

高級中學
立體幾何教師手冊

全一冊

編著者 趙冠

正中書局印行

版權所有



翻印必究

中華民國五十三年九月臺初版
新正中本 高中立體幾何教師手冊

(全 一 冊)

編 著 者 趙 冠

發 行 人 蔣 建 白

印 刷 發 行 正 中 書 局

(臺灣臺北市衡陽路二十號)

海外總經銷 集 成 圖 書 公 司

(香港九龍亞皆老街一一一號)

海 風 書 店

(日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地)

內政部登記證 內版臺業字第〇六七八號(4672)

教本第一章 緒 論

1. 本章僅泛論立體之意義，以及點、線、面與立體等之相互關係。請各位老師對教本中涉及之各節，就眼前所見或經常得見之物，分別多多舉例說明之。若以教室爲一個立體，而以四方之牆壁及天花板、地板等爲此一立體之六面，則必須附帶說明只可認牆壁等之表面爲平面，牆壁之本身卻是立體。雖細如絲、髮、也都不是一條線，而是立體。爲講解之便，不得不姑認黑板上所畫兩直線之相交處爲一點，但事實上粉筆所畫兩直線皆不能無寬度，故其相交處不是點，而是面了。

總之，理論上之所謂點、線、面及立體，與事物上之點、線、面及立體難免有或多或少之差別。縱令其差別甚微，亦不可不辨別清楚。編者甚盼各位老師特別注意於此，務使學生對於理論上之點、線、面及立體皆能有確切之認識。

2. 或許有一部分甚至大部分學生對於平面幾何之理論及法則尚嫌生疏，此爲講授立體幾何時之最大阻礙。教本限於體裁，自不便對平面幾何再有所論述。各位老師似可針對學生程度，酌量作補救之計。教本中所謂「讀者須知平面幾何與立體幾何各爲幾何學之一部分，此兩部分爲聯貫的，而非各自獨立的」，其目的即在促使學生於研習立體幾何之初，對平面幾何重溫一遍。

3. 教本於本章之末末列習題，編者認爲在此階段只可由各位老師於講授時口頭提出若干問題，指定由某一學生即時口頭作答；如所答有誤或不恰當，立即矯正。如此，一方面可增進全班學生對立體之了解，另一方面亦可測知學生之程度。

4. 教本或手冊中，無論在意識方面或文字結構方面皆難免有錯誤或疏漏，如承各位老師發覺，敬請隨時惠函指正，以便於再

版時斟酌修改，無任感荷。

教本第二章 直線與平面

5. 公理與定理之別，平面幾何中已有各別之說明，各位老師於講授本章至「公理一」時，似可再說明一番，或令學生查閱平面幾何教本中之說明。

習 題 (一)

1. 任意三直線圍成之三角形必在一個平面上。任意取三角形之一邊 AB 及不在此邊上之頂點 C ，即決定一個平面。 A 與 C 既皆在此平面上，則此三角形之一邊 AC 依平面之定義亦必在此平面上。同理，此三角形之另一邊 BC 亦必在此平面上。

2. 四點不在同一平面上，就中任意取三點可決定一平面。換言之，即就四點中任意捨去一點可決定一平面。而四點中任意捨去一點之法有四，故共可決定四個不同之平面。

3. 如教本第二面之(圖二)，可設想其為一個長方形之教室，其 AB ， EH ， CG 三線之中任何兩直線既不相交，亦不平行。

4. 如教本第四面之(圖六)， AB 為一直線，經過 AB 可作任何個數之相異平面。故 n 個相異之平面可能相交於同一直線。但不是必然。

6. 定理下之系，教本中均未證明。編者認為宜先令學生試作證明，如不能證明，再由老師證明之。編者常有機會將幾何習題交中等學校學生作證，他們大都只能牢記若干習題之證法，而不能自行設法證明。此種習慣必須及早改正。

定理八系一 如教本中第七面(圖十三)， EF 與 CD 為相異兩直線，且 $CD \parallel AB$ ， $EF \parallel AB$ ，求證 $CD \parallel EF$ 。

