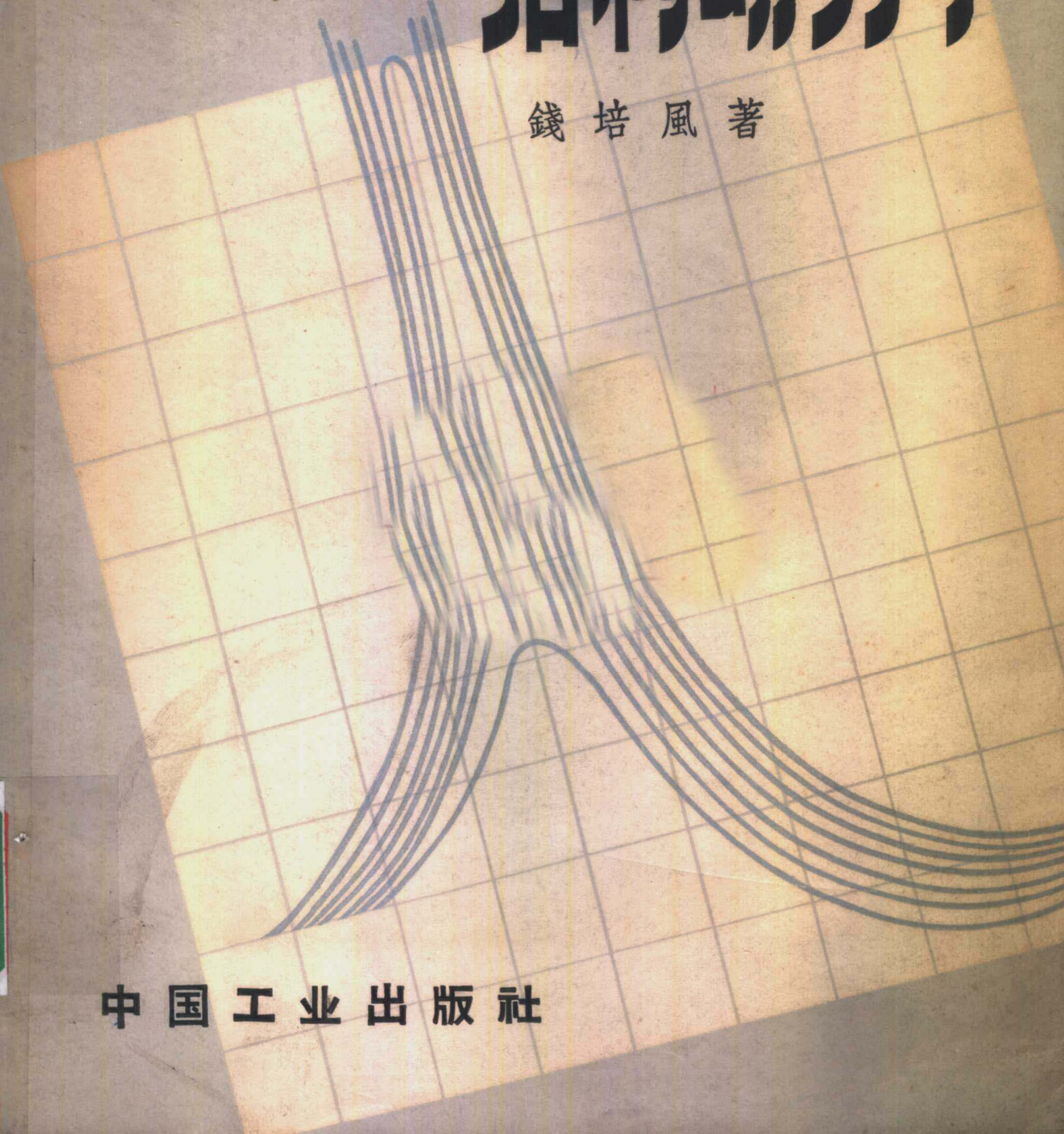
结构动力学

錢培風著



中国工业出版社

本书較全面地闡述了結构动力学的問題。书中前几章是叙述有限自由度体系的横向振动及自振特性的各种近似分析法，后几章是介紹纵向振动、波在杆件中的傳播、动力稳定性、地震力及非綫性振动等。

对連續梁及剛架的动力分析，本书推荐采用我国在静力学中习用的符号，并算出了它的函数数值表。在計算方法上，书中介紹了我国学者的一些研究成果，叙述了大家熟悉的静力方法用于动力分析的情形，并計算了很多有側移剛架的实例。为了簡化計算，著者还推导了連續梁和連續架的力矩、轉角及剪力等影响公式，用以分析它們的自由振动及强迫振动，都免除了展开行列式的工作。

对于結构物动力性能的各种近似分析法，书中作了較全面的介紹，并提出了一些建議，同时对某些建筑物的簡化处理也作了一些介紹。

对于高振型的計算，著者运用数理統計方法对烟囱及水塔等提出了較簡便可靠的公式与数据。

关于結构物对地震的反应問題，著者也根据实驗資料按統計方法分析了动力系数及振型組合系数等。同时还推导了一些簡便公式。

关于确定杆件动力不稳定区域的边界問題，书中也提供了能获得較精确結果的簡便公式。

本书可供土木結构設計人員、研究人員及教学人員参考。

結构动力学
錢培風 著
*
建筑工程部編輯部編輯（北京西郊百万庄）
中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）
（北京市书刊出版事业許可証出字第110号）
五三五工厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售
*
开本 $787\times1092^{1}/_{16}$·印張 $28^{3}/_{4}$·插頁4·字数693,000
1964年6月北京第一版·1964年6月北京第一次印刷
印数 0001—2880·定价（科六）4.00元
*
統一书号：15165·1161（建工-150）

