大学数学基础与提高丛书

主编 雷发社

概率统计重点难点40讲

GAILUTONGJI ZHONGDIANNANDIAN

本书特色

全方位精讲概率统计40个重点难点，深入浅出，化难为易，堪称本专科生、考研学生、科教人员的良师益友。

多角度精析400道典型例题，系统讲述解题方法与技巧，可作习题讨论课、考研提高课的首选教材。

陕西科学技术出版社

概率统计
重点难点 40 讲

主　编　雷发社

编　者　金海红　王惠君　文　杰

郑新侠　党林立　欧阳克智

陕西科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率统计重点难点40讲/雷发社主编．—西安：陕西科学技术出版社，2004.3
ISBN 7-5369-3761-X

I. 概… II. 雷… III. ①概率论—教学参考资料 ②数理统计—教学参考资料 IV. O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第013454号

出版者	陕西科学技术出版社 西安北大街131号　邮编710003 电话(029)87211894 传真(029)87218236 http://www.snstp.com
发行者	陕西科学技术出版社 电话(029)87212206 87260001
印　刷	航天工业总公司210所印刷厂
规　格	787mm×1092mm　16开本
印　张	13
字　数	332千字
版　次	2004年5月第1版 2004年5月第1次印刷
定　价	19.00元

前　言

众所周知，概率统计这门重要的基础课具有理论上的抽象性、逻辑上的严密性、计算上的复杂性以及应用上的广泛性等特点。正因于此，对初学概率统计的读者来说，希望能有一本满意的参考书，帮助他们在有限的学时内较顺利地突破难点，抓住重点，牢固地掌握基本知识；并在此基础上，学会并掌握较为系统的解题方法。为了满足读者的上述愿望，我们总结三十多年从事概率统计教学的经验，编写了这本《概率统计重点难点40讲》。

本书的特点是：一、突出重点难点。全书将概率统计中从随机事件与概率、一维与多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理到数理统计的基本概念、参数估计以及假设检验各个章节中的重要的、难以理解掌握的知识点一一抽取出来，从多角度进行详细的讲解与讨论，起到化难为易的功效；二、介绍解题方法系统全面。每一讲精选出若干个典型例题，通过对这些有代表性的例题进行由浅入深的详细剖析，使读者达到举一反三的效果；三、适用面广。由于本书选材的多样性与综合性使得它既适用于理工类、又适用于经管类本专科生；既可作为初学者的辅助教材，又可作为准备报考硕士研究生的考生考前训练的指导书。

由于编者水平有限，书中错误之处敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

第 1 讲　随机事件与样本空间

一、随机试验、随机事件和样本空间

(1) **随机试验(记为 E)**. 若试验满足条件:① 可以在相同条件下重复进行;② 所有可能结果事先已知;③ 作一次试验究竟哪一个结果出现,事先不能确定,则称该试验 E 为随机试验(简称试验).

(2) **基本事件**. 随机试验 E 的每一个不可再分解的结果称为试验的一个基本事件(样本点),用记号 ω 或 e 表示.

(3) **样本空间**. 所有基本事件(样本点)构成的集合为样本空间,记为 Ω,即有 $\Omega = \{\omega\}$.

(4) **随机事件**. 在一次随机试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件. 随机事件是样本空间 Ω 的一个子集,用大写字母 A、B、C 等表示.

(5) **必然事件**. 在一定条件下,每次试验中一定要发生的事件称为必然事件,用记号 Ω 表示.

(6) **不可能事件**. 在一定条件下,每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件,用记号 Φ 表示.

注意 ① 不同的试验由试验条件与观察的目的加以区分. 条件不同不能认为是同一试验;条件相同,观察的目的不同也不能认为是同一试验;② 随机试验决定样本空间,当样本空间表示全集时,则随机事件是样本空间的子集. 而样本空间又可表示必然事件,空集可表示不可能事件. 随机事件是样本空间的子集合,即随机事件所包含的样本点都属于样本空间;③ 互斥与对立的联系与区别:(ⅰ) 互斥事件(不相容事件). 若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB = \Phi$,则称事件 A 与事件 B 为互斥事件. 若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个都是互斥的,则称该事件组是互斥事件组. 特别地,同一样本空间中任意两个基本事件是互斥的;(ⅱ) 对立事件(逆事件). "事件 A 不发生"的事件称为事件 A 的对立事件,A 的对立事件记为 $\bar{A}$. 显然 $\bar{\Omega} = \Phi$, $\bar{\bar{A}} = A$;(ⅲ) 若事件 A、B 互斥,则 $AB = \Phi$;若事件 A、B 对立,则 $AB = \Phi$,且 $A \cup B = \Omega$. 可见:两个互为对立的事件一定是互斥事件;反之,互斥事件不一定是对立事件. 而且,互斥的概念适用于多个事件,但对立概念只适用于两个事件. 两个事件互斥只表明这两个事件不能同时发生,即至多只能发生一个,也可以都不发生,而两事件对立则表示它们有且仅有一个发生;(ⅳ) 若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥即 $A_iA_j = \Phi(i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j)$,且其和为必然事件即 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$,则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件组. 特别地,事件 A 与它的对立事件 $\bar{A}$ 构成一个完备事件组;

