

新中學文庫

數學全書

第二冊 代數

韋 柏 著
鄭 太 朴 譯

商務印書館發行

數 學 全 書

第二冊 代 數

Von H. Weber 著

鄭 太 朴 譯

目次

第十二章

一次方程 行列式

§ 74.	一元及二元一次方程	1
§ 75.	三元一次方程	7
§ 76.	n 次之行列式 n 元一次方程	12
§ 77.	一次置換與數方 行列式之相乘	22

第十三章

二次三次及四次之方程

§ 78.	實係數之二次方程	33
§ 79.	複係數之二次方程	37
§ 80.	二次函數	39
§ 81.	三次方程之普通解法	41
§ 82.	三解均爲實數之三次方程	48
§ 83.	三次函數	52
§ 84.	一個重要的三次方程	55
§ 85.	四次方程解法	57
§ 86.	四次方程之判定式	60

第十四章

整函數

§ 87.	整函數及其根之定義	63
§ 88.	整函數之相除 引伸函數	65

§ 107.	高斯之割圓方程解法	...	...	...	...	...	182
§ 108.	十三次與十七次的割圓方程	...	...	...	...	...	193

第 十 八 章

不 可 能 之 證 明

§ 109.	可用平方根以求解之方程	...	...	...	...	...	202
§ 110.	三次方程不能用平方根以解之	...	...	...	...	...	206
§ 111.	用添加法以分解不可分解之函數	...	...	...	...	...	209
§ 112.	三實根的三次方程	...	...	...	...	...	212
§ 113.	用根數以表單位根	...	...	...	...	...	214
§ 114.	五次方程之代數的不可解	第一證	...	...	...	...	219
§ 115.	第二證	...	...	...	...	...	225

數 學 全 書

第 二 冊 代 數

第十二章 一次方程 行列式

§ 74. 一元及二元一次方程

1. 前於第三章內,曾以如次之問題,確定除法之意義:
設 a, b 爲已知數,則當求一數 x , 使其適合下列之條件:

$$(1) \quad ax = b$$

吾人並知恆有一數,亦祇有一數 $x = \frac{b}{a}$ 能適合此條件,惟 a 須不爲 0 方可. 若 $a=0$ 而 b 不等於 0, 則無有此項 x 可求, 若 a 與 b 俱爲 0, 則 x 可取任何值,恆能適合此條件.

(1) 名爲一元一次方程, x 之任何值, 凡能適合此方程者, 名爲此方程之根.

尋常之課題書中,多採集有極多的問題,或爲日常生活上所可遇見之事,或則出於某種科學,令學者將其列爲方程以求其解. 此項問題中,每有來源極古,歷數千年而傳至今日者,且各時代之已開化民族,均是貢獻於此.¹ 古

1. 例如古埃及 Ahmes 之算書, 古希臘之算術的歌謠, Muhammed ibn Musa 之代數, Leonardo von Pisa 之 Liber Abaci, Luca Paciolo 及 Cossisten 之算書, 等等. 古時傳下之此項問題, 大多爲鍛鍊智性之用, 故殊有價值, 以云實際生活上之需要, 則相去殊遠. 近時對於習題, 多注重其能使人瞭解於方程之意義者, 俾學者知代數方程於實際生活及科學之要求上, 有何等重大之作用, 其方針頗爲合宜也.

算書中之所謂“三數法”(Regeldetri),其所從事者實亦爲一次方程上之問題。

2. 今試由其他一較廣之觀點出發,以研究1.中之問題。(1)之左端可單獨取之,並用一字母表之如下:

$$(2) \quad y = ax$$

此中之 a 爲一定數,但 x 則視之爲可變動者。今使 x 取若不同之值,則於 x 之每一值, y 亦有一確定之值。如爲之量 y ,其值決定於一其他的量 x 之值者,名爲一函數。¹如(2)中所表出者, y 名爲 x 之一次函數。 x 既變動,則 y 自亦隨之而變。故吾人稱 x 爲自變數, y 爲依變數。爲表明 y 爲 x 之函數計,吾人亦用 $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 等符號。因之,1.中之問題,亦可如次提出之:

自變數 x 取何值時,一次函數 $y = ax$ 取一定之值 $y = b$?

