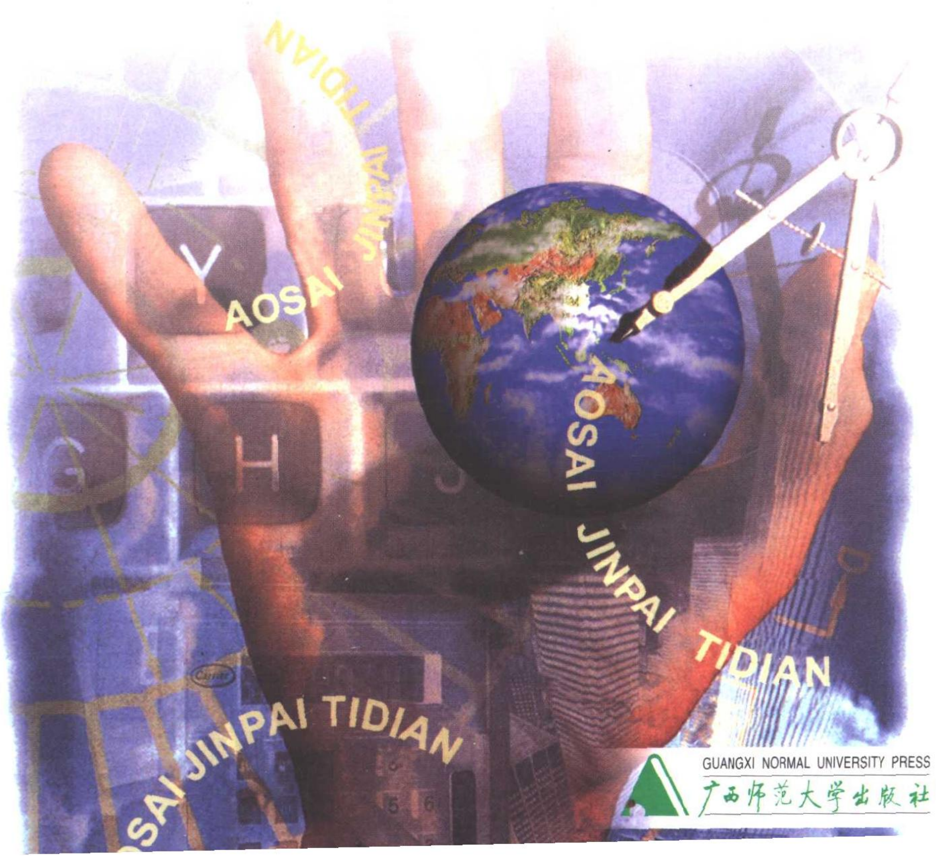
彩虹策划

夏 炎 周以宏 等 编著

奥赛金牌题典

初中数学



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

夏 炎 周以宏 编著

Aosai Jinpai Tidian

奥赛金牌题典

初中数学

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂 林·

奥赛金牌题典　初中数学

夏炎　周以宏　编著

责任编辑:梁燕鸿　　封面设计:杨　琳　　版式设计:林　园

广西师范大学出版社出版发行

(广西桂林市育才路15号　邮政编码:541004
网址:http://www.bbtpress.cn)

北海商标印刷厂印刷

*

开本:890×1 240　1/32　　印张:12.5　　字数:420千字

2004年6月第1版　　2004年6月第1次印刷

印数:00 001～20 000册

ISBN 7-5633-4610-4/G・2774

定价:14.80元

前言

奥林匹克竞赛是向广大学生开展素质能力教育的高层次知识竞赛，而在竞赛的过程中存在一个十分普遍的现象：尽管同学们对竞赛所涉及的知识和方法有一定的理解，但就是不擅解题，无从着手。这说明了知识和实践之间仍有一定距离。本丛书就是要帮助读者缩短这个距离，加深领悟，开阔视野，激发智力，提高能力。

本丛书的各分册在栏目设置、编写板块上，既考虑到内容的科学性，又注意到可读性，具有很好的层次，具体表现在：例题的选择由浅入深，分析过程抓住关键点、易错点；通过醒目的旁批帮助读者加深对题意的理解，提高把握关键问题的能力；画龙点晴的归纳总结，更加升华了同学们的对各种题型的解题思路、规律技巧和破题关键的认识；题型多样化的配套训练题非常有助于读者的思维拓展和能力拓展，对消化疑难点、掌握技巧点有巨大的帮助。