(證) 因 $CD \parallel AB$ ，過 AB 及 CD 可作一平面 M 。又因 $EF \parallel$

AB , 過 AB 及 EF 亦可作一平面 N 。又過 CD 及不在 CD 上之一點 E 作一平面, 依定理七, 此平面既含 CD , 必平行於 AB 。今設此平面與平面 $ABEF$ 相交於 EG , 則依定理八 $EG \parallel AB$ 。但 $EF \parallel AB$, 故 EF 與 EG 相重合。依定理八, $EG \parallel CD$, 故得 $EF \parallel CD$ 。

定理八系二 如教本第二面(圖二), $ABCD$ 與 $AEHD$ 兩平面相交於 AD , 而此兩平面皆平行於直線 FG 。求證 $AD \parallel FG$ 。

(證) 過 FG 作平面 $BFGC$, 與平面 $ABCD$ 相交於 BC 。依定理八, $FG \parallel BC$ 。又過 FG 作平面 $FGHE$, 與平面 $AEHD$ 相交於 EH 。依定理八, $FG \parallel EH$ 。

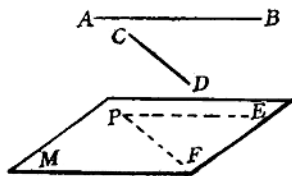
因 BC 與 EH 皆與 FG 平行, 依定理八系一, $BC \parallel EH$ 。於是兩平行直線 BC 與 EH 可決定一平面 $BCHE$ 。 EH 既平行於 BC , 依定理七, 含 EH 之平面 $AEHD$ 必平行於 BC 。

因 BC 與平面 $AEHD$ 平行, 依定理八, 過 BC 之兩平面 $ABCD$ 及 $BCHE$ 與平面 $AEHD$ 相交之兩直線 AD , EH 皆與 BC 平行。

於是, $BC \parallel AD$, 又由上文知 $BC \parallel FG$, 故依定理八系一, $AD \parallel FG$ 。

定理十一系 如教本第九面(圖十六), 於平面 Q 及 R 之外任意取一點 D , 作 DC 與 DF 兩直線, 與平面 Q 交於 G 及 E , 與平面 R 交於 C 及 F 。相交兩直線 DC 與 DF 決定一平面。兩直線 GE 與 CF 皆在此平面上, 又分別在相平行之兩平面 Q 及 R 上, 故 $GE \parallel CF$ 。於是 $\triangle DGE \sim \triangle DCF$, 故 $DG:DE = GC:EF$ 。

作圖題一系 如(圖一), AB , CD 為兩已知直線, P 為已知點, 求作一平面過 P 點而與 AB 及 CD 皆平行。



(圖一)

(作圖) 過 P 點作直線 $PE \parallel AB$, 又過 P 點作直線 $PF \parallel CD$, 相交兩直線 PE 與 PF 所決定之平面 M 即為所求之平面。

(證) $PE \parallel AB$, 依定理七, 含 PE 而不含 AB 之平面 M 必平行於 AB 。同理, $PF \parallel CD$, 含 PF 而不含 CD 之平面 M 必平行於 CD 。故平面 M 為求作之平面。

若 $AB \parallel CD$, 作 $PE \parallel AB$, 依定理八系一, $PE \parallel CD$ 。於是凡過 PE 而不過 AB 及 CD 之平面皆平行於 AB 及 CD 。若 AB 與 CD 不平行, 則過 P 點僅可作 $PE \parallel AB$, 亦僅可作 $PF \parallel CD$, 故所求作之平面僅有 PE 與 PF 所決定之平面 M 。

習 題 (二)

1. 如教本第九面(圖十五), P, Q 為兩平行平面, 設平面 M 與平面 P 相交於 AB , 求證平面 M 亦必與平面 Q 相交。

(證) 若平面 M 不與平面 Q 相交, 依公理三, 平面 M 必與平面 Q 相平行。於平面 Q 內任意作直線 EF , 令與 AB 不相平行, 則是過 AB 可作兩平面 P 與 M , 皆與 EF 平行, 此與作圖題一之後段不合。故平面 M 不可能與平面 Q 平行, 即平面 M 亦必與平面 Q 相交。