④一个事件 A 发生当且仅当 A 所包含的某一基本事件发生，若 A 发生必导致 B 发生，则 $A \subset B$；⑤关于事件的运算，我们应注意到：事件的运算法则与集合的相应运算法则完全一致．必然事件、不可能事件、事件分别相当于全集、空集、全集的某个子集；事件的和、积、差、对立事件分别相当于集合的和、交、差和余集．由集合的运算性质可推知相应的事件的运算性质，如：

(1) 吸收律：若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B, AB = A$；

(2) 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$；

(3) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A(BC) = (AB)C$；

(4) 对偶性：$\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A}_k$；$\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{A}_k$；

(5) 对减法运算满足 $A - B = A\overline{B}$（或 $A \cap \overline{B}$）.

二、典型例题讨论

例 1 写出下列随机试验的样本空间：(1) 将一枚硬币连抛 3 次，观察正反面出现的情况；(2) 袋中有 3 只白球和 2 只黑球，从袋中任取 2 只球，且每次抽 1 只，取后不放回，观察取得球的颜色；(3) 将 a、b 两球随机放到 3 个不同盒子中；(4) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度．

分析 随机试验的样本空间，是试验的所有基本事件的集合．所以，只要根据题设条件，分析基本事件的特性，则样本空间为 $\Omega = \{e \mid e \text{是试验的基本事件}\}$.

解 (1) 用"H"表示出现"正面"，"T"表示出现"反面"．于是，由题设，基本事件是从两个相异元素 H、T 中，允许重复地取出 3 个元素的排列，而所有这种排列共有 $2^3 = 8$ 种可能结果，所以，样本空间

$$\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),\\ (T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}.$$

(2) 将白球编号为 1,2,3，黑球编号为 4,5，则基本事件是从 5 个相异元素中取出 2 个元素的排列，共 $A_5^2 = 20$ 种可能结果，所以，样本空间是

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\ (2,1) & (2,3) & (2,4) & (2,5) \\ (3,1) & (3,2) & (3,4) & (3,5) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,5) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) \end{Bmatrix}.$$

(3) 在此试验中，基本事件可分为两个类，一类是 a、b 两球放在同一盒中，共有 $A_3^1 = 3$ 种可能结果（用"0"表示盒中没放球）：

$$(ab,0,0),(0,ab,0),(0,0,ab);$$

另一类是 a，b 两球分别放在两个不同盒中，共有 $A_3^2 = 6$ 种可能结果：

$$(a,b,0),(b,a,0),(a,0,b),(b,0,a),(0,a,b),(0,b,a);$$

所以,样本空间共由以下 9 个样本点构成:

$$\Omega = \{(ab,0,0),(0,ab,0),(0,0,ab),(a,b,0),(b,a,0),(a,0,b),(b,0,a),(0,a,b),(0,b,a)\}.$$

(4) 设 x,y,z 分别为折成的第一段、第二段、第三段的长度,则样本空间为 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}$. 若设 A = "三段可构成三角形",则 $A = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \Omega, x + y > z, x + z > y, y + z > x\}$.

例 2　表示下列随机试验的有关随机事件,并分析他们之间的相互关系.

(1) 掷一颗骰子,观察掷得的点数. 考虑事件:"掷得的点数不超过 2"、"掷得的点数不超过 3"、"掷得的点数大于 3" 及"掷得奇数点".

(2) 从一批灯泡中任取一只,测试它的寿命,考虑事件"测得寿命大于 1000 小时"、"测得寿命大于 1500 小时" 及"测得寿命不小于 1000 小时".