本丛书作者阵容强大，由培养了众多国际奥林匹克竞赛金牌、银牌得主的全国一流奥赛教练联袂编写，必将为同学们参加奥林匹克竞赛或各种考试起到相当大的指引作用。

编者

目录

AOSAIJINPAITIDIAN

以下各单元包括“重点·难点·赛点”、“解题方法例析”、“赛前优化训练”和“参考答案”。

第一讲

一元二次方程

重点·难点·赛点

形如$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的整式方程称为一元二次方程.一元二次方程的解法有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法,其中后两种最为常用.尽管用配方法解一元二次方程并不多,但配方法本身是一种重要的数学思想方法.

解题方法例析

例1 (1990年淮阴市初中数学竞赛试题)解方程$x^2-(1+2\sqrt{3})x+3+\sqrt{3}=0$.

分析:本题可用求根公式求根.若能观察系数的特征,则可尝试使用因式分解法.此法的关键是要能恰当地分解常数项,也可重新整理方程,便于使用因式分解法.

解法一 ∵ $\Delta=(1+2\sqrt{3})^2-4\times1\times(3+\sqrt{3})=1$,

∴ $x=\dfrac{1+2\sqrt{3}\pm1}{2}$, 即 $x_1=\sqrt{3},x_2=1+\sqrt{3}$.

解法二 由$3+\sqrt{3}=\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$,将原方程左边因式分解,得

$$(x-\sqrt{3})[x-(1+\sqrt{3})]=0,$$

∴ $x_1=\sqrt{3},x_2=1+\sqrt{3}$.

解法三 将原方程整理,得

$x^2-2\sqrt{3}x+3-x+\sqrt{3}=0$,

即 $(x-\sqrt{3})^2-(x-\sqrt{3})=0$，

∴ $(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3}-1)=0$，

故 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$.

说明：解法二比较快捷，但需要有较强的洞察力. 如果不易看出，还是用公式法解或像解法三那样用因式分解法为好.

例 2 （1993 年苏州市初中数学竞赛试题）解关于 x 的方程 $(a^2-1)x+(ax^2-a)=a^2(x^2-x+1)$.

分析：在解含有字母系数的一元二次方程时，常常要对字母系数进行讨论，在讨论时要防止遗漏各种可能的情况.

解 原方程可化为

$a(a-1)x^2-(2a^2-1)x+a(a+1)=0$.

(1) 当 $a(a-1)=0$，即 $a=0$ 或 1 时，原方程为一元一次方程. 由 $a=0$，得 $x=0$；由 $a=1$，得 $x=2$；

(2) 当 $a(a-1)\neq 0$，即 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，原方程为一元二次方程. 运用因式分解法，得

$[ax-(a+1)][(a-1)x-a]=0$，

∴ $x_1=\dfrac{a+1}{a}$，$x_2=\dfrac{a}{a-1}$.

说明：此题典型的错误是忽略 $a(a-1)=0$ 时方程的求解. 另外，解含字母系数的一元二次方程时，要善于观察其特点，力求运用因式分解法.

例 3 （1992 年南昌市初中数学竞赛试题）解方程 $x^2-|2x-1|-4=0$.

分析：关键是根据绝对值的意义去掉绝对值的符号.

解 (1) 当 $x\geqslant \dfrac{1}{2}$ 时，原方程可化为 $x^2-2x-3=0$，

解得 $x_1=3$，$x_2=-1$（舍去）；

(2) 当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，原方程可化为 $x^2+2x-5=0$，

解得 $x_1=-1-\sqrt{6}$，$x_2=-1+\sqrt{6}$（舍去）.

综上，原方程的解为 $x=3$ 或 $x=-1-\sqrt{6}$.

说明：解这类问题时一定要注意讨论的前提与所求根之间的内在关系并据此决定取舍.

例 4 （2002年辽宁省初中数学竞赛试题）解方程$(2002-x)^2+(2003-x)^2=1$.