2. 如教本第九面(圖十六), 設 Q, R 為相平行之兩平面, DE 為任意直線, 與平面 Q 相交於一點, 如 E , 則此直線亦必與平面 R 相交。

(證) 平面 Q 平行於平面 R , 故此兩平面無共點。直線 DE 與平面 Q 之共點 E 必不在平面 R 上, 故平面 R 不含直線 DE 。直線 DE 既不在平面 R 上, 若又不與 R 相交, 依公理一, 直線 DE 應與平面 R 相平行。

假令直線 DE 與平面 R 相平行, 過 DE 任意作平面 $DGCFE$, 依定理八, 平面 $DGCFE$ 與平面 R 之交線 CF 必平行於 DE 。又依定理十, $CF \parallel GE$ 。三直線 CF, DE, GE 在同一平面上, 而 CF 竟與相交之兩直線 DE, GE 皆平行, 此為不可能。故直線 DE 不可能平行於平面 R , 而必與 R 相交。

3. 如教本第七面(圖十三), AC, BD 為相平行之二直線, 平面 P 與直

線 AC 相交於一點，如 C ，則平面 P 亦必與直線 BD 相交。

(證) 依假設 $AC \parallel BD$ ，故依定理五， AC 與 BD 決定一平面。命此平面為 M 。

依假設，平面 M 與平面 P 有一公共點 C ，故依公理二及定理六，此兩平面有一交線，如 CD 。

又 $AC \parallel BD$ ，而 AC 與 CD 相交於 C ，故 BD 亦必與 CD 相交於一點，如 D 。但 D 為平面 P 上之一點，故 BD 與平面 P 相交於 D 。

4. 如教本第二面(圖二)， AB, EF 為相平行之兩直線， $AEHD, BFGC$ 為相平行之兩平面，則截於此兩平面間之兩線段 AB 與 EF 相等。

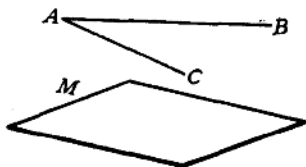
(證) 依假設 $AB \parallel EF$ ，故依定理五， AB 與 EF 可決定一平面，如 $ABFE$ 。 AE 與 BF 為兩平行平面 $AEHD, BFGC$ 與第三平面 $ABFE$ 之兩交線，依定理十， $AE \parallel BF$ 。故 $ABFE$ 為在同一平面上之平行四邊形，其相對之邊應相等，故 $AB=EF$ 。

5. 如教本第九面(圖十六)， P, Q, R 為三個相平行之平面，此三平行平面截直線 AC 於三點，如 A, B, C ，而 $AB=BC$ ，則任意直線如 DF 為此三平行平面所截之兩線段 DE, EF 亦必相等。

(證) 依定理十一， $AB:BC=DE:EF$ ，但依假設 $AB=BC$ ，故 DE 亦必等於 EF 。

6. 如右圖， AB, AC 為相交之兩直線，皆平行於平面 M ，則平面 BAC 亦必平行於平面 M 。

(證) 平面 BAC 若不與平面 M 相平行，則必有一交線。命此交線為 EF 。依定理八，此交線 EF 當平行於 AB ，亦當平行於 AC 。 AB, AC, EF 三直線皆在平面 BAC 上，而 EF 竟與相交之兩直線 AB, AC 皆平行，此為不可能。故平面 BAC 與平面 M 不可能相交，即平面 BAC 與平面 M 平行。



(圖二)

7. (1) 教室中之天花板與地板為相平行之兩平面，任何一方之牆壁與

地板相交，亦必與天花板相交。(2)相鄰兩方之牆壁相交於一直線，此直線與地板相交，亦必與天花板相交。(3)左牆與地板相交於一直線，右牆亦與地板相交於一直線，此兩直線相平行。後牆與此兩直線之一相交，亦必與其餘一直線相交。(4)若以並立之兩柱為相平行之兩直線，兩柱介於天花板與地板間之長相等。(5)樓房每一層之高相等，則斜置屋旁，自地面直達屋頂之梯，介於每層間之梯長亦相等。(6)教室中黑板之上稜與左稜相交，與黑板對面之牆平行於此兩稜，則黑板所在之平面與其對面之牆相平行。

