XINBIANGAOZHONGSHUXUEDAGUAN

新编
高中数学大观

袁桐　金立建　主编

南京大学出版社

内 容 提 要

本书通过典型例题的解答和评注，介绍了高中数学的主要内容和方法（并配有适量的练习和习题）。此外，通过一定数量的高中数学竞赛问题的解说分析，循序渐进地介绍了高中数学竞赛的概貌。可供高中教师，高师学生参考，也可供高中学生伴读、自学、复习、竞赛使用，全书选材精当，深入浅出，实用性强。

书中习题统一编序，并附解答或提示。

参加编写工作的还有：孙宝琪、谈大经、贺杰、史平平、谢荣海、孙一民、魏启钧、尤善培、许均、程坚等同志，竞赛内容还经苏州大学秦淦先生审阅。

与本书同时出版的还有《新编初中数学大观》及《新编小学数学大观》。

新编高中数学大观

袁桐 金立建 主编

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行 江苏省丹徒县印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张15.5 字数370千

1991年2月第1版 1992年2月第2次印刷

印数：24301—45300

ISBN 7-305-00979-2

O·55 定价：5.90元

目　录

第一章　初等函数一般性质的研究

函数是中学数学的重点内容之一，它不仅有广泛的用途，而且是学习高等数学的基础．高中数学是在介绍集合概念的基础上，用集合语言定义了函数，又以幂函数、指数函数和对数函数为例，研究函数的一般性质（包括函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、函数的图像和反函数等）。

一、集合与映射

〔例1〕　已知集合$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x|x^2-mx+2=0\}$，且$A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求a,m。

〔解〕　由$A\cup B=A$，即$B\subseteq A$．现在$A=\{1,2\}$，故B的可能性有四种：ϕ；$\{1\}$；$\{2\}$；$\{1,2\}$．而方程$x^2-ax+(a-1)=0$的根为1和$a-1$，所以B的可能性只有$a-1=2$或$a-1=1$，即$a=3$或$a=2$。

由$A\cap C=C$，即$C\subseteq A$，易知$m=3$时$A=C$。另一种情况是$C=\phi$，即$m^2-8<0$　$\therefore$　$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$。

〔评注〕（1）如果忽视集合中元素的互异性，将会漏解$a=2$。

（2）空集ϕ是任何一个非空集合的真子集，忽略这一点，将漏解$m^2<8$。

[例2] 已知$A=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，$A=B$，求x, y。

[解] 显然，要使$\lg(xy)$有意义，必须$xy>0$，∴ $x\neq 0$，$y\neq 0$，即A中的元素x，xy都不可能与B中的元素O对应，于是只能有$\lg(xy)=0$。

∴ $xy=1$……①。

∴ $A=\{x, 1, 0\}$，考虑元素1，有$y=1$或$|x|=1$。

若$y=1$，由①$x=1$，这时A中有两个元素为1，这与集合中元素的互异性矛盾，∴ $y\neq 1$，同理$x\neq 1$。

于是由$|x|=1$，只能得到$x=-1$，由①：$y=-1$，这时$A=B=\{-1, 1, 0\}$。

[评注] 利用集合中元素的无重复性，判断两集合中元素的对应关系，是解本题的关键。

[例3] 已知$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，$B=\{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$，其中$a_i\in Z$ ($i=1,2,3,4,5$)。设$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，且$A\cap B=\{a_1, a_4\}$，$a_1+a_4=10$，又$A\cup B$元素之和为224。求：(1) a_1，a_4；(2) $a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2$；(3) a_5；(4) A。

[解] (1) ∵ $A\cap B=\{a_1, a_4\}$，且$a_1+a_4=10$，∵ $a_1, a_4\in B$，∴ a_1, a_4是两个完全平方数且其和为10，故这两个数为1，9。∵ $a_1<a_4$，∴ $a_1=1$，$a_4=9$；

(2) ∵ $A\cup B$元素和为224，

即 $a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224$，

而$a_1^2+a_4^2=82$，$\therefore$ $a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2=142$；

(3) $\because$ $a_4<a_5$，$\therefore$ $a_5>9$，设 $a_5=11$，则有 $a_2+a_3+a_2^2+a_3^2=10$，这是不可能的，$\therefore$ $a_5=10$；

(4) $A=\{1,3,4,9,10\}$。

[评注] 利用并集的概念和集合中元素的互异性，推断 $a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224$，是关键的一着。