分析　这类问题的解答步骤如下:

(1) 说明一个试验的结果如何表达;

(2) 表明所要表示的事件由哪些结果构成;

(3) 依据事件的四种基本关系的定义说明它们之间的相互关系.

解　(1) 因为骰子是一个正六面体,每一个面依次分别刻有 1 个点,2 个点,…,6 个点,掷一次骰子,可能出现点数 $i(i = 1,2,\cdots,6)$. 我们用 i 表示基本事件"出现点数为 i 的面",则样本空间 $\Omega = \{1,2,\cdots,6\}$.

用 A,B,C,D 依次表示题中的 4 个事件,则它们的表示方法分别为

$$A = \{1,2\}, B = \{1,2,3\}, C = \{4,5,6\}, D = \{1,3,5\}.$$

由于 A 发生必导致 B 发生,故有 $A \subset B$. A 与 C, B 与 C 不可能同时发生,故 A 与 C 互不相容, B 与 C 互不相容. 而且在一次试验中 B,C 必有一个发生,且只有一个发生. 故 B 与 C 互逆.

(2) 用 $t(t \geqslant 0)$ 表示测得寿命为 t 小时这一结果. A,B,C 依次表示题中的三个事件,则 $A = \{t \mid t > 1000\}, B = \{t \mid t > 1500\}, C = \{t \mid t \geqslant 1000\}$, 显然 $B \subset A, B \subset C, A \subset C$.

例 3　袋中有 10 个球,分别编有 1 至 10 个号,从其中任取一个,设事件 A 表示"取得的球的号码是偶数",事件 B 表示"取得的球的号码是奇数",事件 C 表示"取得的球的号码小于 5",则

(1) $A \cup B$, (2) AB, (3) $\overline{C}$, (4) $A \cup C$, (5) AC, (6) $\overline{A}\,\overline{C}$, (7) $\overline{B \cup C}$, (8) $\overline{BC}$

分别表示什么事件?

解　随机试验的所有可能的结果即基本事件有 10 个. 把基本事件"取到 i 号球" 记为 "i"$(i = 1,2,\cdots,10)$, 则该试验的样本空间 $\Omega = \{1,2,\cdots,10\}$.

事件 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，$C=\{1,2,3,4\}$，于是

(1) $A\cup B=\{2,4,6,8,10\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\Omega$，是必然事件；

(2) $AB=\Phi$，是不可能事件；

(3) $\bar{C}=\Omega-C=\{5,6,7,8,9,10\}$，即“$\bar{C}$ 表示事件：“取得的球的号码不小于 5”；

(4) $A\cup C=\{1,2,3,4,6,8,10\}$；

(5) $AC=\{2,4\}$；

(6) $\bar{A}\bar{C}=\{1,3,5,7,9\}\cap\{5,6,7,8,9,10\}=\{5,7,9\}$；

(7) $\overline{B\cup C}=\bar{B}\cap\bar{C}=A\cap\bar{C}=\{2,4,6,8,10\}\cap\{5,6,7,8,9,10\}=\{6,8,10\}$；

(8) $\overline{B\cap C}=\bar{B}\cup\bar{C}=A\cup\bar{C}=\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$.

例 4 设 A,B,C 是三个随机事件，试用 A,B,C 表示下列各事件：

(1) 恰有 A 发生；(2) A 和 B 都发生而 C 不发生；(3) A,B,C 都发生；(4) A,B,C 至少有一个发生；(5) A、B、C 至少有两个发生；(6) A、B、C 恰有一个发生；(7) A、B、C 恰有两个发生. (8) A、B、C 不多于一个发生；(9) A、B、C 不多于两个发生；(10) A、B、C 三个事件都不发生.

解 用已知事件来表示其他事件的一般方法是：简单的事件可以由事件运算的定义直接写出(如本题的问题(1)、(2)、(3)、(4)、(10)；复杂的事件，可以考虑用下面三种方法分析：

(1) 利用文氏图进行分析(如本题问题(5))；

(2) 先写出它的逆事件，逆的逆就是它本身(如本题的问题(8)、(9))；

(3) 将所述事件翻译成一个等价的易接受的说法，再写出表示式(如本题的问题(6) 与 (7)).