8. 如教本第七面(圖十三)，設 AB 為已知之直線， C, F 為已知之兩點。求作一平面，如 P ，過 C, F 兩點，且與 AB 平行。

(作圖) 取 C, F 兩點中之任意一點，如 C ，則 AB 與 C 可決定一平面 M 。於平面 M 上作直線 $CD \parallel AB$ ，則 CD 與 F 所決定之平面 P 即為求作之平面。

(證) 依作圖，平面 P 含 C, F 兩點。又 $CD \parallel AB$ ，依定理七，含 CD 而不含 AB 之平面必平行於 AB ，故平面 P 平行於 AB 。

7. 定義六中所稱「一直線與一平面上通過其足之任何直線相垂直」，意指通過其足之一切直線，而非僅其中之一直線。

定理十三系一 如教本第十一面(圖十八)， B 為直線 AB 上之一點，過此點可作一平面垂直於 AB ，如平面 P ，且僅能作此一平面。

(作圖) 過 B 點，作直線 BC 及 BD ，皆垂直於 AB 。此相交兩直線所決定之平面 P 即為求作之平面。

(證) $AB \perp BC, AB \perp BD$ ，依定理十二， $AB \perp P$ 。假令於平面 P 之外，過 B 點可作另一平面 Q 垂直於 AB ，則依定理十三， BC, BD 兩直線既皆在平面 P 上，又皆在平面 Q 上，於是平面 P 與平面 Q 有兩交線 BC 與 BD ，此為不可能。故於平面 P 之外不可能更作另一過 B 點而垂直於 AB 之平面；亦即過直線上一定點僅可作一平面垂直於此直線。

定理十三系二 如教本第十一面(圖十八)， AB 為一直線， C

爲 AB 外之一點，過 C 點可作一平面垂直於 AB ，如平面 P ，且僅能作此一平面。

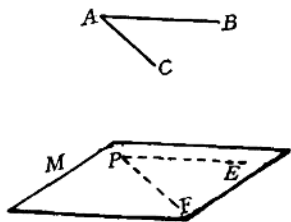
(作圖) 過 C 點作直線 BC 與 AB 相垂直，交 AB 於 B 。又過 B 點作直線 BD 與 AB 相垂直， BC, BD 所決定之平面 P 即爲求作之平面。

(證) $BC \perp AB, BD \perp AB$ ，依定理十二， $AB \perp P$ 。但過直線 AB 外一點 C 僅可作一直線垂直於 AB ，如 BC ，又依定理十三， BC 必在過 B 點而垂直於 AB 之平面 P 上，同理， BD 亦必在平面 P 上，依定理十三系一，過 C 點而垂直於 AB 之平面僅有平面 P 。

8. 定理十四之(證)中，僅言過 B' 點作任意之直線 $B'C'$ ，學生若懷疑何以知 $A'B'$ 與平面 P 有交點，則可令其查閱習題(二)3。

定理十五系 如右圖， M 爲已知之平面， A 爲平面 M 外之一點，求作一平面通過 A 點而與平面 M 平行。

(作圖) 於平面 M 上任意取一點，如 P ，任意作直線 PE 及 PF 。又於 A 點作直線 $AB \parallel PE, AC \parallel PF$ ，則相交兩直線 AB, AC 所決定之平面即爲求作之平面。



(圖二)

(證) 依作圖， $AB \parallel PE$ ，故含 PE 之平面 M 必平行於 AB 。又 $AC \parallel PF$ ，故含 PF 之平面 M 必平行於 AC 。相交兩直線 AB, AC 皆平行於平面 M ，依習題(二)6，相交兩直線 AB, AC 所決定之平面必平行於平面 M 。