[练习]

1. 已知集合$P=\{x|x=2n,n\in Z\}$，$Q=\{x|x=2n+1,n\in Z\}$，$M=\{x|x=4n+1,n\in Z\}$。又$a\in P$，$b\in Q$，则$a+b\in$________。

2. 集合$A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$中只有一个元素，求a的值。

3. 若$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|ax-4=0\}$，且$B\subseteq A$。求a的值。

4. 已知$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2+3x+a=0\}$，且$A\cup B=A$。求a的取值范围。

5. 已知集合$A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,aq,aq^2\}$今有$A=B$，求a、d、q的关系。

6. $a\in R$，$A=\{2,3,a^2-a+3\}$，$B=\{-4,a+3,3a-2,a^2-2a+2\}$，若$A\cap B=\{2,5\}$，求$a$。

7. 点(x,y)在映射f下的像是点$(x+y,x-y)$，则点$(1,2)$在f下的原像是________。

8. 设$f(x)=x^2+px+q(p,q\in R)$，$A=\{x|x=f(x),x\in R\}$，$B=\{x|x=f[f(x)],x\in R\}$，

(1) 证明：$A\subseteq B$；　(2) 在$A=\{-1,3\}$时，求B。

9. 设$f: x \to y = \arccos(\sqrt{2}\sin x)$是从集合 A 到 B的映射，求集合A, B。

二、函数的定义域

[例4] 判断下列各组函数是不是同一函数：

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\arcsin(\sin x)$；

(4) $f(x)=\sin(\arcsin x)$，$g(x)=\arcsin(\sin x)$；

(5) $f(x)=\pi-\arcsin x(0\leqslant x\leqslant 1)$，$g(x)=\frac{\pi}{2}+\arcsin x(0\leqslant x\leqslant 1)$；

(6) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in(-1,0) \\ x-1 & x\in(0,1), \end{cases}$ $g(x)=f^{-1}(x)$。

[答] 只有(6)是同一函数。

[评注] 函数的确定有三个要素：定义域、值域和对应法则。(1)定义域不同；(2)、(3)值域不同；(4)定义域、值域都不同；(5)虽定义域、值域都相同，但对应法则不同，因而都不表示同一函数。

[例5] 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{|x+2|+|x-1|}$；

(2) $y=\sqrt{\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+3^{1-x}-10}$

(3) $y=\ln(a^x-k\cdot 2^x)$ $(a>0$且$a\neq 1$，$k\in R)$。

[解] (1) $\because$ $|x+2|=0$与$|x-1|=0$不能同时成立，故$|x+2|+|x-1|\neq 0$，$\therefore$ 定义域为$x\in R$；

(2) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+3^{1-x}-10\geqslant 0$，即$(3^{-x}-5)(3^{-x}+2)\geqslant 0$。

$\because$ $3^{-x}+2>0$，$\therefore$ $3^{-x}-5\geqslant 0$，即 $x\leqslant -\log_3 5$。

$\therefore$ 定义域为$(-\infty, -\log_3 5]$;

(3) $a^x - k\cdot 2^x > 0$, $\therefore$ $\left(\frac{a}{2}\right)^x > k$。

①当 $k \leqslant 0$ 时，$x \in R$;

②当 $k > 0$ 时，(i)若 $a > 2$，则 $x > \log_{\frac{a}{2}} k$; (ii)若$0 < a < 2$且 $a \neq 1$，则 $x < \log_{\frac{a}{2}} k$; (iii)若 $a = 2$，则当 $0 < k < 1$ 时，$x \in R$; $k \geqslant 1$ 时，定义域为ϕ。

> [例6] 已知函数$f(x)$的定义域为$[a,b]$，且$b > -a > 0$。求：(1)$F(x) = f(x) - f(-x)$; (2)$g(x) = f(x+c) + f(x-c)$ $(c > 0)$的定义域。

[解] (1) $\because$ $f(x)$的定义域为$[a,b]$，$\therefore$ $f(-x)$的定义域为：$-b \leqslant x \leqslant -a$。

解不等式组 $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ -b \leqslant x \leqslant -a, \end{cases}$

注意到$b > -a > 0$，得$F(x)$的定义域为：$[a, -a]$。

(2) 解不等式组

$$\begin{cases} a \leqslant x + c \leqslant b \\ a \leqslant x - c \leqslant b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c \leqslant x \leqslant b - c \\ a + c \leqslant x \leqslant b + c. \end{cases}$$