今仍保存字母 y ,則

$$(3) \quad x = \frac{y}{a}$$

1. 例如車票之價目,爲距離之函數,所納的稅之多少爲所得之函數,一地方之平均溫度爲緯度及地高之函數,氣體之壓力爲體積及溫度之函數。

吾人恆可假定,所編之函數係用一確定的算式以表出之者,故 x 取某一值時, y 之值即可計算而得。此項概念,實肇自 Leibniz,但經 Johann Bernoulli 及 Euler 始漸普及。以上所用較廣之定義,源於 Dirichlet 氏,見 Repert. d. Phys. 1 (1837), Ostwalds Klassiker Nr. 116, 但 Euler 亦曾先已用之 (Institut. calc. diff., Petrop. 1755, pag VI), 其中並包有不能用確定的算式以表出之函數,例如有某種函數,於一切有理的 x 取1爲值,於一切無理的 x 則取0爲值。參閱 Pringsheim, Grundlagen d. allg. Funktionenlehre (Enzyklopädie d. math. Wiss. 2, 1)。

爲此問題之解。故亦可云：解一方程之法，與將一已知函數倒轉之法相同，於此，原來之自變數，用依變數以表出之。

3. 倘於 (1) 內兩端各減 b ，則 1. 內之問題復可變其方式，而方程乃成爲如下之式：

$$(4) \quad ax - b = 0$$

此種方式，謂之將方程內之項遷於一端，使他端成爲 0。今以 y 表其左端，

$$(5) \quad y = ax - b$$

並視 x 爲變數，則此式仍爲 x 之函數，且仍爲一次函數。¹ 因之，用 (1) 或 (4) 以表出之問題，亦可如是提出之：

自變數 x 取何值時，一次函數 $y = ax - b$ 之值爲 0？

x 之此項值，名爲函數之零點。廣之，吾人可云：

求解一端爲 0 之方程與求一已知函數之零點之意義相同。

4. 今有二個二元一次方程，則吾人恆可將其寫成爲下式：

$$(6) \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned}$$

於此， a_1, b_1, c_1 及 a_2, b_2, c_2 均爲已知數。吾人可假定， b_1 與 b_2 二數中至少有一非爲 0，否則未知數 y 將不存在矣。今

1. (2) 內之函數，實爲一特例，即 $b=0$ 時之特例是

如 b_1 非爲 0, 則由第一方程, 可得

$$(7) \quad y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1},$$

即 y 爲 x 之一次函數. 將 y 之式代入第二方程內, 即有

$$a_2 x + \frac{b_2}{b_1} (c_1 - a_1 x) = c_2.$$

此爲一元一次方程, 故可云, 吾人已將另一元 y 消去之. 由此, 即不難得

$$x(a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

故如 $a_1 b_2 - a_2 b_1$ 一式非爲 0, 則即有

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

x 之值既得, 即可由 (7) 以得 y 之值.

5 以上之方法, 在用具一方程將一未知數用他未知數以表出之, 然後將所得者代入其他方程內, 以得其解, 故謂之代入法. 於此, 方程內之二未知數, 用法不能全同, 故多有不用此法, 而採取一對稱的方法者, 即方程內之量, 均同等的使用之. 今明其法如下:

先用 $b_2, -b_1$ 乘方程 (6), 再用 $-a_2, a_1$ 乘之, 並每次於除後加之, 則第一次後 y 被消去, 第二次後, x 被消去, 而得

$$(8) \quad \begin{aligned} &v(a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 b_1 \\ &y(a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 c_2 - a_2 c_1. \end{aligned}$$

此處 x 與 y 之因子

$$(9) \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = D,$$

名爲方程系統(6)之行列式,亦可如下寫之:

$$(10) \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

四數目 a_1, b_1, a_2, b_2 之此種結合法,謂之一二次的行列式. 方程(8)之右端,自亦可用行列式表之,故得一定理如下:

方程系統(6)之行列式 D 如非爲0,則有一對數目,亦祇有此一對數目

$$(11) \quad x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

能充適原來之方程

6. 但如 $D=0$, 則可假定 a_1, b_1, a_2, b_2 諸數中無有爲0者. 蓋如 $b_1=0$ 或 $a_2=0$, 則亦必 $a_1 b_2=0$, 即 $a_1=0$ 或 $b_2=0$, 於是(6)中將祇有一方程或祇有一未知數矣. 由 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, 可知