依这些方法，写出答案如下：

(1) $A\bar{B}\bar{C}$； (2) $AB\bar{C}$； (3) ABC；

(4) $A\cup B\cup C$； (5) $(AB)\cup(AC)\cup(BC)$；

(6) $(A\bar{B}\bar{C})\cup(\bar{A}B\bar{C})\cup(\bar{A}\bar{B}C)$；

(7) $(AB\bar{C})\cup(A\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC)$；

(8) $\overline{(AB)\cup(AC)\cup(BC)}$；或者 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(9) $\overline{ABC}$； (10) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

例 5 化简下列事件：

(1) $AB\cup A\bar{B}$； (2) $(\bar{A}\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)$； (3) $A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}$；(4) $\bar{A}B\cup A\bar{B}\cup AB$.

解 (1) $AB\cup A\bar{B}\xlongequal{\text{分配律}}A(B\cup\bar{B})=A\Omega\xlongequal{\text{吸收律}}A$.

$$
\begin{aligned}
(2)\ (\bar{A}\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)&\xlongequal{\text{分配律}}[\bar{A}(\bar{A}\cup B)]\cup[\bar{B}(\bar{A}\cup B)]\\
&=(\bar{A}\bar{A}\cup\bar{A}B)\cup(\bar{B}\bar{A}\cup\bar{B}B)\\
&=(\bar{A}\cup\bar{A}B)\cup(\bar{B}\bar{A}\cup\Phi)
\end{aligned}
$$

$$\xlongequal{\text{吸收律}} \bar{A} \cup \bar{B}\bar{A} \xlongequal{\text{吸收律}} \bar{A}.$$

(3) $A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B} \xlongequal{\text{吸收律}} A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B}$

$$\xlongequal{\text{交换律,结合律}} (A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B}) \cup (\bar{A}B \cup \bar{A}\,\bar{B})$$

$$\xlongequal{\text{分配律}} \bar{B}(A \cup \bar{A}) \cup \bar{A}(B \cup \bar{B}) = \bar{B}\Omega \cup \bar{A}\Omega = \bar{B} \cup \bar{A}$$

$$\xlongequal{\text{对偶律}} \overline{AB}.$$

(4) $\bar{A}B \cup A\bar{B} \cup AB = \bar{A}B \cup A(\bar{B} \cup B) = \bar{A}B \cup A\Omega = \bar{A}B \cup A = A \cup B.$

例6 设 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\bar{A}$ 为( )

(A)"甲种产品滞销或乙种产品畅销"; (B)"甲种产品滞销";

(C)"甲乙两种产品均畅销; (D)"甲种产品滞销,乙种产品畅销".

解 设 A_1 = "甲种产品畅销", A_2 = "乙种产品畅销".则

$$A = A_1\bar{A}_2,$$

由对偶律知 $\bar{A} = \overline{A_1\bar{A}_2} = \bar{A}_1 \cup A_2$ = "甲种产品滞销或乙种产品畅销",故选(A).

例7 下列各式说明什么包含关系?

(1) $AB = A$; (2) $A + B = A$; (3) $A + B + C = A$.

解 (1) $AB = A$,意即 $AB \subset A$ 且 $A \subset AB$.由 $A \subset AB$ 知:$A \subset A$ 且 $A \subset B$,所以 $AB = A$ 说明 $A \subset B$.

(2) $A + B = A$ 等价于 $A + B \subset A$ 且 $A \subset A + B$.由 $A + B \subset A$ 知 $B \subset A$.

(3) $A + B + C = A$ 即包含关系 $A + B + C \subset A$ 与 $A \subset A + B + C$ 同时成立.由 $A + B + C \subset A$ 知 $B + C \subset A$.

第2讲 古典概型

设随机试验 E 的样本空间只有有限个样本点,即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$($n$ 为有限正整数),且样本空间 Ω 中的每一个样本点出现的可能性相等,则

$$\text{事件 } A \text{ 出现的概率} P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 所包含的基本事件个数} k}{\text{基本事件总数} n},$$

并称它为概率的古典定义.

1. 加法原理

设完成一件事有 n 类方法(只要选择其中一类方法即可完成这件事),若第一类方法有 m_1 种,第二类方法有 m_2 种,…,第 n 类方法有 m_n 种,则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法.

2. 乘法原理

设完成一件事须有 n 个步骤(仅当 n 个步骤都完成,才能完成这件事),若第一步有 m_1 种方法,第二步有 m_2 种方法,…,第 n 步有 m_n 种方法,则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种方法.

注意 加法原理与乘法原理的区别:前者完成一步即完成一件事;后者须 n 步均完成才完成一件事.