$\therefore$ 当$a + c \leqslant b - c$，即当$0 < c \leqslant \frac{1}{2}(b-a)$时，$g(x)$的定义域为：$[a+c, b-c]$;

当 $c > \frac{1}{2}(b-a)$ 时，$x \in \phi$。

[评注] (1)求函数的定义域，首先要弄清自变量是什么。如本例中出现的函数$y = f(x)$的自变量就有x、$-x$、$x+c$和$x-c$。

(2) 求复合函数的定义域，实际上就是求使函数解析式的各个部分都有意义的自变量的取值集合的交集。从解法来说，通常是求不等式组的解集。对含参数的不等式，要对参

数的取值情况进行分类讨论。

[练习]

10．判断下列各组函数是不是同一函数？并说明理由。

(1) $f(x)=x^0$，$g(x)=\frac{x}{x}$； (2) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln|x|$； (3) $f(x)=x^2+1$ $(x\in N)$，$g(x)=x^2-4b+5$ $(b\neq 1,\ x\in N)$； (4) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$。

11．已知函数$f(x)$的定义域是$[2,10]$，求函数 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$的定义域，其中$a>0$。

12．已知$f(\frac{1}{x^2})$的定义域是$[1,4]$，求$f(x)$的定义域。

13．设函数$f(x)=\left(x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$m\in R$。求证：$f(x)$的定义域是实数$R$的充要条件是$m>1$。

三、函数的值域

[例7] 求下列函数的值域：

(1) $y=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$； (2) $y=\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$；

(3) $y=x^2$，$x\in(-3,1)$； (4) $y=\frac{a+bx}{a-bx}$ $(a>b>0, x\in[-1,1])$； (5) $y=x^2(1-3x)$，$x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$。

分析：(1) 若函数的解析式是一个有理公式，且分子分母同次，可考虑通过多项式除法，分离出一个常数来，使问题简化，这种方法称为**分离常数法**，它常与其他方法结合使用。这里我们将原函数式化为

$$y=1-\frac{1}{x^2+x+1}.$$

[解法1](配方法)

$$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4},$$

$\therefore$ 当 $x=-\frac{1}{2}$时，$y=-\frac{1}{3}$.

又 $\because$ $\frac{1}{x^2+x+1}>0$，$\therefore$ $y<1$.

所以函数值域为 $[-\frac{1}{3},1)$.

[解法2](判别式法)

令 $t=\frac{1}{x^2+x+1}$，$\therefore$ $tx^2+tx+(t-1)=0$ ……①，

$\because$ $x\in R$，$\therefore$ $\Delta=t^2-4t(t-1)\geqslant 0$，

即 $t(3t-4)\leqslant 0$，$\therefore$ $0\leqslant t\leqslant\frac{4}{3}$，

显然 $t=0$ 不符合①式，

$\therefore$ $0<t\leqslant\frac{4}{3}$，于是$-\frac{4}{3}\leqslant -t<0$，$\therefore$ $-\frac{1}{3}\leqslant 1-t<1$

就是 $-\frac{1}{3}\leqslant y<1$.

注：有理分式函数求值域的问题，如果分母是恒为正或恒为负的二次三项式，都可以用判别式法。这是因为它等价于讨论一个二次方程在实数集中有解的条件。否则，将要讨论在实数集的某个子集中有解的问题，光靠判别式就不够了。如：在$x\in(0,1]$时，求函数 $y=\frac{x^2+16}{x}$的值域。就是研究关于 x 的二次方程$x^2-xy+16=0$在$(0,1]$中有解的问题。结果是 $y\geqslant 17$.

(2) [解] 由原函数式 得

$$y=\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}=\frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$$

当$x\neq -3$时，有 $y=\frac{x+1}{x-2}=1+\frac{3}{x-2}$，

此函数值域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

把$x=-3$代入$y=\dfrac{x+1}{x-2}$， 得$y=\dfrac{2}{5}$。

$\therefore$ 原函数的值域为$(-\infty,\frac{2}{5})\cup(\frac{2}{5},1)\cup(1,+\infty)$。

(3)［解］ 当$x=0$时 $y=0$，$\because$ $0\in(-3,1)$， $\therefore$ $y=0$是函数$y=x^2$在区间$(-3,1)$上的最小值，比较区间端点处的函数值：$x=-3$时$y=9$；$x=1$时$y=1$，由函数的单调性可知，函数的值域为$[0,9)$。