假令過 A 點可有兩平面 Q 及 R 皆與平面 M 相平行，此兩平面既有一個公共點 A ，依定理六，此兩平面應相交於一直線。依習題(二)1，平面 Q 既與平面 R 相交，亦必與平行於 R 之平面 M 相

交，此爲自相矛盾，故過一點不可能有兩平面皆平行於 M 。

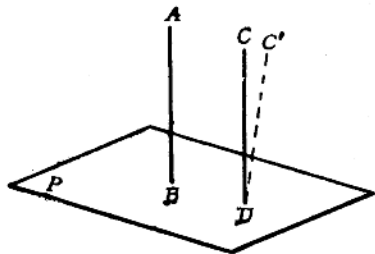
又平面 BAC 與平面 M 相平行，依定理十五，凡垂直於平面 BAC 之直線亦垂直於平面 M 。設 AD 爲過 A 點而垂直於此兩平面之直線，則依定理十三，過 A 點而垂直於 AD 之直線必皆在平面 BAC 上，由此亦可斷定不可能有兩平面皆過 A 點而又皆平行於平面 M 。

此一命題如改爲教本中作圖題二之系，則當先作過 A 點而垂直於 M 之垂線 AD ，然後再作過 A 點而垂直於 AD 之兩垂線 AB' 、 AC ，此兩垂線 AB 、 AC 所決定之平面亦即爲求作之平面。

以上兩種作圖方法，是否應一併對學生講解，似可由各位老師斟酌決定。

作圖題二系 如右圖，直線 AB 與 CD 皆垂直於平面 P ，求證 $AB \parallel CD$ 。

(證) 過直線 CD 與平面 P 之交點 D ，作直線 $DC' \parallel AB$ ，依定理十四，直線 DC' 亦垂直於平面 P 。但依作圖題二，過 D 點僅可有一直線垂直於平面 P ，故 DC' 必當與 CD 重合，故 $AB \parallel CD$ 。



(圖三)

應請注意者，欲證明兩線相平行，在平面幾何中僅須證明此兩線不相交，在立體幾何中則須於證明其不相交外，更證明其在同一平面上。本命題之證明方法已避免分層證明之困難，便覺簡捷可喜。

定理十七系 如教本第十五面(圖二五)，設 AN 爲平面 P 之垂線， N 爲 AN 上之任意一點， BC 爲平面 P 上之任意一直線，若

$NM \perp BC$, 求證 $AM \perp BC$ 。

(證) 於 BC 上取 $BM=MC$, 在兩直角三角形 NBM 與 NCM 內, 有 $BM=MC$, NM 公用,

$$\therefore \triangle NBM \cong \triangle NCM, \therefore NB=NC.$$

在兩直角三角形 NAB 與 NCB 內, 有

$$NB=NC, AN \text{ 公用},$$

$$\therefore \triangle NAB \cong \triangle NCB, \therefore AB=AC.$$

在兩三角形 ABM 與 ACM 內, 有

$$BM=MC, AB=AC, AM \text{ 公用},$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACM,$$

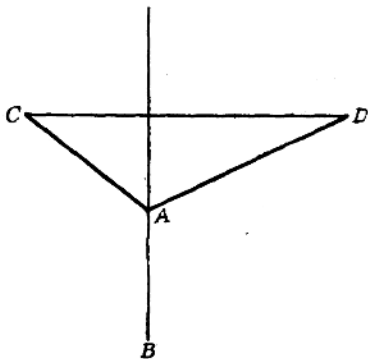
$$\therefore \angle AMB = \angle AMC, \therefore AM \perp BC.$$

應請注意者, 本命題之證明方法與定理十七之證明方法相似, 但其進行之程序恰相反。

習 題 (三)

1. 一平面與一直線相交, 僅有一個交點。自直線外一點作此直線之垂線亦僅有一個垂線可作。一平面過直線外兩已知點而又垂直於此直線, 則此平面必含過此兩點所作此直線之兩垂線, 亦必含此兩垂線之垂足。但此兩垂足又應皆在此直線上, 亦即兩垂足皆為此平面與此直線之交點。由此可知過兩已知點所作此直線之兩垂線必以同一點為垂足。