3. 排列

从 n 个不同元素中任取 m($m \leqslant n$)个按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.从 n 个不同元素取出 m 个元素的所有排列种数,记为

$$A_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

从 n 个不同元素中全部取出的排列称为全排列,其排列的种数,记为

$$A_n = n(n-1)\cdots 1 = n! \quad \text{规定 } 0! = 1.$$

4. 允许重复的排列

从 n 个不同元素中有放回地取 m 个按照一定顺序排列成一列.其排列的种数为

$$N = \underbrace{n \times n \cdots \times n}_{m\text{个}} = n^m.$$

5. 不全相异元素的全排列

若 n 个元素中,有 m 类($1 < m \leqslant n$)本质不同的元素,而每类元素中分别有 $k_1, k_2, \cdots,$

k_m 个元素($k_1+k_2+\cdots+k_m=n, 1<k_i<n, i=1,2,\cdots,m$),则 n 个元素全部取出的排列称为不全相异元素的一个全排列.其排列的种数为

$$N=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

6. 组合

从 n 个不同元素中取出 m 个元素,不管其顺序并成一组,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合,其组合总数,记为 C_n^m,且有

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

组合的性质:(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$, (2) $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$.

注意 排列与组合的区别:前者与次序有关,后者与次序无关.

例1 一盒装有10只晶体管,其中有4只次品,6只正品,随机地抽取一只测试,直到4只次品晶体管都找到.求最后一只次品晶体管在下列情况发现的概率:

(1) 在第5次测试发现; (2) 在第10次测试发现.

分析 (1) 这里我们关心的是在第5次测试时找到最后一只次品管子,因此一个基本事件是由5只不同管子组成的一个排列.

(2) 同理,这里的一个基本事件是由10只管子组成的一个排列.

解 (1) 依分析有基本事件的总数为

$$A_{10}^5=\frac{10!}{5!}.$$

设 A =“在第5次测试时找到最后一只次品管子”.为求 A 所包含的基本事件数,在前4次测试中必须有三只次品管子和一个好管子,在第5次测试时一定是次品管子,故 A 所包含的基本事件数为 $C_4^3C_6^1\cdot 4!$,所以

$$P(A)=\frac{C_4^3C_6^1\cdot 4!}{A_{10}^5}=\frac{5!\cdot 4\cdot 6\cdot 4!}{10!}=\frac{2}{105}.$$

(2) 设 B =“在第10次测试时发现最后一只次品管子”,一个基本事件是由10只管子组成的一个全排列,故基本事件的总数为10!.

与(1)的分析相类似,可以求得 B 所包含的基本事件数为 $C_9^3\cdot 4!\cdot 6!$,所以

$$P(B)=\frac{C_9^3\cdot 4!\cdot 6!}{10!}=\frac{9!\cdot 4!}{3!\cdot 10!}=\frac{2}{5}.$$

例2 任意将10本书放在书架上,其中有两套书,一套3卷,另一套4卷,求下列事件的概率:(1)3卷一套的放在一起;(2)4卷一套的放在一起;(3) 两套各自放在一起;(4) 两套中至少有一套放在一起;(5) 两套各自放在一起,还按卷次顺序排好.

解 这是一古典概型概率的计算问题,设 A =“3卷一套的放在一起”,B =“4卷一套的放在一起”,C =“两套各自放在一起”,D =“两套按卷次顺序排好”.

(1) 3卷一套的放在一起,可把3卷看成一个整体,总共有8个位置,不同放法有8!种,3卷一套之间可以任意排,共有3!种放法,所以

$$P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

(2) 同理可得 $$P(B)=\frac{7!\times 4!}{10!}=\frac{1}{30}.$$

(3) 两套各自放在一起,把两套分别看成两个整体,共有5个位置,不同排法共有5!种,4卷一套放在一起共有4!种不同排法,3卷一套的放在一起共有3!种不同排法,所以

$$P(C)=P(AB)=\frac{5!\times 4!\times 3!}{10!}=\frac{1}{210}.$$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{30}-\dfrac{1}{210}=\dfrac{2}{21}.$

(5) 这是求事件 ABD 的概率,每一套书按卷次顺序放好只有2种放法,所以

$$P(ABD)=\frac{5!\times 2\times 2}{10!}=\frac{1}{7560}.$$

例3 房间里有10个人,分别佩戴从1号到10号的纪念章,任选3人,记录其纪念章的号码.(1) 求最小号码为5的概率;(2) 求最大号码为5的概率.