分析：若将方程左边的两项展开，化为一元二次方程的一般式，则一次项系数的绝对值和常数项都“很大”，解起来很繁杂．若注意到右边的1可改写成$(2003-2002)^2$，再在其中插入“$-x+x$”，展开后平方项可与左边抵消．自然成了一种分解因式型的方程．

解法一 原方程可化为

$(2002-x)^2+(2003-x)^2=[(2002-x)+(x-2003)]^2$，

即 $(2002-x)^2+(2003-x)^2=(2002-x)^2-2(2002-x)(2003-x)+(2003-x)^2$，

∴ $(2002-x)(2003-x)=0$.

解得 $x_1=2002$，$x_2=2003$.

解法二 观察已知方程的特点，易知 $x=2002$ 或 $x=2003$ 都是方程的解．又因为已知方程为一元二次方程，最多有两个实数解，所以原方程的根为 $x_1=2002$，$x_2=2003$.

说明：解法一的右边配方是化难为易的关键所在．解法二使用观察法，要避免出现漏解现象．

例 5 （1984年北京市初中数学竞赛试题）方程$(1984x)^2-1983\cdot1985x-1=0$的较大根为$r$，$x^2+1983x-1984=0$的较小根为$s$，求$r-s$的值．

分析：欲求$r-s$，需求出r和s，即需要解已知的两个方程，问题便可迎刃而解．

解 方程$(1984x)^2-1983\cdot1985x-1=0$可化为

$(1984x)^2-(1984^2-1)x-1=0$，

即 $(1984^2x+1)(x-1)=0$，

∴ $x_1=-\dfrac{1}{1984^2}$，$x_2=1$.

从而 $r=1$.

又方程 $x^2+1983x-1984=0$ 可化为

$(x+1984)(x-1)=0$，

∴ $x_1=-1984$，$x_2=1$.

从而 $s=-1984$.

因此 $r-s=1-(-1984)=1985$.

说明:本例的两个方程都可用因式分解法和求根公式法来解,但因式分解法更为简便.

上述例 1～5,反映解一元二次方程时,要充分根据方程的特征,灵活地选择解法,不可一见一元二次方程,就用公式法解之.

例 6 (1991 年合肥市初中数学竞赛试题)已知关于 x 的方程 $3x^2+2ax-a^2=0$ 的一个根为 1,求它的另一根.

分析:要求方程的另一根,必须知道 a 的值.根据方程根的定义,将 $x=1$ 代入已知方程便可求出 a 的值.

解 根据题意,将根 $x=1$ 代入已知方程并整理,得

$a^2-2a-3=0$,即 $(a-3)(a+1)=0$.

$\therefore\ a_1=3, a_2=-1$.

(1) 当 $a=3$ 时,原方程可化为 $3x^2+6x-9=0$,解得 $x_1=1, x_2=-3$;

(2) 当 $a=-1$ 时,原方程可化为 $3x^2-2x-1=0$,解得 $x_1=1, x_2=-\frac{1}{3}$.

综上,方程的另一根是 -3 或 $-\frac{1}{3}$.

说明:如果 x_0 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,那么就有 $ax_0{}^2+bx_0+c=0$. 反之亦然.

例 7 (1994 年"缙云杯"初中数学邀请赛试题)已知 b,c 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,且 $c\neq0, b\neq c$,求 b,c 的值.

分析:根据方程根的定义,b,c 适合方程 $x^2+bx+c=0$,由此可得关于 b,c 的方程组,进而可解出 b,c 的值.

解 $\because$ b,c 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,且 $b\neq c$,

$$\therefore \begin{cases} \Delta=b^2-4c>0, & ①\\ b^2+b^2+c=0, & ②\\ c^2+bc+c=0. & ③ \end{cases}$$

由③及 $c\neq0$,得

$$c=-b-1. \qquad ④$$

将④代入②,得

$2b^2-b-1=0$,

解得 $b=-\frac{1}{2}$ 或 $b=1$.

当 $b=-\frac{1}{2}$ 时,$c=-b-1=-\frac{1}{2}$,与 $b\neq c$ 不符,应舍去;

当 $b=1$ 时,$c=-b-1=-2$,满足①、②、③.

