斯泰十分喜欢数学，他在创作不朽的文学作品之余，常常潜心研究某些数学问题，数学的严谨使他惊叹，而精巧的逻辑推理启迪他构思新的作品。在朋友们欢聚在托尔斯泰家里的时候，在探讨人生、文学创作等问题之余的闲暇时间里，大家都很喜欢参加托尔斯泰主持的数学游戏。在这种被称为数学魔术的游戏中，托尔斯泰让参加游戏的每人心中想一个数，但不要说出来，然后，按照托尔斯泰的指令，完成若干步算术计算，把最后一步的结果说出来，那么托尔斯泰就能知道每个人心中开始想的是什么数。托尔斯泰的神机妙算使大家惊羡不止。

其实，只要熟悉初中数学知识，就可以编一个类似的数学魔术节目。下面就是一个这样的节目：

请你想一个 0 与 10 之间的自然数，

将它乘以 5。

再加上 7。

这个得数再乘以 2。

加上另一个 0 与 10 之间的自然数。

从这得数减去 3。

如果你能说出你的答案，

我就能说出你想的是什么数。

现在来分析这个游戏：

游戏主持人的指令	参加人的算术	游戏主持人的解法
想一个在 0 与 10 之间的自然数	想的数是 6	设想的数是 x
将它乘以 5	$6 \times 5 = 30$	$5x$
再加上 7	$30 + 7 = 37$	$5x + 7$
这个得数再乘以 2	$37 \times 2 = 74$	$10x + 14$
加上另一个 0 与 10 之间的自然数	加上 8 $74 + 8 = 82$	以 y 表示这另一个数 $10x + 14 + y$
从这得数减去 3	$82 - 3 = 79$	$10x + 11 + y$
如果你能说出你的答案，我就能说出你想的数	79	$x = 6$ $y = 8$

那么，怎样求得未知数的值 6 和 8 的呢？过程是这样的：

由于知道了最后一步的答案 79，可得

$$10x + 11 + y = 79,$$

$$y = 68 - 10x.$$

$\because y$ 是 0 与 10 之间的自然数，

$$\therefore 0 < 68 - 10x < 10,$$

$$5.8 < x < 6.8.$$

又 $\because x$ 也必须是自然数，

$\therefore$ 只有 $x = 6$ ，因而 $y = 8$ 。也就是说开始想的数是 6，