解 E:从10个人中任选3人观察所佩代纪念章的号码.Ω 含有 $n=C_{10}^3$ 个基本事件.

(1) 设 A = "最小号码为5".因3个人中最小号码为5,则其余2人的号码必大于5.在号码大于5的5个人中任选2人,共有 C_5^2 种选法,故 A 所含的基本事件数为 C_5^2,于是

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}.$$

(2) 设 B = "最大号码为5",则 B 所含的基本事件数为 C_4^2,所以

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}.$$

例4 将3个球随机放入4个杯子中,问杯子中球的个数最多为1,2,3的概率各是多少?

解 设 A,B,C 分别表示杯子中的最多球数分别为1,2,3的事件.我们认为球是可以区分的,于是放球过程的所有可能结果数为 $n=4^3$.

(1) A 所含的基本事件数,即是从4个杯子中任选3个杯子,每个杯子放入一个球,杯子的选法有 C_4^3 种,球的放法有3!种,故

$$P(A)=\frac{C_4^3\cdot 3!}{4^3}=\frac{3}{8}.$$

(2) C 所含的基本事件数:由于杯子中的最多球数是3,即3个球放在同一个杯子中共有4种放法,故

$$P(C)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

(3) 由于三个球放在4个杯子中的各种可能放法为事件 $A \cup B \cup C$，显然 $A \cup B \cup C = \Omega$，且 A,B,C 互不相容，故

$$P(B) = 1 - P(A) - P(C) = \frac{9}{16}.$$

例5　把1,2,3,4,5诸数各写在一张纸片上任取其三张排成自左而右的次序，问：

(1) 所得三位数是偶数的概率是多少？

(2) 所得三位数不小于200的概率是多少？

解　从5个数中任取3个，这三个数不论怎样排列都是三位数，故 Ω 所含基本事件总数为 A_5^3.

(1) 设 A = "所得的三位数为偶数". 这里偶数的个位数必须是2或4，而十位，百位可任取. 个位有2或4两种可能，于是十位有4种可能，百位有3种可能，故所含的基本事件数为 $2 \times 4 \times 3$，所以

$$P(A) = \frac{2 \times 4 \times 3}{A_5^3} = \frac{2}{5}.$$

(2) 设 B = "不小于200的三位数"，求 $P(B)$ 有以下两种方法：

解法1　所得的第三位数的百位数只要取2,3,4,5之一，所组成的数必不小于200. 故 B 所含的基本事件数为 $4 \times 4 \times 3$，所以

$$P(B) = \frac{4 \times 4 \times 3}{A_5^3} = \frac{4}{5}.$$

解法2　因 $\bar{B}$ = "三位数小于200"，此时该三位数的百位只能取1，所以

$$P(\bar{B}) = \frac{1 \times 4 \times 3}{A_5^3} = \frac{1}{5}.$$

则

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{4}{5}.$$

例6　在0,1,2,…,9这10个数中无重复地任意取4个数字，试求所取的4个数字能组成四位偶数的概率.

解　从10个数字中任取4个进行排列，每一个排列就是一个基本事件，所以基本事件总数 $n = A_{10}^4$.

设 A = "排成的是四位偶数".

四位偶数的个位数是0,2,4,6或8. 若个位是0，则十位、百位、千位可以从剩下的9个数字中任取3个进行排列. 排列数为

$$1 \cdot A_9^3 = 1 \times 9 \times 8 \times 7,$$

若个位是2,4,6或8，则可从除零以外的其他8个数字中任选一个排在千位上，再从剩下的8个数(包括0在内)中任选两个排在百位与十位上，排列数为 $4 \times 8 \times 8 \times 7$.

所以 A 所包含的基本事件个数 $k = 1 \times 9 \times 8 \times 7 + 4 \times 8 \times 8 \times 7 = 56 \times 41$，故

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{56\times 41}{10\times 9\times 8\times 7}=\frac{41}{90}.$$

例7 某地的电话号码由七个数字组成,每个数字可以从0,1,2,…,9中任取.现任取一号码,求取得 的号码由完全不同的数字组成的概率.

解 一个电话号码为一个基本事件,记作:$(i_1,i_2,\cdots,i_7)$,其中 $i_1,i_2,\cdots,i_7$ 可取0,1,2,…,9中的任一个,故$(i_1,i_2,\cdots,i_7)$是一个可重复的排列,Ω 所含的基本事件总数为 10^7.