如右圖, AB 為已知直線, C , D 為直線 AB 外之兩已知點, 過



(圖五)

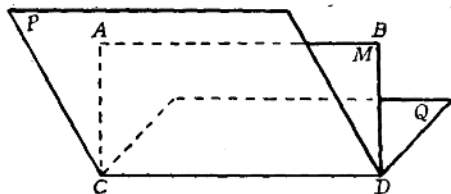
C 作 AB 之垂線 AC , 過 D 作 AB 之垂線 AD , 若此兩線之垂足皆為 A , 則過 C, D 兩點可作一平面垂直於 AB , 此平面即為相交兩直線 AC, AD 所決定之平面。

2. 兩直線相平行, 若一直線與一平面垂直而又與另一直線斜交, 與定理十四不合。故相平行兩直線或皆垂直於一平面, 或皆與一平面斜交。

3. 一直線若垂直於平面 P 而又垂直於平面 Q , 依定理十六, $P \parallel Q$ 。故當平面 P 與平面 Q 相交時, 不可能作一直線垂直於此兩平面。

4. 平面 P 與平面 Q 相交, 依定理六, 此兩平面相交於一直線, 如 CD 此交線與此兩平面外之一點 A 可決定一平面, 命此平面為 M 。於平面 M 上過 P, Q 外之點 A 作直線 $AB \parallel CD$, 則 $AB \parallel P, AB \parallel Q$ 。

(證) $AB \parallel CD$, 依定理七, AB 平行於含 CD 而不含 AB 之平面 P ,



(圖六)

亦平行於含 CD 而不含 AB 之平面 Q 。

9. 各位老師如感覺習題太少, 不妨就複習題及總複習題中酌選可用之題提前令學生解答。如大多數學生不能解答, 足證其對於已講授之諸定理尚不熟習, 似宜趁此及早設法補救。

定理十八系 如教本第十六面(圖二六), 設 P 為對直線 AB 兩端有等距離之任意一點, M 為直線 AB 之中點, 連接 PM , 則在兩三角形 PAM 與 PBM 內, 有

$$PA = PB, AM = BM, PM \text{ 公用},$$

$$\therefore \triangle PAM \cong \triangle PBM,$$

$$\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ$$

由是知 PM 垂直於 AB 。依定理十三， PM 必在過 M 點而垂直於 AB 之平面上，亦即在垂直平分 AB 之平面上。

定理十九系一 如教本第十六面(圖二七)， EA 為平面 P 之垂線， EB, EC, ED 皆為斜線，設 $EB = EC$ ，而 $ED > EB$ ，求證 $AB = AC, AD > AB$ 。

(證) (一) 在 $\triangle EAB$ 及 $\triangle EAC$ 內，有

$$\angle EAB = \angle EAC, EB = EC, EA \text{ 公用},$$

$$\therefore \triangle EAB \cong \triangle EAC,$$

$$BA = AC$$

(二) 在 $\triangle EAB$ 內，

$$AB^2 = EB^2 - EA^2$$

在 $\triangle EAD$ 內，

$$AD^2 = ED^2 - EA^2$$

但 $ED > EB$ ，故 $AD > AB$ 。

定理十九系二 如教本第十六面(圖二七)， E 為平面 P 外之一點， EA 為平面 P 之垂線， ED 為過 E 點所作平面 P 之任意斜線，求證 $ED > EA$ 。

(證) 在直角三角形 EAD 內， $\angle EAD$ 為直角，故 $\angle EAD > \angle EDA$ ，而較大之角所對之邊亦較大。

$$\therefore ED > EA。$$

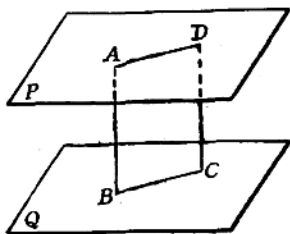
由是知過 E 點所作平面 P 之任何斜線皆大於垂線 EA ，即垂線 EA 為最短。