前　言

本书是根据笔者几年来讲授"結构动力学"所編写的讲义加以补充、修改而成的。由于取材比較龐杂，所以分量較多。在整理时，曾打算多删去一些內容，但又覺得我国直到目前还沒有出版过一本自己編写的結构动力学，故决定多保留一点材料，以供大家参考。

书中有一部分內容，是笔者个人的学习心得。有的曾进行过一些研究，并已发表过；有的还只是一点初步的想法，沒有进行很好的研究，笔者也把它提出来，一并求教于讀者。

由于笔者水平有限，要編写好一本分量这样多的书，困难是很多的。可以肯定，书中錯誤及不当之处一定不少，希望大家多加指正。

本书原稿是在1958年完成的，近几年来，国內学者对于結构动力学的研究又有不少的成果，在本书中未能把这些新的資料完全反映出来，这是很遺憾的，如本书有机会再版时将加以弥补。

錢培風

1962年

目 录

第一章 概　　論

§1-1 静力荷重与动力荷重

静力荷重是静止地作用于結构上的荷重。这种荷重不会使結构的质量（包括附着于結构上的质量等）产生加速度或慣性力，或者所产生的慣性力与荷重的本身比較起来是极其微小的。因此，只有以极其緩慢的速度加于結构上的荷重，才可以认为是静力荷重。静力荷重不会使結构产生振动現象，而且在彈性限度以內，将結构的內力及变形等与荷重强度均认为呈綫性关系是相当准确的。动力荷重則相反，它是随时間而很快改变的，它会使結构上的质量产生較大的加速度或慣性力。例如突然作用或突然离开的荷重、逐漸增加或逐漸減少但变化很快的荷重、按任意規律变化的荷重（按諧和規律变化的，以下特称为振动荷重）、瞬时的冲击、周期性的冲击以及基础的运动（包括地震作用）等等，都是屬于动力荷重。动力荷重会使結构发生振动現象。在动力荷重作用下，結构的內力及变形等，除了与荷重的强度有关外，还与荷重作用的方式、荷重变化的規律以及結构物的动力特性等有很重要的关系，这就是动力荷重与静力荷重不同之点。有时动力荷重的强度并不很大，但它却能使結构产生很大的內力及变形。反之，强度很大的动力荷重，有时却又只产生很小的內力及变形，因此不能不加以特别的研究。

实际上我們經常所碰到的荷重，几乎全都是动力荷重。习慣上把某些荷重当成静力荷重来分析，是因为当它們的变化很慢或改变周期大于自振周期五六倍以上时，按照静力荷重来計算，并不产生多大的誤差，而計算工作却簡化得很多。但是对于某些情形，例如結构受有周期性的冲击或振动荷重等，如果外力的周期接近于結构的自振周期，就很可能在不大的荷重作用下結构将产生很大的內力及变形，这就不能不按照动力荷重的計算方法来进行計算。对于这种情形，有时作一些适当的处理又会使这种內力或变形大大的降低。这也就是結构动力学不能不作为一門独立課程来研究的原因之一。

主要的动力荷重，可以簡单地分为下列几类：

1． 位置固定的冲击作用及突然作用的力：荷重作用的位置不变，但作用的方式是突然加于結构或以冲击方式加于結构的，都屬于这一类荷重。例如：打桩机及打鉄机等工作时的冲击作用；投擲重物的影响；山坡崩裂；建筑物倒坍；重物的突然加上或突然离开等都是。

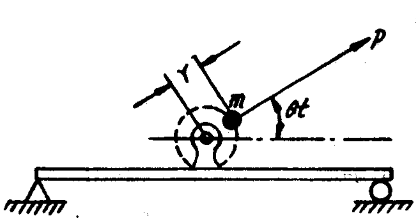


图 1-1

冲击作用如果是周期性的(即經过一定的时間間隔重复出現的)，对于結构，有时会引起很大的不良影响。例如桥梁上鉄軌的某处有一缺口，当火車經过时，車輪就会在缺口处产生冲击作用。如果各車輪間的距离相等，車的行駛速度不变，那就会在缺口处产生周期性的冲击。当冲击的时間間隔与桥梁的自振周期相等或接近时，就会对桥梁产生严重的影响甚至有引起毁坏的可能。整队齐步行經桥梁也与此类似，故宜禁止。

2． 位置固定按諧和規律变化的振动荷重：这种荷重主要是机器轉动时，由不平衡质

量所引起的。例如某机器以角速度 θ 在轉动，如图 1-1 所示。如果机器上有一个不平衡的质量 m，它与轉动軸的距离为 r，則它将产生离心力：

$$P=m\theta^2 r \tag{1-1}$$

用向右的水平綫为計算轉角的始綫，經过时間 t 以后，机器轉动的角度应为 θt，这时离心力 P 的竪直分量及水平分量各为：

$$\left.\begin{aligned} Pf(t)=P\sin\theta t=m\theta^2 r\sin\theta t \\ PF(t)=P\cos\theta t=m\theta^2 r\cos\theta t \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