设 A = "号码由完全不同的数字组成",则 A 所含的基本事件数为A_{10}^7,所以

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A_{10}^7}{10^7}=\frac{189}{3125}\approx 0.06.$$

例8 从5双款式不相同的鞋子中任意选取4只,求此4只鞋子中至少有两只鞋子配成一双鞋的概率.

解 本例的基本事件总数容易计算,即为 C_{10}^4.事件 A 为"4只鞋子中至少有两只鞋子配成一双,包含有"取出的4只鞋仅有一双成对"(记为 B)及"4只鞋恰是两双"(记为C)两种情况,且 $BC=\Phi$,即 B、C互不相容.对 B 的分析分为五步:首先从5双中取出一双,并将此两只鞋全部取出,然后从剩下的4双只取出两双,再在每双中各取1只,依乘法原理,取法共有:$C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$ 种.而4只鞋恰是两双的取法有 C_5^2 种.

故所求概率 $$P(A)=P(B)+P(C)=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

小结 计算古典概型的概率,首先要弄清随机试验及其样本空间是什么?并判断有限性和等可能性是否满足?其次利用排列,组合的知识来计算样本空间 Ω 中基本事件总数及事件 A 包含的基本事件数.而利用排列计算时,是结合具体情况考虑使用不可重复排列还是用可重复排列.可利用排列计算的问题的共同特点是每一个基本事件是一组有顺序的个体.如果一个基本事件的不同位置上的个体可以重复,则可用重复排列进行计算;否则,用不可重复的排列计算.如果基本事件是一组不计顺序的不同的个体,则用组合计算.

第 3 讲　几何概率

当随机试验 E 的基本事件个数不是有限个而是无穷多个时，古典概型中计算事件 A 的概率公式 $P(A)=\frac{k}{n}$ 就不适用了. 但当试验 E 的样本空间可用某一区域来表示，并且任意一点落在该区域内度量相同的子区域是等可能的，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S}. \tag{3.1}$$

其中 S 是样本空间的度量，S_A 是构成事件 A 的子区域的度量，特别地，

(1) 如果所讨论的问题可以设想为在二维平面上某区域 G 内投点的试验，且假设点落在 G 内任一部分区域 g 内的可能性的大小只与 g 的面积有关而与 g 的形状及在 G 中的位置无关，则事件 $A=$ "在 G 内任投一点而落在 g 内" 的概率为

$$P(A)=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}; \tag{3.2}$$

(2) 如果所讨论的问题可以设想为在一维直线上某一区间 L 上投点的试验，且假定点落在 L 内任一子区间 l 上的可能性大小只与 l 的长度有关而与它在 L 中的位置无关，则事件 $A=$ "在 L 上任投一点而落在 l 内" 的概率为

$$P(A)=\frac{l\text{ 的长度}}{L\text{ 的长度}}; \tag{3.3}$$

(3) 如果所讨论的问题可以设想为在三维空间内某一立体区域 V 内投点的试验，且假设点落在 V 内任一子区域 v 内的可能性大小只与 v 的体积的大小有关而与 v 的形状及在 V 内的位置无关，则事件 $A=$ "在 V 内任投一点而落在 v 内" 的概率为

$$P(A)=\frac{v\text{ 的体积}}{V\text{ 的体积}}. \tag{3.4}$$

例 1　设 ξ 在 $[0,5]$ 随机地取值，求方程 $x^2+\xi x+\frac{\xi}{4}+\frac{1}{2}=0$ 有实根的概率.

解　方程 $x^2+\xi x+\frac{\xi}{4}+\frac{1}{2}=0$ 有实根的充要条件是判别式

$$\Delta=\xi^2-4\left(\frac{1}{4}\xi+\frac{1}{2}\right)=(\xi+1)(\xi-2)\geqslant 0,\text{即 }\xi\leqslant -1\text{ 或 }\xi\geqslant 2.$$

设 $A=$ "方程 $x^2+\xi x+\frac{\xi}{4}+\frac{1}{2}=0$ 取得实根"，则 A 发生当且仅当 ξ 落在区间：

$$[0,5]\cap\{(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)\}=[2,5],$$

于是由上述公式(3.3)知　$P(A)=\frac{[2,5]\text{ 的长度}}{[0,5]\text{ 的长度}}=\frac{3}{5}.$

例 2　甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊，它们在一昼夜内到