定理十九系三 如教本第十六面(圖二七)， $EA, EB, EC, ED, \dots$ 諸線中，依定理十九系二，諸斜線皆較垂線為長。若可能自平面外一點作直線與此平面相交而較垂線為短，則與定理十九系二

相矛盾。故自平面外一點作諸直線與此平面相交，所能作之最短直線即是垂線。

定理十九系四 如右圖， P, Q 兩平面相平行，於此兩平面中任意取兩點，如 A 及 C ，則自 A 點至平面 Q 之距離 AB 等於自 C 點至平面 P 之距離 CD 。

(證) $P \parallel Q, AB \perp Q, CD \perp P$,
依定理十五, $AB \perp P, CD \perp Q$,
依作圖題二系, $AB \parallel CD$ 。



(圖七)

此兩直線 AB, CD 所決定之平面與平面 P, Q 相交於 AD 及 BC ，依定理十, $AD \parallel BC$ ，故 $ABCD$ 為平行四邊形，故 $AB = CD$ 。

此處所選用之任意兩點不必分別於 P, Q 兩平面上各取一點，若於平面 P 上任意取兩點，或於平面 Q 上任意取兩點，其情形與上所證明並無二致。

定理十九系五 如上圖，於平面 P 上任意取兩點，如 A 及 D 作 $AB \perp Q, DC \perp Q$ ，若 $AB = DC$ ，求證 $P \parallel Q$ 。

(證) 因兩直線 AB, CD 皆垂直於 Q ，故 $AB \parallel CD$ ，依定理十, $AD \parallel BC$ 。又依定理七, $P \parallel Q$ 。

習 題 (四)

1. 如右圖，兩平面 P, Q 相平行，空間一點，如 A ，在此兩平面之間，過 A 點作直線 BAC ，使之垂直於平面 P 及 Q ，若 $AB = AC$ ，求 A 之軌跡。

過 A 點作平面平行於 P ，如平面 R ，此平面亦必平行於 Q 。平面 R 即為 A 點之軌跡。

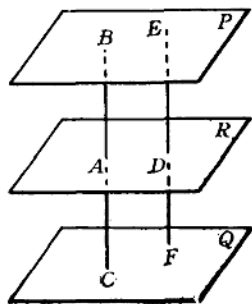
(證) 於平面 R 上任意取一點，如 D ，作直線 EDF 垂直於兩平面 P 及

Q。依定理十九系四，

$$DE = AB, DF = AC,$$

但 $AB = AC, \therefore DE = DF$ 。

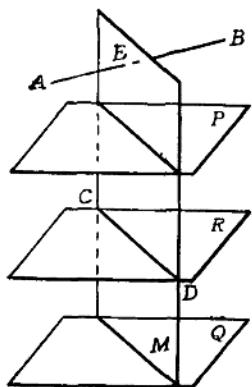
由是知平面 R 上之任意一點對平面 P 及 Q 皆有等距離，故平面 R 為 A 點之軌跡。



(圖八)

2. P, Q 為相平行之兩平面， A 及 B 為兩已知點。對 P, Q 有等距離之點之軌跡，由習題一得知為平面 R 。命兩已知點之中點為 E ，過 E 點作平面 M ，使之垂直於直線 AB 。平面 R 與平面 M 之交線 CD 即為所求之軌跡。

(證) 依習題一，平面 R 上之各點對平面 P 及 Q 有等距離。依定理十八，平面 M 上之各點對 A 及 B 有等距離。故平面 R 與平面 M 之交線 CD 對 P, Q 有等距離，對 A, B 亦有等距離。

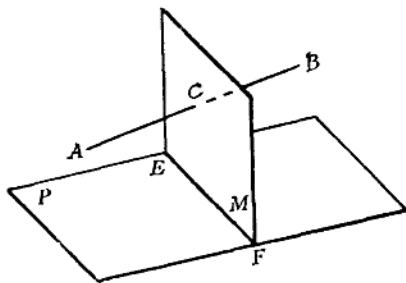


(圖九)