故 $b=1, c=-2$.

说明:本例若不注意到条件 $b\neq c$,那么必将产生增解现象.

6、7 两例体现了利用一元二次方程根的定义解题具有意想不到的效果,其特点是:思路简单,方法明了,直观简捷.

例 8 (2000 年河北省初中数学竞赛试题)已知 $x^2-5x-2000=0$,求 $\frac{(x-2)^3-(x-1)^2+1}{x-2}$ 的值.

分析:本题如果直接求出方程的根再代入求值,显然计算量过大.如果考虑到将 $x^2-5x=2000$ 整体代入,问题便获得巧解.

解 ∵ $x^2-5x-2000=0$,∴ $x^2-5x=2000$.

$$\therefore \frac{(x-2)^3-(x-1)^2+1}{x-2}=(x-2)^2-\frac{(x-1)^2-1}{x-2}$$
$$=x^2-4x+4-x$$
$$=(x^2-5x)+4$$
$$=2004.$$

说明:以上利用一元二次方程中的常数项来代入求值是一种常用的技巧,通常称为"常数代入法".

例 9 (1996 年南通市初中数学竞赛试题)已知 m 是方程 $x^2+x-1=0$ 的一个根,求 m^3+2m^2+1997 的值.

分析:如果先求根后代入求值,则"臃肿笨拙";如果能注意到降次代入或常数代入,利用方程的整体性,则可化难为易,简捷独特.

解法一 降次代入法.

∵ $m^2+m-1=0$,∴ $m^2=1-m$.

$$\therefore m^3+2m^2+1997=m(1-m)+2(1-m)+1997$$
$$=-m^2-m+1999$$
$$=1998.$$

解法二 常数代入法.

∵ $m^2+m-1=0$,∴ $m^2+m=1$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad m^3+2m^2+1997&=m(m^2+m)+m^2+1997\\&=m+m^2+1997\\&=1998.\end{aligned}$$

说明:通过方程变形实施整体代入,可起到降次作用而简化计算.

8、9 两例给出了在约束条件(已知一个一元二次方程或可化为一元二次方程)下,求代数式值的问题,解题时一般不用“求根代入法”,常需转换思维角度,运用“常数代入法”、“降次代入法”等若干技巧,可使问题化难为易,快速获解.

例 10 (1988 年全国初中数学联赛试题)已知首项系数不相等的两个二次方程 $(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$ 及 $(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$($a,b$ 都是正整数)有一个公共根,求 $\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

分析:最容易想到的方法是先求出两个方程的解,再比较哪个解是公共根,进而确定求出 a,b 的方案.

解法一 由题意知 $a>1,b>1,a\neq b$. 利用因式分解法求出上述两个方程的根分别为

$$a,\frac{a+2}{a-1};b,\frac{b+2}{b-1}.$$

因为题中两个方程有一个公共根,所以必有

$$a=\frac{b+2}{b-1}\text{或}\frac{a+2}{a-1}=b.$$

上述两式均可化简为

$ab-a-b-2=0$,即 $(a-1)(b-1)=3$.

由 a,b 都是大于 1 的正整数,得

$$\begin{cases}a-1=1,\\b-1=3;\end{cases}\text{或}\begin{cases}a-1=3,\\b-1=1.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=2,\\b=4;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\b=2.\end{cases}$

故 $\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^bb^a=4^2\cdot2^4=256.$

解法二 由题意知 $a>1,b>1,a\neq b$.

设已知两个方程的公共根为 x_0,则有

$$\begin{cases}(a-1)x_0^2-(a^2+2)x_0+(a^2+2a)=0, \\ (b-1)x_0^2-(b^2+2)x_0+(b^2+2b)=0.\end{cases}$$

消去上述两式中的 x_0^2，得

$(x_0-1)(a-b)(ab-a-b-2)=0$.

$\because\ a\neq b$，$\therefore\ x_0=1$ 或 $ab-a-b-2=0$.

当 $x_0=1$ 时，代入上述第一个方程，得 $a=1$，矛盾，故 $x_0\neq 1$.

当 $ab-a-b-2=0$ 时，即 $ab=a+b+2$.