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1},$$

故如以 λ 表此分數之值, 則得

$$a_2 = \lambda a_1, \quad b_2 = \lambda b_1.$$

於是(6)中之二方程, 即爲

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$\lambda(a_1x + b_1y) = c_2,$$

故若此二方程可相容，則必 $c_2 = \lambda c_1$ 而後可，即

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}.$$

但如是則不僅 $D=0$ ，且其他的行列式亦均為 0：

$$(12) \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

因而 (6) 中二方程，相互間並非無關係者，蓋第二方程實由第一方程得之也。於是吾人可使 x 任取一值， y 之值即由之而定。總括之，可得一定理如下：

倘 (6) 之行列式 D 為 0，而 (12) 中之行列式有不等於 0 者，則 (6) 中二方程本身間有矛盾，故無有根可求。倘 (12) 中二行列式同時亦等於 0，則 (6) 之二方程中之一，可得自他方程，故有無限多之解。

7. 關於二次的行列式，可較詳的一論之。

a_1, b_1, a_2, b_2 諸數，名為行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

之元素。此行列式由二行二列所成，每一行或列內有二元素。

倘將 b_1 與 a_2 相易，行列式之值仍不變：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

此即是：行列式內行與列互易時，式之值仍不變。

8. 倘將二列互易之，則有

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

將二行互易時亦然，故：

二行或二列互易時，行列式變其號。

9. 倘行列式內某一系列有公因子，即 $a_1 = m\alpha_1$, $b_1 = m\beta_1$ ，則

$$\begin{vmatrix} m\alpha_1 & m\beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = m(\alpha_1b_2 - \beta_1a_2) = m \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

行內有公因子時亦然，故：

行內或列內之公因子，可將其置於行列式之前。

§ 75. 三元一次方程.

1. 三個三元一次方程之普通形式如下：

$$\begin{aligned} & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (1) \quad & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}$$

其中之 a_i, b_i, c_i, d_i ($i=1, 2, 3$) 爲已知數。

求解此項方程時，可用培素 (Bézout) 之法¹，將二未知數同時消去之。今先用不定的數 u_1, u_2, u_3 依次乘三方程，並將其加之。於是再如是決定 u_1, u_2, u_3 之值，使 y 及 z 之係數為 0，即

$$(2) \quad \begin{aligned} b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 &= 0 \\ c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 &= 0. \end{aligned}$$

按此二方程以決定 u_1, u_2, u_3 後， y 與 z 即被消去，故祇餘一個方程，其中僅有 x 者：

$$(3) \quad (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)x = d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3.$$

今將方程(2)視為 u_2, u_3 二未知數之方程，則按前節之 5., 8., 及 9., 有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} u_2 &= \begin{vmatrix} -b_1 u_1 & b_3 \\ -c_1 u_1 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} u_1 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} u_3 &= \begin{vmatrix} b_2 & -b_1 u_1 \\ c_2 & -c_1 u_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} u_1. \end{aligned}$$

為簡便計，可設

$$(4) \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1, & \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} &= a_2, \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} &= a_3, \end{aligned}$$

則有

$$a_1 u_2 = a_2 u_1, \quad a_1 u_3 = a_3 u_1.$$

1. Bézout, Théorie générale des équations algébriques, 1779.

今如設¹

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \quad u_3 = a_3,$$

則此項方程即能充適，因而(2)亦被充適。於是按(3)，有

$$(5) \quad (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)x = d_1a_1 + d_2a_2 + d_3a_3.$$

仿此，吾人亦可將 x 與 z 消去，祇須用 v_1, v_2, v_3 乘方程(1)，加之，並按

$$(6) \quad \begin{aligned} c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 &= 0 \\ a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0 \end{aligned}$$

以決定 v_1, v_2, v_3 三數。於是得一方程，以 y 為未知數。為簡便計，設

$$(7) \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} &= \beta_1, & \begin{vmatrix} c_3 & c_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} &= \beta_2, \\ \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} &= \beta_3, \end{aligned}$$

則方程(6)可為

$$v_1 = \beta_1, \quad v_2 = \beta_2, \quad v_3 = \beta_3$$

所充適，故得 y 之式如下：

$$(8) \quad (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3)y = d_1\beta_1 + d_2\beta_2 + d_3\beta_3.$$