3. 如右圖， P 為已知平面， A, B 為不在此平面上之已知兩點。取 A, B 之中點 C ，過 C 點作平面 M ，使之垂直於 AB ，則平面 P 與平面 M 之交線 EF 即為所求之軌跡。

(證) 依定理十八，平面 M 上之各點對 A, B 有等距離。 EF 為兩平面 P 與 M 之交線，故 EF 在平面 P 上，亦在平面 M 上，故 EF 上之各點皆為

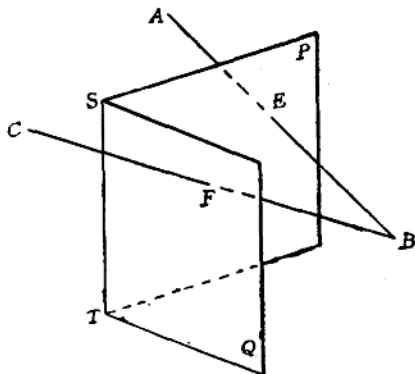
平面 P 上對 A, B 有等距離之點。



(圖十)

4. 設 A, B, C 為不在同一直線上之三點, 任意取其中兩點, 如 A 及 B 作 AB 之垂直平分平面 P 。另取其中兩點, 如 B 及 C , 作 BC 之垂直平分平面 Q , 則所作兩平面 P 及 Q 之交線 ST 即為所求之軌跡。

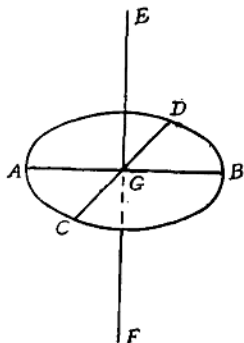
(證) ST 為兩平面 P 及 Q 之交線。 ST 在平面 P 上, 故 ST 上之各點對 A, B 有等距離。 ST 在平面 Q 上, 故 ST 上之各點對 B, C 亦有等距離。由是知 ST 上之各點對 A, B, C 三點有等距離。



(圖十一)

5. 設 $ABCD$ 爲一圓, G 爲圓心, 過 G 點任意作圓之二直徑 AB 及 CD 。又過 G 點作直線 EGF , 使之垂直於 AB 及 CD 所決定之平面, 此直線 EGF 即爲所求之軌跡。

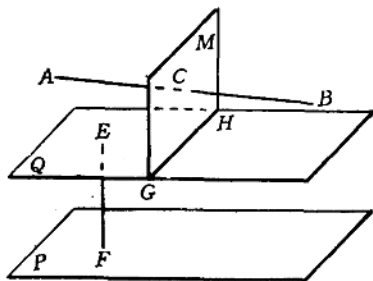
(證) 直線 EGF 垂直於 AB 及 CD 所決定之平面, 依定義六, 此直線亦必垂直於 AB 及 CD 。由是知直線 EGF 爲 AB 之垂直平分線, 亦爲 CD 之垂直平分線。故 EGF 爲圓 $ABCD$ 上任意直徑之垂直平分線, 故 EGF 對圓周上各點有等距離。



(圖十二)

6. 設 P 爲已知之平面, 於平面 P 上任意取一點, 如 F , 作 $EF \perp P$, 且令 EF 之長等於已知之距離。過 E 點, 作平面 Q , 使 $Q \parallel P$ 。又作平面 M , 使之垂直平分 AB 。平面 M 與平面 Q 之交線 GH 即爲所求之軌跡。

(證) $Q \parallel P$, 依定理十九系四, 此兩平面間之距離等於已知距離 EF 。又依定理十八, 平面 M 上各點對 A, B 兩點有等距離。故平面 Q 與平面 M 之交線 GH 上各點對平面 P 之距離等於已知距離, 而對 A 及 B 兩點又有等距離。



(圖十三)

7. 如右圖, A 及 B 爲兩已知點, C 及 D 亦爲兩已知點, 作 A 及 B 之垂直平分平面 P , 又作 C 及 D 之垂直平分平面 Q , 此兩平面之交線 GH 即爲所求之軌跡。

(證) 直線 GH 爲平面 P 與平面 Q 之交線, 故 GH 在平面 P 上, 亦在