由上式可見：竪直分量及水平分量都是按照諧和規律变化的振动荷重。当它的頻率与結构的自振頻率接近时，就会引起严重的共振現象。由 1-1 式可以看出：离心力 P 的大小，系正比于机器轉动角速度 θ 的平方。近代机器重量及功率的增大，特别是速率的提高，就迫使結构工程师們对这种荷重所产生的作用，不得不給以很大的重視。

3. 行动的振动荷重：上面所討論的振动荷重，如果它的位置也是不断改变的，就成为行动的振动荷重。例如：机車行駛时，由于車輪的不平衡质量所产生的离心力的竪直分量或者水平分量，都屬于行动的振动荷重。如果机車的行駛速度不变，則这些振动荷重的周期也不变。

4. 行动的冲击作用：假如机車車輪的輪緣有一个缺口，則車輪每轉动一周，就会冲击鉄軌一下。显然这种情形的冲击位置是不断地按等距离改变的，这就是行动的冲击作用的例子之一。如果車子的行駛速度不变，則每一次冲击的时間間隔也就不变。

5. 基础的运动：基础的运动，也会引起結构的振动，所以也屬于动力荷重的一种。引起基础运动的原因很多，除了重型机器鍛錘或車辆行駛等等引起的基础运动以外，还有天然的地震作用以及由于人工爆炸产生的地震……等。

6. 受压力的液体或气体在管中流动时产生的脉动压力。

7. 風的脉动压力：这能使高聳的結构如烟囱、水塔、电視塔以及各种高塔架等产生較大的振动。

8. 爆炸时的空气压力波。

以上各种动力荷重，一般也常統称为干扰作用或干扰力。

§1-2 結构动力学的任务及其主要內容

結构动力学是"結构理論"的一个組成部分，它专門研究結构在动力荷重作用下的反应情形。它的最終目的是：在已知的动力荷重作用下，如何选擇或設計适当的結构物，使它符合于旣經济实用又坚固安全的原則。如果結构物中还安装有不能受較大振动的精密仪器或其他机器等，还必須保証結构物的振动不超出一定的限制；其次，是在新发生的已知的动力荷重作用下，計算原有結构可能产生的最大內力及变形，以校核建筑物是否有足够的强度及勁度，并进一步考虑如何降低和消除振动的强度等。前面已經說过：結构物在动力荷重作用下，将会产生振动現象，所以結构的內力及变形等，也应該是以振动的形式出現的。虽然我們关心的常常是它們的最大値，但有时也需要寻找它們的变化規律（如果我們能够求出它們随时間的变化規律，当然也就可以求出它們的最大値）。

如果将动力荷重的最大値（力幅）当成靜力荷重作用于結构，根据靜力学的方法，算出結构的位移及內力的値，我們把它称为靜力变形及靜力內力。假若能够知道在动力荷重作用

下結构的最大变形或最大內力(簡称为动力变形及动力內力)与靜力变形或靜力內力之比，則求动力变形或动力內力的問題也就算解决了。这个比值称为动力系数或放大系数。因此我們研究結构动力学时，也常常着重討論在各种情形下的动力系数之值。需要順便提及的是：除了单自由度的体系之外，不仅对于变形和內力求出的动力系数常不相等，而且对于各种变形(位移及轉角等)之間，对于各种內力(撓矩、剪力及軸向力等)之間以及在不同截面情况下所求得的动力系数，也常常互不相等。这是由于多自由度的体系作强迫振动时，各种振型都要同时出現等原因而产生的。

在动力荷重作用之下，結构各截面的变形及內力的最大值(或动力系数之值)，都与結构自由振动的周期(或頻率)及振动形式有着十分密切的关系，所以如何寻求結构的自振頻率或自振周期及振动形式等，就成为結构动力学的中心內容。

在共振情形下，阻尼作用能大大地降低結构的振动强度，所以对阻尼的研究也是很重要的。

在以下的各章中我們可以看出：无論是求結构的自振周期及振动形式，或者在动力荷重作用下求結构的最大变形及內力或动力系数等，其計算工作，一般都是十分繁重的。对于某些情形，如果要按照精确方法进行分析，有时甚至是不可能的。因此，如何設法使計算簡化，以及寻求可靠的近似分析方法，也是非常重要的。

对于烟囱、高塔一类的高柔結构，根据近年来的研究，在計算地震力或風荷重时，都必需考虑它的高振型影响。但是即使采用各种近似分析方法，計算起来也是十分麻煩的。很多学者曾作过一些近似假定，从而导出了一些經驗公式，它的缺点是誤差常常偏大。笔者覺得有很多結构的动力性能，常常具有某些統計規律，只要选擇好适当的統計量，找到这种規律，就可能按数理統計的分析方法，提供一些簡便的数据及公式。在第九章分析烟囱及水塔的动力性能以及第十一章地震力中的一些系数，笔者都按照这一途徑做了一点初步的工作，謹提出以供大家参考。

前面說过：如果加于結构上的动力荷重，是有一定节奏的冲击或振动荷重，当其周期与結构自振周期相等或接近时，結构物就会出現强烈的振蕩，即使不致于引起破坏現象，过大的振动，也会使它的寿命减短，生活于其中的人会感到不舒服甚至不能工作等。至于制造或安装精密仪器的工厂，对于振动的限制就更加严格，所以如何設法采取一些防震措施以避免或减低結构物的振动，也是很重要的研究課題。