(4)［解法1］(逆求法)

$\because$ $y=\dfrac{a+bx}{a-bx}$， $\therefore$ $x=\dfrac{a(y-1)}{b(y+1)}$。

$\because$ $x\in[-1,1]$， $\therefore$ $-1\leqslant\dfrac{a(y-1)}{b(y+1)}\leqslant1$。

由已知条件显然有$y>0$，

所以
$$\frac{a-b}{a+b}\leqslant y\leqslant\frac{a+b}{a-b}.$$

［解法2］(分离常数法)

$$y=\frac{a+bx}{a-bx}=-1+\frac{2a}{a-bx}$$

$\because$ $|x|\leqslant1$，$a>b>0$， $\therefore$ $a-bx>0$，

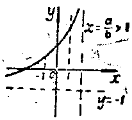
$$\therefore\ \frac{2a}{a+b}\leqslant\frac{2a}{a-bx}\leqslant\frac{2a}{a-b},$$

$$\therefore\ \frac{a-b}{a+b}\leqslant y\leqslant\frac{a+b}{a-b}.$$

［解法3］(图像法)

$\because$ $y=-1+\dfrac{2a}{a-bx}$，

$y+1=\dfrac{2a}{a-bx}$，其图像如右，



令$x=-1$，得$y=\dfrac{a-b}{a+b}$；

令$x=1$，得 $y=\frac{a+b}{a-b}$.

$$\therefore \quad y\in\left[\frac{a-b}{a+b},\ \frac{a+b}{a-b}\right].$$

(5) [解](求函数最值法)

$\because\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，$\therefore\quad y\geqslant 0$.

又 $$y=x^2(1-3x)=\frac{4}{9}\left[\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot(1-3x)\right]$$
$$\leqslant\frac{4}{9}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+(1-3x)\right]\right\}^3=\frac{4}{243}$$

$\therefore$ 函数的值域为 $\left[0,\frac{4}{243}\right]$.

[评注] 常用的求函数值域的方法有直接法(利用非负值概念、配方法等)、逆求法(通过求函数的反函数的定义域确定原函数的值域)、"Δ"法、图像法以及求函数最值等。

[练习]

求下列函数的值域：

14. (1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x+\frac{1}{4}}$； (2) $y=\lg(3-2x-x^2)$；

(3) $y=2^{\frac{1}{x}}$； (4) $y=\frac{2x}{5x+1}$；

(5) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}$； (6) $y=\frac{5x^2+1}{x^2+3}$.

15. (1) $y=\frac{2}{x-1}+2x-1$；

(2) $y=2\sqrt{1-x}+\sqrt{4x+3}$.

16. (1) $y=\frac{1}{1-x^2}$； (2) $f(x)=5-|x|$，$g(x)=|x|-5$，求$f[g(x)]$的值域。

四、函数的解析式表示

[例7] (1) 已知$f(x+1)=x^2-3x+2$，求$f(x)$，$f(x-1)$； (2) 已知$f(1-\cos x)=\sin^2 x$，求$f(x)$.

[**解**](1)(换元法)

令$x+1=t$,　　则$x=t-1$,代入已知函数,得

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6,$$

就是　　$$f(x)=x^2-5x+6.$$

用$x-1$替换$f(x)$中的x,

得　$$f(x-1)=(x-1)^2-5(x-1)+6=x^2-7x+12.$$

(2)(换元法)

令$1-\cos x=t$,则$\cos x=1-t$,

$\therefore$　$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-(1-t)^2=2t-t^2$.

$\because$　$0\leqslant 1-\cos x\leqslant 2$,$\therefore$　$f(x)=2x-x^2(0\leqslant x\leqslant 2)$.

[例9]　已知二次函数$y=f(x)$的最大值为14,且当$x=2$和$x=-1$时,都有$y=5$,求此二次函数。

[**解法1**]　设$f(x)=ax^2+bx+c$。由题设,有

$$\begin{cases}5=4a+2b+c\\5=a-b+c\\\dfrac{4ac-b^2}{4a}=14,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-4\\b=4\\c=13.\end{cases}$$

$\therefore$　所求的二次函数为$y=-4x^2+4x+13$.