若 $a>b>1$，则 $b=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{a}<3$，得

$b=2, a=4$；

若 $b>a>1$，同理得 $a=2, b=4$.

（以下同解法一，略）

说明：本例给出了探求方程有公共根问题的常见两种思考途径：一是求根后对比确定出公共根；二是设公共根代入方程后再对比.

赛前优化训练

11 解方程 $x^2-(3+2\sqrt{3})x+5+3\sqrt{3}=0$.

12 解方程 $10a^2x^2+13abx-3b^2=0(a\neq 0)$.

13 解方程 $x^2+2a|-x|-3a^2=0$.

14 （1983 年天津市初中数学竞赛试题）已知方程 $x^2-2|x|+2=m$ 的实数根恰有 3 个，则实数 m 的值等于（　　）.

(A) 1　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) $\dfrac{5}{2}$

15 （1989 年上海市初中数学竞赛试题）解方程 $|x^2+4x-5|=2x+3$.

16 （1983 年天津市初中数学竞赛试题）当 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=0$ 时，求 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ 的值.

17 （2001 年 T1 杯全国初中数学竞赛试题）若 $x^2+xy+y=14$，$y^2+xy+x=28$，求 $x+y$ 的值.

18 （1992 年四川省初中数学竞赛试题）若方程 $(1992x)^2-$

$1991 \cdot 1993x - 1 = 0$ 的较大根为 m，另一个方程 $x^2 + 1991x - 1992 = 0$ 的较小根为 n，求 $m - n$ 的值.

19 已知 $x + \frac{1}{x} = 3$，求 $x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x - 17$ 的值.

20 （1989 年广州、武汉、重庆、洛阳、福州初中数学联赛试题）已知 $x = \frac{3}{\sqrt{5} - 2}$，求 $x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 36x + 38$ 的值.

21 已知 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 的一根为 a，求 $a + \frac{2}{a}$ 的值.

22 已知 a 是方程 $x^2 - 2003x + 1 = 0$ 的一个根，求 $a^2 - 2002a + \frac{2003}{a^2 + 1}$ 的值.

23 关于 x 的方程 $3x^2 + 2ax - a^2 = 0$ 的一个根是 -1，求它的另一根.

24 已知 c 是实数，$x^2 - 3x + c = 0$ 的一个解的相反数是方程 $x^2 + 3x - c = 0$ 的一个解，试求方程 $x^2 - 3x + c = 0$ 的解.

25 已知二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根和为 s_1，两根平方和为 s_2，两根立方和为 s_3，试求 $as_3 + bs_2 + cs_1$ 的值.

26 已知方程 $(x - 19)(x - 97) = p$ 有实根 r_1 和 r_2，试求方程 $(x - r_1)(x - r_2) = -p$ 的最小实根.

27 （1985 年广州、武汉、重庆、洛阳、福州初中数学联赛试题）已知方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 与方程 $x^2 - x - b = 0$ 只有一个公共实根，求 b 的值.

28 已知两个二次方程 $x^2 + ax + b = 0$，$x^2 + cx + d = 0$ 有一个公共根 1，求证：二次方程 $x^2 + \frac{a + c}{2}x + \frac{b + d}{2} = 0$ 也有一个根为 1.

29 给出如下三个方程：

$$x^2 - mx + m^2 - 19 = 0, \quad ①$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad ②$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0. \quad ③$$

若方程①与②有公共根，①与③无公共根，求 m 的值.

30 试求满足方程 $x^2 - kx - 7 = 0$ 与 $x^2 - 6x - (k + 1) = 0$ 有公共

根的所有 k 值并求出其所有公共根、所有相异根.

31 （2002 年全国初中数学竞赛试题）满足 $(n^2-n-1)^{n-2}=1$ 的整数 n 有多少个？

32 已知 $a=\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1998}-\frac{1}{\sqrt[n]{1998}}\right)$，求 $(a-\sqrt{a^2+1})^n$.

33 当 $n=1,2,\cdots,2002$ 时，关于 x 的一元二次方程 $n(n+1)x^2-(2n+1)x+1=0$ 的两根为 a_n,b_n，试求 $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_{2002}-b_{2002}|$ 的值.

参考答案

11 解法一　用公式法，$x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=2+\sqrt{3}$.