§1-3 体系的自由度

体系在振动过程中的任何时刻，确定其全部质量位置或变形情况所需要的独立参变数的数目，就是这个体系的自由度数。如图 2-1 所示的体系：假設彈簧本身沒有质量(或不計彈簧的质量)，如果下面挂着的那个集中质量的运动情况不受任何限制，則容易知道它应該是三个自由度的体系。因为这个质量在空中任一点的位置，只要用三个坐标(也必須用三个坐标)，就可以确定下来。又如图 2-4 及图 2-5 所示的体系，假設梁(杆件)本身是沒有质量的，在其上各置一个集中质量，則它們都是两个自由度的体系。因为只要知道质量 m 在垂直于杆件平面任意二方向的两个分位移，就可以确定它的位置。需要說明的是：当振幅很小时，梁沿它自身的軸綫方向的伸縮及变位都非常微小，可略去不計(除第十章外，其余各章都适用于这个假定)。

上面所討論的是质量的运动不受任何限制的情形。如果受到限制，则体系的自由度就会有所減少。例如：若有某种控制使图 2-5 及图 2-4 所示体系的质量都只能在一个平面內运动，則它們都将是一个自由度的体系。图 2-1 所示的体系，若限制质量 m 只能在一个平面內运动，则它只是两个自由度的体系；假如更限制质量 m 只能在豎直方向运动，则它也成为一个自由度的体系。除了某些特殊情形外，以后我們都假定质量只能在一个平面內运动。

图 1-2 所示的体系，虽然只有一个集中质量，但它却具有两个自由度。因为必須知道图中所示的两个位移 y_1 及 y_2 之值，才能确定质量 m 的位置。又如图 5-2 所示的体系，虽然只有两个集中质量，也具有三个自由度，这是由于当体系发生变形时，质量 m_2 有豎直及水平两个互相独立的分位移（m_1 只有水平位移），所以需要知道三个位移，才能够确定两个质量 m_1 及 m_2 的位置。现在我們再来看一看图 9-7(a)所示的折綫梁：当它发生变形时，已知质量 m_1 的位移方向应該垂直于 AB 杆件，如果把它分为豎直的及水平的两个分位移，它們当然不是互相独立的；质量 m_2 的位移方向，本来也是垂直于 BC 杆件的，但因为 BC 杆件的 B 端及 C 端都有移动，因而质量 m_2 的位移方向就較难确定了。在进行分析时，只有将它的豎直及水平两个分位移分开来表示，才比較簡单。这两个分位移，倒确是互相独立的，但其中的一个与 m_1 的位移，又具有一定的关系，所以这个体系仍然只具有两个自由度。关于这一点，根据后面所述的办法来判断，就会更容易地看出。

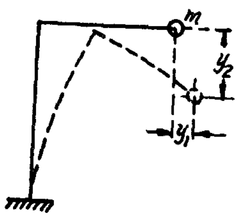


图 1-2

前面說过：一个体系的自由度数，是确定这个体系上全部质量的位置所需要的独立参变数。上面所举的例子，都是采用位移来作为参变数的，但我們也可以采用轉角或其他的量来作为参变数。

如图 1-3 所示的体系：假設梁是具有无限剛勁的，那么不管在这个梁上有多少个集中质量或者分布质量，它都是单自由度的体系。因为各质量的位移并不互相独立，而是与距 A 点的距离成一定比例关系的。对于这种情形，显然只要知道轉角 φ 之后，梁上各质量的位置就都知道了，所以它只是单自由度的体系。假如将 A 点也换成一个彈簧支承，则需要知道任一支承的位移及梁的轉角 φ，才能确定梁上各点的位置，所以应該是两个自由度的体系。

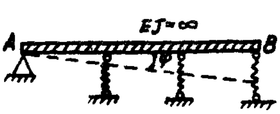


图 1-3

由以上的例子看来：有时在确定某些体系的自由度时，会比較麻煩。对于这种情形，我們最好加入一些支承連杆去限制这个体系，使它的全部质量都不能移动。于是，所需要連杆的最少数目，就是这个体系的自由度数。例如图 1-4(a)所示的体系：加入三个支承連杆之后[图 1-4(b)]，各质量就不能移动了。减少了任何一根支承連杆，质量都可能发生移动，所以这个体系为三个自由度的体系。利用这个办法，我們就可以很容易地确定上述图 9-7(a)所示的折綫形梁是具有两个自由度的体系。

如果体系的质量不是集中的，而是沿着它的杆件长度分布的，则除了杆件的勁度 $EJ=\infty$ 的特殊情形以外，都屬于无限自由度的体系。因为有限的参变数不能确定振动时杆件所有质量的位置及变形情况。