最後，復用 w_1, w_2, w_3 乘方程(1)，並使

$$(9) \quad \begin{aligned} a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 &= 0 \\ b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3 &= 0, \end{aligned}$$

1. 廣之，吾人亦可用 a_1, a_2, a_3 之任何倍數於 u_1, u_2, u_3 ，所得仍無不同。

以及設

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \gamma_1, \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \gamma_2, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \gamma_3,$$

則方程(9)可爲

$$w_1 = \gamma_1, \quad w_2 = \gamma_2, \quad w_3 = \gamma_3$$

所充適,而得 z 之式爲

$$(11) \quad (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3)z = d_1\gamma_1 + d_2\gamma_2 + d_3\gamma_3.$$

2. (5)內 x 之因子,倘其 a_1, a_2, a_3 仍易以(4)中之值,則得

$$(12) \quad D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

如將(8)與(11)中 y 與 z 之因子算出,可知其值亦爲 D .吾人稱 D 爲方程系統(1)之行列式,寫之作

$$(13) \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

此爲一第三次的行列式,由 $3 \cdot 3 = 9$ 個元素所成. 諸二次的行列式 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1, 2, 3$)名爲 D 之亞行列式.

(5)之右端,所與 x 之因子不同者,則 a_1, a_2, a_3 與 d_1, d_2, d_3 之差別是. (8)與(11)中之右端,與 y 及 z 之因子之差別,亦在 b_1, b_2, b_3 ,以及 c_1, c_2, c_3 與 d_1, d_2, d_3 之不同. 因之, (5), (8)及(11)之右端,亦爲三次的行列式,吾人祇須於 D 中

將其第一行,第二行,第三行以 d_1, d_2, d_3 易之即可. 今將其如次表之:

$$(14) \quad D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

則得一定理如下:

倘方程系統 (1) 之行列式 D 非爲 0, 則有一系統之根, 亦祇有此系統之根:

$$(15) \quad x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}.$$

3. 若 $D=0$, 則祇有 $D_1=0, D_2=0, D_3=0$ 時, 方程 (5), (8) 及 (11) 乃能成立. 於是 x 可隨取其值. 如 D 之諸亞行列式不完全爲 0, 而有非爲 0 者, 如 $a_1=b_2 c_3-b_3 c_2$ 非爲 0, 則 y 與 z 爲以下之方程所決定:

$$b_2 y + c_2 z = d_2 - a_2 x$$

$$b_3 y + c_3 z = d_3 - a_3 x$$

故於 x 之任何一值, y 與 z 有一定的值. 故可知:

倘方程系統 (1) 之行列式 D 爲 0, 而 D_1, D_2, D_3 中有不等於 0 者, 則 (1) 中諸方程有矛盾, 故無有根可求. 倘 $D_1,$

D_2, D_3 與 D 同時爲 0, 但 D 之亞行列式非盡爲 0, 則其中有一未知數可隨意取其值.

如 D 之諸亞行列式亦均爲 0, 則吾人仍可假定, D 之一切元素不盡爲 0, 蓋否則方程系統 (1) 將全不存在矣. 今如 c_3 非爲 0, 則由 (1) 之末一^二方程, 可知

$$(16) \quad z = \frac{d_3 - a_3x - b_3y}{c_3},$$

將其代入 (1) 中第一二二方程後, 得

$$(17) \quad \begin{aligned} \beta_2x - a_2y &= d_1c_3 - d_3c_1 \\ -\beta_1x + a_1y &= d_2c_3 - d_3c_2 \end{aligned}$$

故如 $a_1 = \beta_1 = a_2 = \beta_2 = 0$, 則亦必 $d_1c_3 - d_3c_1 = 0$, $d_2c_3 - d_3c_2 = 0$, 因而方程 (17) 於任何 x, y 均可充適, 方程 (1) 亦然. 於是對於 x, y 之每一對值, 可由 (16) 以得 z 之值. 故於此種狀況下, 二未知數爲隨意者.

§ 76. n 次之行列式. n 元一次方程

1. 今試按前節中之式 (12), 詳細一觀三次行列式之構造定律. 行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由九元素所成, 分配於三列三行內, 作正方形之排列. 正方形中自左上角至右下角之對角線, 設之主要對角線, 其