[解法2]　$\because$　$f(2)=f(-1)=5$,$\therefore$ 抛物线的对称轴方程为$x=\frac{1}{2}[2+(-1)]=\frac{1}{2}$。故可设所求的二次函数解析式为

$$y=a(x-\frac{1}{2})^2+14.$$

将$x=2$,$y=5$代入,　　得　$a=-4$.

$\therefore$　$y=-4(x-\frac{1}{2})^2+14$.

[解法3]　由已知,$f(x)-5=0$的根为$x_1=2,x_2=-1$,故可设$f(x)-5=a(x-2)(x+1)$,即$f(x)=ax^2-ax-2a+5$

再由$\frac{4a(-2a+5)-a^2}{4a}=14$,解得$a=0$或$a=-4$。(余略)

[评注]　在确定二次函数解析式时,应充分利用已知条

件，恰当地选取函数解析式的形式，力求迅速、准确地解决问题。

［例9］ 已知对一切实数x、y，关系式 $f(x-y)=f(x)-(2x-y+1)y$都成立，且$f(0)=1$，求$f(x)$的解析式。

［解］ 令$x=0$，得$f(-y)=f(0)-(1-y)y=1-y+y^2$；再令 $x=-y$， 于是有 $f(x)=x^2+x+1$。

［评注］ 问题的一般性结论为真，它在特殊状态时的结论也为真。令变量取某个特殊值，使问题具体化，或估计出结果，是常用的数学方法，我们称之为特殊化法。

［练习］

17．已知$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x\leqslant -1) \\ x^2 & (-1<x<2) \\ 2x & (x\geqslant 2) \end{cases}$，若$f(x)=3$，求$x$。

18．已知$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>0) \\ \pi & (x=0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$，求$f(-2)$，$f\{f[f(-1)]\}$。

19．设$f(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant 0 \\ x & x>0 \end{cases}$，$\psi(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant 0 \\ -x^2 & x>0 \end{cases}$，求$f[f(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$f[\psi(x)]$，$\psi[f(x)]$。

20．已知$f(x)$是x的二次函数，且$f(2x)+f(3x+1)=13x^2+6x-1$，求$f(x)$。

21．设 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$， $g(x+\dfrac{1}{x})=x^3+\dfrac{1}{x^3}$，求$f[g(x)]$。

22．设$f(x)$是定义在R^+上的一个函数，(1) 若x_1、$x_2\in R^+$时均有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，求$f(1)$；(2) 若$f(x)=f(\dfrac{1}{x})\lg x+1$，求$f(x)$。

23．设函数$y=f(x)$对于任意实数x均有$f(2+x)=$

$f(2-x)$，且$f(x)=0$有四个根，求四根之和。

五、函数的图像

［例11］ 给定实数a，($a\neq 0$，且$a\neq 1$)设函数$y=\dfrac{x-1}{ax-1}$($x\in R$，且$x\neq\dfrac{1}{a}$)，证明这个函数的图像关于直线$y=x$成轴对称图形。

［证法1］ 设点$P(x',y')$是这个函数的图像上的任意一点，则 $x'\neq\dfrac{1}{a}$，且 $y'=\dfrac{x'-1}{ax'-1}$……①，

易知点P关于直线$y=x$的对称点P'的坐标为(y',x')。

由① 得 $y'(ax'-1)=x'-1$，

即 $x'(ay'-1)=y'-1$……②

下面用反证法证明$ay'-1\neq 0$：

设 $ay'-1=0$，则$y'=1/a$，

代入① 得 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{x'-1}{ax'-1}$，即 $ax'-a=ax'-1$，

$\therefore$ $a=1$，与已知矛盾，$\therefore$ $a'y-1\neq 0$。

于是由②式 得 $x'=\dfrac{y'-1}{ay'-1}$。这说明$P'(y',x')$在已知函数图像上，因此，这个函数的图像关于直线$y=x$成轴对称图形。

［证法2］ 先求出所给函数的反函数：(过程略)

$y=\dfrac{x-1}{ax-1}$ ($x\in R$，且$x\neq\dfrac{1}{a}$)。由于反函数与原函数表达式相同，再由反函数图像与原函数图像关于$y=x$对称的关系而得证。

［例12］ 已知函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的图像如图1.1，试画出：(1) $y=|f(x)|$；(2) $y=f(|x|)$；(3) $y=f(x+a)$；(4) $y=\dfrac{1}{2}f(x)$；(5) $y=\dfrac{|f(x)|+f(x)}{2}$的图像。