本来任何构件自身的质量，都是沿它的长度分布的，所以任何体系都应該是无限自由度的体系。但是对于有些情形：体系承受着一些很大的集中质量，它与結构自身的质量相

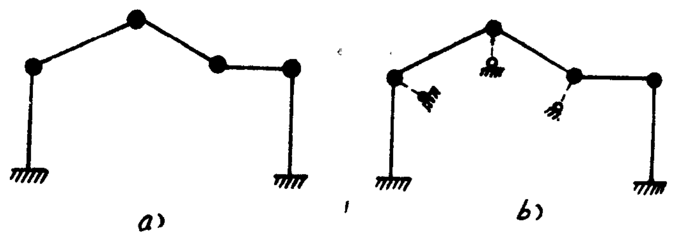


图 1-4

比，后者可以略去不計，于是，体系就变成了有限自由度的体系。有时为了計算上的簡化，我們也常近似地将沿构件长度分布的质量，当作集中于某些点的集中质量来看待，这样体系也变成有限自由度的体系。但是不論怎样，經过这样的处理以后，必須使它的动力性能不会产生很大的誤差才行。关于这些問題，将要在第八章及第九章內再加以討論。

§1-4 振动的分类

前面讲过：結构动力学是研究結构的振动现象的。現在我們先討論結构振动的分类如下：

（1）按体系的自由度分类：

（一）单自由度体系的振动：討論只有一个自由度的体系的振动問題。

（二）多自由度体系的振动：討論具有两个及两个自由度以上(但自由度数是有限的)的体系的振动問題。后面第四章及第五章我們将两个自由度与多自由度体系的振动問題分开来叙述，目的是想使討論的重点有些不同。

（三）无限自由度体系的振动：这一部分本书完全是討論土建結构上所用的单跨梁（等截面及变截面的）、連續梁、剛架、拱、板、烟囱、筒仓、单层厂房及水塔(磚圓筒支承)等的振动問題。关于桁架的振动，如果按无限自由度体系来进行分析，可以說是屬于不可能的事，所以只能把杆件的质量都集中起来，然后按有限自由度的体系来进行計算。折綫形梁及多层剛架的精确分析法也是相当繁难的，所以我們也只討論集中质量的情形。

（2）按振动方向与杆件軸綫方向的关系来分类：

（一）横向振动：当体系振动时，质量运动的方向与杆件的軸向垂直的，称为横向振动。横向振动又分为撓曲振动与剪切振动两种。后者的变形以剪切变形为主，只有特别粗而短的杆件屬之(多层剛架及磚石結构有側移的振动，根据实测結果証明常接近于剪切振动)。下面各章所討論的横向振动，都假定杆件的长度比它的截面尺寸大得很多，所以都只需要考虑杆件的撓曲变形就够了，剪切变形一概略去不計，故屬于撓曲振动。对于以剪切变形为主的剪切振动，則特別加以注明。

（二）纵向振动：当体系振动时，质量的运动方向与杆件的軸向一致的，就称为纵向振动。如果杆件相当細长，还需要考虑它的稳定，則成为动力稳定問題，将于第十章叙述。

（3）按振动时干扰作用是否存在而分类：

（一）自由振动：在体系振动过程中不受到外部干扰作用的，称为自由振动。

（二）强迫振动：如果在体系振动过程中，外部干扰作用还是一直存在着的，就称为强

迫振动(屬于上述的动力稳定問題的，又称为参数振动)。

（4）按振动时是否考虑阻尼作用而分类：

（一)有阻尼振动：体系振动时，总是要受到各种各样的阻尼作用的。譬如：体系与支座間的摩擦阻尼、构件間的摩擦阻尼、材料的內摩擦阻尼、质量或构件与介质間的摩擦阻尼作用等，都会减低体系的振动强度。如果研究体系的振动問題时，将这些阻力作用考虑进去，就称为有阻尼振动。

（二)无阻尼振动：考虑了阻尼作用之后，有时会使計算过于繁杂，而对于某些情形或所研究的某些問題，阻尼的影响并不很大，所以在以后各章中，也常常略去或者暂不考虑阻尼的影响，这就是无阻尼振动。

（5）按振动微分方程的性质而分类：

（一)綫性振动：如果所建立的振动的微分方程是綫性的，就是綫性振动；

（二)非綫性振动：表示这种振动的微分方程是非綫性的，就是非綫性振动。

（三)参数振动：本书将討論杆件受纵向干扰力引起横向的振动問題。

体系在振动时，除了要受到外来的干扰力以及质量的慣性力之外，还有彈性力和阻尼力等。假若构成体系的材料是理想的彈性材料，则彈性力当正比于体系的形变。这时无阻尼的微幅振动，就是綫性振动。实际上材料的性质是沒有严格服从于上述比例关系的。但由于非綫性的振动很难求解，而普通我們又只研究振幅很小的振动(微幅振动)，所以就常常近似地承认应力与应变的綫性关系。除了第十二章以外，以下的討論都是如此。

体系在振动时所受的阻力作用，本来是很复杂的，但是为了便于問題的求解，在下面的几章中，都采用习慣用的福格特（Фогт）于1890年提出的胶质阻尼的假定(即假定质量振动时所受的阻尼力正比于它的运动速度)。实际上只有当质量以很低的速度在粘性液体內运动以及在相对摩擦面間有連續的油膜存在时，这种假定才比較可靠。对于其他的阻尼作用，有时可根据振动一周所消耗的能量相等的关系，化为所謂“当量的胶质阻尼”来代替实际的阻力。这样也可以得到綫性的振动。如果我們只对經过一个周期振动的衰减情形感兴趣，而不注意在一个周期內的变化情况，这种处理法，显然是可以采取的。