解法二　用因式分解法，$[x-(1+\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]=0$，$x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=2+\sqrt{3}$.

12 解法一　原方程可化为关于 ax 的一元二次方程

$10(ax)^2+13b\cdot ax-3b^2=0$，即　$(2ax+3b)(5ax-b)=0$.

$\therefore\quad x_1=-\frac{3b}{2a}$，$x_2=\frac{b}{5a}$.

解法二　原方程可化为关于 b 的一元二次方程

$3b^2-13ax\cdot b-10(ax)^2=0$，即　$(3b+2ax)(b-5ax)=0$.

$\therefore\quad x_1=-\frac{3b}{2a}$，$x_2=\frac{b}{5a}$.

13 原方程可化为 $(|x|)^2+2a|x|-3a^2=0$，即　$(|x|-a)(|x|+3a)=0$，

$\therefore\quad |x|=a$ 或 $|x|=-3a$.

(1) 当 $a>0$ 时，$x=\pm a$；(2) 当 $a<0$ 时，$x=\pm 3a$；(3) 当 $a=0$ 时，$x=0$.

14 用代入法检验，易知选 C.

因为此时 $x^2-2|x|=0$，解得 $|x|=0$ 或 $|x|=2$，$\therefore\quad x_1=0$，$x_2=2$，$x_3=-2$.

15 (1) 当 $x^2+4x-5\geqslant 0$ 时，原方程可化为 $x^2+2x-8=0$.

解得　$x_1=2$，$x_2=-4$.

代入 $x^2+4x-5\geqslant 0$，只有 $x=2$ 适合.

(2) 当 $x^2+4x-5<0$ 时，原方程可化为 $x^2+6x-2=0$.

解得　$x_1=-3+\sqrt{11}$，$x_2=-3-\sqrt{11}$.

代入 $x^2+4x-5<0$，只有 $x=-3+\sqrt{11}$ 适合.

故原方程的解为 $x=2$ 或 $x=-3+\sqrt{11}$.

16. 解法一　去分母，得　$a^2+ab-b^2=0$.

即　$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-1=0$.

解得　$\frac{a}{b}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

当 $\frac{a}{b}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\sqrt{5}$；当 $\frac{a}{b}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 时，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-\sqrt{5}$.

解法二　由已知，得　$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$.

两边平方，得　$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=3$，即　$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=5$.

∴　$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\pm\sqrt{5}$.

17. 将已知两等式相加，得 $(x+y)^2+(x+y)-42=0$，

即　$(x+y-6)(x+y+7)=0$，

∴　$x+y=6$ 或 $x+y=-7$.

18. 第一个方程可化为 $(1992x)^2-(1992^2-1)x-1=0$，

即　$(1992^2x+1)(x-1)=0$，

∴　$x_1=-\frac{1}{1992^2}$，$x_2=1$.

从而 $m=1$.

第二个方程可化为 $(x+1992)(x-1)=0$，

∴　$x_1=-1992$，$x_2=1$.

从而 $n=-1992$.

故 $m-n=1993$.

19. ∵　$x+\frac{1}{x}=3$，∴　$x^2=3x-1$.

∴　原式 $=x^2(x^2+3x-16)+3x-17=-18$.

20. ∵　$x=\frac{3}{\sqrt{5}-2}$，

∴　$x=3\sqrt{5}+6$，即　$x-6=3\sqrt{5}$，亦即　$x^2-12x-9=0$.

∴　原式 $=x^2(x^2-12x-9)-3(x^2-12x-9)+11=11$.

21. 由题意，得 $a^2-5a-2=0$，即　$a-\frac{2}{a}=5$.

∴　$\left(a+\frac{2}{a}\right)^2=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2+8=33$.

故　$a+\frac{2}{a}=\pm\sqrt{33}$.

22. 由题意，得 $a^2-2003a+1=0$，
变形可得
$a^2+1=2003a$，$a^2-2002a=a-1$，$a+\frac{1}{a}=2003$.
故所求式可化为 $(a-1)+\frac{1}{a}=\left(a+\frac{1}{a}\right)-1=2002$.