建筑材料及建筑物振动时，主要是受到材料的內摩擦阻尼。为了很好的表示这种阻尼作用，曾經有不少的学者提出过各种不同的假設，有些的确能較好的反应实际情况，但由于在数学分析上带来了很多的困难，所以仍旧沒有得到推广。苏联学者 E. C. 索罗肯（Сорокин）于1951年提出复阻尼的假定，能很好的反应材料的內阻尼，在数学分析上也很方便，所以我們特别在第十二章作专門的介紹。

当体系的振幅很大时，由于很大的曲率及质量在杆件的纵向所产生的慣性力等，也会引起非綫性的因素。关于非綫性的振动，近来研究者很多，应用也很广，但本书不拟多述，仅在第十二章作簡单的介紹。

§1-5 材料的持久强度

在动力荷重作用下，构件常产生循环的应力。如果循环应力是正負交变而且又是对称的，則在作用时間較长的情况下，材料的强度将远小于其靜力强度。从前认为这是因为材料产生了疲劳現象，所以称这种强度为疲劳强度。現在虽然还沿用这一名詞，但疲劳現象的說法已經被否定了。根据現在的研究认为：材料疲劳現象产生的主要原因，是由于材料

本身組織的不均匀。无論任何材料，从微观上去研究，它的組織都是很不均匀的。因而当它承受外力作用时、在微小面积上应力的分布也是极不均匀的。在静荷重作用下，由于塑性变形的原因，可以使那些集中的应力重加分布变得比較均匀；但是在动力作用下，应力很快地改变，还沒有机会让材料产生塑性变形，应力又改变了方向，因而也就沒有条件使应力的分布变为平坦，結果在应力极大的地方，材料組織就慢慢地发生松弛現象，以致出現所謂"疲劳裂縫"。焊接处的应力容易集中，所以在动力荷重作用下也最容易引起破坏。

材料抵抗疲劳的能力，又称为动力强度或持久强度。材料在一定条件下，承受无穷次才破坏的周期性循环应力，称为材料的持久强度极限。由于实际上不可能发生无穷次的循环应力，而且根据試驗結果說明：当循环次数相当多以后，强度极限的变化就很小，所以对循环应力的交变次数，就給了一个限制：对于有色金屬，一般規定为 5×10^{7} 次，对于黑色金屬和建筑材料为 5×10^{6} 次。

循环应力的变化規律，显然也会影响持久强度的大小。一般都采用按簡諧变化的振动力作为試驗的标准。为了减少試驗的时間，曾有人打算将动力改为逐漸增加的振动力，对此这里不拟贅述。

影响持久强度的因素很多，大体說来可以分为：

（1）动力荷載与靜力荷載的比值：如果用 S 表示由于动力荷載产生的应力 $\sigma_{\partial u \kappa}$ 与由于靜力荷載产生的应力 $\sigma_{c\overline{m}}$ 的比值，即：

$$S=\frac{\sigma_{\partial u \kappa}}{\sigma_{c\overline{m}}} \tag{1-3}$$

試驗結果表明：S 之值越大，則持久强度越低。

（2）試件的形式：如所周知，試件截面的改变越突然，則应力越容易集中，因而持久强度也越低。

（3）試件的大小：試件的尺寸越大，持久强度越低。但其降低程度，又随应力是否均匀而不同。一般在不均匀的应力状态下(例如受弯等)降低得很多。根据試驗証明：各号鋼材做的軸，其直徑自 15 毫米增至 100 毫米时，持久极限强度可降低 35%；在均匀应力状态下，降低就会很小，例如軸心受拉与受压等，試件直徑自 7 毫米增至 35 毫米，持久极限强度最多只降低 5 %。

（4）接头情况与局部削弱：在构件的接头处都会产生应力的集中，因而就会大大的降低持久极限强度。局部削弱也是如此，不必贅述。

（5）其他原因：試件表面粗糙或有擦伤等，也会引起集中应力，因而也会降低持久强度。其他如温度的变化，事先冷压或預先加以幅度較小的循环应力等，都会影响材料的持久强度。关于这些不是本书的討論范圍，这里就不作詳細的介紹了。

第二章　单自由度体系的自由振动，振动的合成与分解

§2-1　不考虑阻尼作用的自由振动

本章前三节討論单自由度体系的自由振动，首先假定体系振动时沒有阻尼力存在，或者說暫不考虑阻尼力的作用。

图 2-1 示有一条上端固定的彈簧，其下端悬挂着一个集中质量 m。假如这个质量只能在鉛直方向运动，而且彈簧本身的质量比起它所悬挂的质量 m 来，十分微小，可以略而不計，则这个体系就是单自由度的体系。实綫表示它仅承受质量 m 重力作用时的静力平衡位置；虚綫表示它在振动过程中，某一时刻的位置。体系处于静力平衡位置时，质量 m 的重力与此时彈簧內的彈性力剛好相互平衡。当体系振动时，除此二力之外，体系还要受到其他力的作用，但上述的这两个力，在任何时刻都是相互抵消的。因此在研究这个体系的振动方程时，可以不必去管它。以后所討論的彈性力，都是指体系离开静力平衡位置后新增加的彈性力，同时所說的质量的位移也是从静力平衡位置算起。

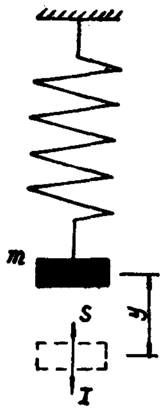


图　2-1

用 K 表示体系的剛度系数(或称为彈簧常数)，即是使质量 m 在振动方向产生单位位移时所需要的力。当质量 m 到达虚綫所示的位置时，已經从平衡位置移动了距离 y，所以彈簧內的彈性力 S 当为：

$$S=-Ky \tag{2-1}$$

等号右边的负号，表示彈性力总是与位移 y 的方向相反。

除了上述的彈性力之外，体系在振动过程中，质量 m 还受到一个慣性力 I 的作用。其值为：

$$I=-m\frac{d^2y}{dt^2}=-m\ddot{y} \tag{2-2}$$

等号右边的负号，表示慣性力总是与加速度的方向相反。

根据达朗貝尔原理，在质量振动过程中的任何时刻，如果体系不再受到其他外力及阻尼力的作用，则这两个力总是相互平衡的，即：

$$S+I=0 \tag{2-3}$$

将(2-1)及(2-2)之值代入上式，即得单自由度体系自由振动的微分方程为：

$$m\ddot{y}+Ky=0 \tag{2-4}$$

或
$$\ddot{y}+\frac{K}{m}y=0$$

令
$$\omega^2=\frac{K}{m} \tag{2-5}$$

则上式变为：

$$\ddot{y}+\omega^2 y=0 \tag{2-6}$$

这是二阶的常系数常微分方程，其特微方程为：

$$\lambda^2+\omega^2=0$$

$$\therefore \qquad \lambda=\pm i\omega$$

因此(2-6)式的通解为：

$$y=c_1 e^{i\omega t}+c_2 e^{-i\omega t}$$

或

$$y=A'\cos\omega t+A''\sin\omega t \tag{2-7}$$

c_1 及 c_2 或 A' 及 A'' 均为积分常数。

因为正弦及余弦都是周期函数，当角度相差 2π 的整倍数时，函数之值仍不改变，所以如果时間 t 之值不断的增加时，体系将周而复始作循环不已的振动。

我們以 T 表示体系的自振周期，即当体系振动一周以后又恢复原来的位置及动态所需的时間，则可得下式关系。

$$\omega(t+T)-\omega t=2\pi$$

$$\therefore \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \tag{2-8}$$

周期的倒数，即单位时間的振动次数，称为頻率。如以 f 表之，則：

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \tag{2-9}$$

如果以秒作为时間的单位。則頻率 f 就是每一秒钟的振动次数。为了紀念一位无綫电工作者，就以他的名字赫芝作为上述頻率的单位。頻率的 2π 倍，或者說 2π 秒的振动次数，即 $2\pi f=\omega$，称为圓頻率或角頻率，也常簡称为頻率。这里所研究的是自由振动，所以 ω 及 f 又称为自振頻率。

如以 δ 表示单位位移(即在质量 m 的振动方向作用单位力时，质量 m 所产生的位移)，則：

$$\delta=\frac{1}{K} \qquad 或 \qquad K=\frac{1}{\delta}$$

代入(2-5)式，可得：

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{1}{m\delta}}$$

根号內的分子分母，都以重力加速度 g 乘之，則上式又可变为：

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{mg\delta}}=\sqrt{\frac{g}{Q\delta}}=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}$$

式中：Q 表示质量 m 的重量；

y_{cm} 表示静力位移。即在振动方向作用一个大小等于 $Q(=mg)$ 的静力于质量时，质量 m 所产生的位移。

把以上各式一齐联写出来，就得到求单自由度体系自振頻率的各种公式如下：

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{1}{m\delta}}=\sqrt{\frac{g}{Q\delta}}=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} \tag{2-10}$$

由上式可見：体系的頻率(或周期)，是决定于它的彈簧剛度及质量大小的一个常数。

如果用 n 表示一分钟的振动次数，则：

$$n=60f=\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}\approx\frac{300}{\sqrt{y_{cm}}} \tag{2-11}$$

n 常称为工程频率。

現在再来研究（2-7）式。其中 A' 及 A'' 两个常数，系根据体系振动的起始条件来确定的。所謂起始条件，就是我們所选时間的計算起点（$t=0$时）的位移及速度，或称为起始位移及起始速度。如果以 y_0 及 v_0 表之，则代入(2-7)式后可得：

$$y_0=A'$$

$$v_0=\dot{y}_0=\omega A'' \qquad 或\ A''=\frac{v_0}{\omega}$$

所以(2-7)式又可写为：

$$y=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{2-12}$$

由此可見：对于自由振动而言，只要知道起始位移及起始速度，它的振动方程，就完全确定了。

此外，(2-7)式还常常用另一种形式来表示，玆述之如下：

如令：
$$\left.\begin{aligned}A'&=A\sin\varphi\\A''&=A\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2-13}$$

则
$$y=A\cos\omega t\sin\varphi+A\sin\omega t\cos\varphi$$

即
$$y=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{2-14}$$

式中：$A=y_{\max}$ 称为振幅；

$(\omega t+\varphi)$称为相角或相位；

φ 称为初相角或初相位，即时間 $t=0$ 时的相角或相位。

由(2-13)式，可推得：

$$\left.\begin{aligned}A&=\sqrt{A'^2+A''^2}=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\\\mathrm{tg}\,\varphi&=\frac{A'}{A''}=\frac{\omega y_0}{v_0}\end{aligned}\right\} \tag{2-15}$$