23. 将 $x=-1$ 代入原方程并整理，得
$a^2+2a-3=0$.
解得 $a_1=-3$，$a_2=1$.
当 $a=-3$ 时，原方程为 $x^2-2x-3=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$；
当 $a=1$ 时，原方程为 $3x^2+2x-1=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{3}$.
∴ 方程的另一根是 3 或 $\frac{1}{3}$.

24. 设 x_0 是方程 $x^2-3x+c=0$ 的一个解，则
$$x_0{}^2-3x_0+c=0, \quad ①$$
又 $(-x_0)^2+3\cdot(-x_0)-c=0$. ②
①－②，得 $c=0$.
于是方程 $x^2-3x+c=0$ 变为 $x^2-3x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=3$.

25. 设方程的两根为 x_1，x_2，则
$$ax_1{}^2+bx_1+c=0,$$
$$ax_2{}^2+bx_2+c=0.$$
于是
$$\begin{aligned} as_3+bs_2+cs_1 &= a(x_1{}^3+x_2{}^3)+b(x_1{}^2+x_2{}^2)+c(x_1+x_2) \\ &= (ax_1{}^3+bx_1{}^2+cx_1)+(ax_2{}^3+bx_2{}^2+cx_2) \\ &= x_1(ax_1{}^2+bx_1+c)+x_2(ax_2{}^2+bx_2+c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

26. ∵ r_1，r_2 是方程 $(x-19)(x-97)=p$ 的两个实根，
∴ $(x-r_1)(x-r_2)=0$，
即 $(x-r_1)(x-r_2)+p=(x-19)(x-97)$.
易见 19，97 是方程 $(x-r_1)(x-r_2)+p=0$ 的两个实根，
故其最小实根为 19.

27. 设已知两个方程的公共根为 x_0，则
$x_0{}^2+bx_0+1=0$，$x_0{}^2-x_0-b=0$.
两式相减，得 $(b+1)(x_0+1)=0$.
当 $b+1\neq0$，即 $b\neq-1$ 时，两方程只有一个公共根 $x_0=-1$.

将 $x_0=-1$ 代入任一方程，均可得 $b=2$.

28. 由题意，得

$$1^2+a\cdot 1+b=0, \quad ①$$

$$1^2+c\cdot 1+d=0. \quad ②$$

①+②，得

$$2+(a+c)+(b+d)=0，即 \quad 1+\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}=0. \quad ③$$

由③得，显见 1 也是方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 的一个根.

29. 由方程②，可解得两根为 2 或 3；由方程③，可解得两根为 2 或 -4.
由题意，可知 $x=3$ 是方程①的根，代入方程①并整理，得

$$m^2-3m-10=0.$$

解得 $m_1=5, m_2=-2$.
但当 $m=5$ 时，方程①与③有公共根 2，应舍去.
故 $m=-2$.

30. 设已知两个方程的公共根为 x_0，则

$$x_0{}^2-kx_0-7=0,$$

$$x_0{}^2-6x_0-(k+1)=0.$$

两式相减，得 $(6-k)x_0=6-k$.

当 $k\neq 6$ 时，$x_0=1$ 为公共根. 此时，将 $x_0=1$ 代入任一个方程可得 $k=-6$. 再将 $k=-6$ 分别代入两个已知方程，得

$$x^2+6x-7=0,$$

$$x^2-6x+5=0.$$

因此，它们的公共根为 $x=1$，相异根为 -7 和 5.

当 $k=6$ 时，两已知方程变为同一方程 $x^2-6x-7=0$. 此时有公共根 7 和 -1，而无相异根.

31. 分以下三种情况讨论：
当 $n+2=0, n^2-n-1\neq 0$ 时，解得 $n=-2$；
当 $n^2-n-1=1$ 时，解得 $n=-1, n=2$；
当 $n^2-n-1=-1$ 且 $n+2$ 是偶数时，解得 $n=0$.
故 $n=-1,-2,0,2$，共 4 个.

32. 设 $\sqrt[n]{1998}=x$，则 $a=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，即 $x^2-2ax-1=0$，

解得 $x=a+\sqrt{a^2+1}$（负值已舍）.

又 $a-\sqrt{a^2+1}=-\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}=-\frac{1}{x}$，