由(2-13)式及(2-15)式可見：A' 与 A'' 及 A 与 φ 这两对常数，只要知道了其中的任一对，就可以按上式关系求其他的一对。

如图 2-2 所示：若自横軸正向按逆时針方向取一角度等于初相角 φ，得 OP 綫。以此綫为始綫，再按逆时針方向旋轉角度 ωt 而得 OP' 綫（我們規定逆时針旋轉的角度为正，反之为負），则 OP' 与横軸交成的角度即为相角：$(\omega t+\varphi)$。

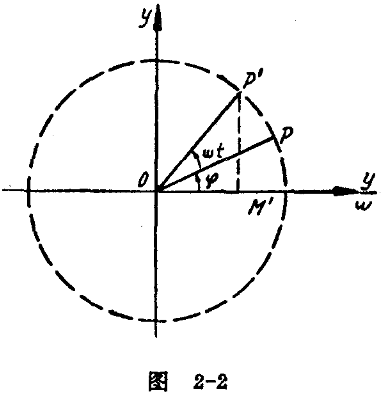


图 2-2

取矢綫 OP 等于振幅 A，自 P' 点作横軸之垂綫 $P'M'$，则

$$OM'=OP'\cos(\omega t+\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$P'M'=OP'\sin(\omega t+\varphi)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

从(2-14)式得：

$$\dot{y}=A\omega\cos(\omega t+\varphi) \tag{2-14'}$$

比較以上各式可見：

$$OM'=\frac{\dot{y}}{\omega}, \qquad M'P'=y$$

所以如果以 y 为纵軸，$\frac{\dot{y}}{\omega}$为横軸(普通也常用 $\dot{y}$ 为横軸)，取一綫段 $OP=A$(振幅)，且使 OP 与横軸交成 φ 角，然后以 O 为圓心，以等角速度 ω 按反时針方向旋轉(旋轉一周所需时間就是一周期)，設在时間为 t 时得 P' 点，則 P' 点在 y 軸及 $\frac{\dot{y}}{\omega}$ 軸上的投影，即表示(2-14)式的 y 及$\frac{\dot{y}}{\omega}$之値；OP' 与$\frac{\dot{y}}{\omega}$軸所夹的角，即为相角；这两个軸組成的平面，称为相平面。将(2-14)及(2-14′)式平方后相加即可消除时間 t 而得：$(\dot{y}/\omega)^2+y^2=A_0^2$ 在相平面上可划得如图 2-2 所示的圓，称为相軌綫(加入阻尼作用的相軌綫为一螺旋綫)。利用相平面及相軌綫来研究振动的性质，有时甚为方便。所以也常常使用。

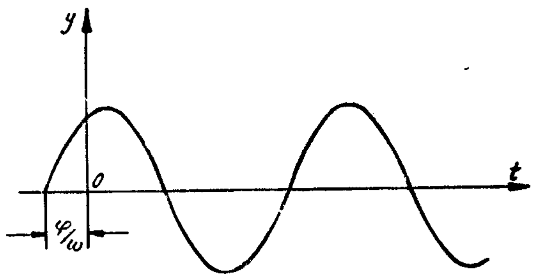


图 2-3

如以时間 t 为横軸，y 为纵軸，則(2-14)式又可表为另一种常用的曲綫，如图 2-3 所示。这种曲綫称为位移时間曲綫。

对于图 1-3 所示的体系，在振动时系繞 A 点而旋轉，故可称为旋轉振动。以 J_m 表示体系上所有质量对旋轉軸(过 A 点的軸)的慣性矩；K_φ 表示抗旋轉剛度，即使体系产生单位旋轉角所需的力矩，則根据力矩平衡关系，可得体系振动的微分方程为：

$$J_m\ddot{\varphi}+K_\varphi\varphi=0$$

或

$$\ddot{\varphi}+\omega_\varphi^2\varphi=0 \tag{2-16}$$

式中：

$$\omega_\varphi^2=\frac{K_\varphi}{J_m} \tag{2-17}$$

因为(2-16)式与(2-6)式的形式完全相同，所以它的解答也可以表为(2-7)式及(2-14)式，只要将 ω 换为 ω_φ 就行了。ω_φ 为旋振动的自振頻率，可按(2-17)式求取。

剛性建筑(如低层寬大的磚石結构等)的振动，根据实測及分析的結果，有些学者认为它的变形主要是由于基础的旋轉。若如此，則应屬于这种旋轉振动的問題。如果体系的抗旋轉剛度系由于通过 A 点的軸的扭轉而产生，則称为扭轉振动。

例一：图 2-4 表示一簡支的等截面梁(以下不特別申明者，都是指等截面梁)，在它的中央有一个集中质量 m。若梁本身的质量可以略去不計，試求其自振頻率。

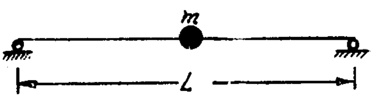


图 2-4

解：因靜力位移 y_{cm} 为：

$$y_{cm}=\frac{mgL^3}{48EJ}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}=\sqrt{\frac{g}{\frac{mgL^3}{48EJ}}}=\sqrt{\frac{48EJ}{mL^3}}$$